

# VZOROVÉ RIEŠENIA

## Astronomickej olympiády 2026

Kolo: celoslovenské kolo Kategória: stredná škola

---

### Teoretické úlohy

T1. Vesmírna Odysea (20b) . . . . .	2
T2. Krátky život častice (20b). . . . .	4
T3. Krátkozraký pozorovateľ (40b) . . . . .	5
T4. ISS (50b). . . . .	7
T5. Farebná (60b) . . . . .	9
T6. Milkdroméda III (60b) . . . . .	12
T7. Limitná mag. fotoaparátu (75b) . . . . .	15
T8. Pohyb hviezdy (80b). . . . .	20
T9. MIThenge (90b) . . . . .	25
T10. Kozmologická supernova (90b). . . . .	29
T11. Svetelný výkon hviezdy (180b). . . . .	36
T12. Oslava prist. na Marse II (235b). . . . .	47

### Dátová analýza

D1. Slniečna II (170b) . . . . .	56
D2. Netrpezlivý astrofyzik (330b) . . . . .	65

### Praktická časť

P1. Mliečna cesta (125b). . . . .	77
P2. Dobrodruh (125b) . . . . .	84
P3. Meteory (45b) . . . . .	96
P4. Poznávačka (105b). . . . .	97
P5. Zorné pole ďalekohľadu (75b) . . . . .	102
P6. Nastavenie montáže (25b). . . . .	103
<b>Zoznam konštánt.</b> . . . . .	104

Dokopy bolo možné získať **2000b**

Zverejnené 08. 06. 2026

Tento dokument je možné voľne distribuovať  
nekomerčným spôsobom pre vzdelávacie účely s uvedením zdroja.



Slovenská ústredná hviezdáreň  
v Hurbanove



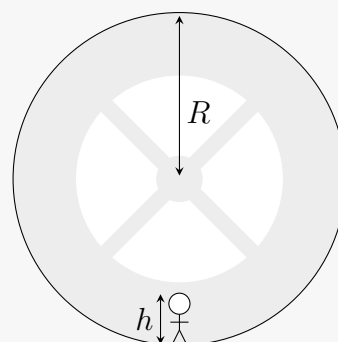
Súťaž vyhlasuje Slovenská ústredná hviezdáreň Hurbanovo v spolupráci so SAS pri SAV, s hviezdárňami a planetáriami, astronomickými kabinetmi, osvetovými strediskami, centrami voľného času a regionálnymi kultúrnymi centrami.

# Teoretické úlohy

## **T1** Vesmírna Odysea (20b, autor: Samuel Amrich, spracoval: S. Buranský)

Častým motívom v sci-fi literatúre a filmoch je medzihviezdne cestovanie s potrebou umelej gravitácie v kozmickej lodi. Jednoduchým spôsobom, ako vytvoriť umelú gravitáciu, je rotujúci valec. S vesmírnou loďou takéhoto tvaru sme sa mohli stretnúť v knihách, resp. filmoch Vesmírna odysea, Marťan, Stretnutie s Rámom alebo Pasažieri.

Zrýchlenie je vytvárané rotáciou valca okolo jeho osi. Problémom nie je dosiahnuť samotné zrýchlenie, ale nepríjemnosti by mohli vzniknúť pri veľkom rozdiel zrýchlení pôsobiacich na hlavu a na nohy človeka. Vypočítajte, aký polomer  $R$  musí mať valec, aby pre všetkých astronautov bolo zrýchlenie pôsobiace na nohy maximálne o  $p = 5\%$  väčšie ako zrýchlenie pôsobiace na hlavu. Výška astronautov  $h$  sa pohybuje v rozmedzí 1,5m až 2m a podlaha lode sa nachádza priamo na vnútornom plášti valca.



Obr. T1.1: Schéma lode.

Zrýchlenie vyvolané rotáciou je dané vzťahom

$$a_r = \frac{v_r^2}{r}, \quad (\text{T1.1})$$

kde  $a_r$  je zrýchlenie vo vzdialenosti  $r$  od osi rotácie,  $v_r$  je rýchlosť otáčania valca v tejto vzdialenosti a  $r$  je daná vzdialenosť od osi rotácie. Keďže valec, s ktorým počítame, rotuje ako tuhé teleso, bude praktickejšie použiť uhlovú rýchlosť  $\omega = v_r/r$ . Vyjadríme si rýchlosť pomocou uhlovej rýchlosti ako  $v_r = \omega r$  a dosadíme do rovnice pre zrýchlenie

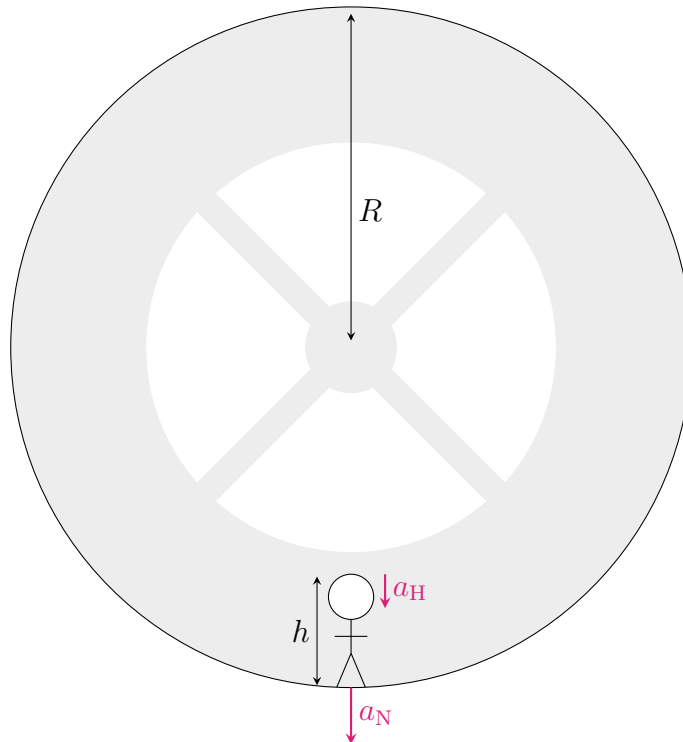
$$a_r = \omega^2 r. \quad (\text{T1.2}) \quad 4b$$

Pasažieri na takejto kozmickej lodi žijú vo vnútornej časti valca, čo znamená, že na nohy pôsobí väčšie zrýchlenie než na hlavu (viď. obrázok T1.2). Zrýchlenie pôsobiace na nohy môžeme zapísať ako

$$a_N = \omega^2 R, \quad (\text{T1.3})$$

kde  $R$  je polomer valca, teda vzdialenosť podlahy (nôh) od osi otáčania. Hlava je bližšie k osi otáčania o výšku človeka  $h$ , teda zrýchlenie pôsobiace na hlavu môžeme zapísať ako

$$a_H = \omega^2 (R - h). \quad (\text{T1.4}) \quad 3b$$



Obr. T1.2: Schéma človeka stojaceho vo vesmírnej lodi a zrýchlení, ktoré na pôsobia na jeho hlavu ( $a_H$ ) a na jeho nohy ( $a_N$ ).

Percentuálny rozdiel podľa zadania môžeme zapísať nerovnicou

$$\frac{\omega^2 R - \omega^2 (R - h)}{\omega^2 (R - h)} \leq p, \quad (\text{T1.5}) \quad 4b$$

pokrátíme  $\omega^2$  a v čitateli sa odčíta  $R$

$$\frac{h}{R - h} \leq p, \quad (\text{T1.6})$$

vynásobíme menovateľom a pravú stranu roznásobíme

$$h \leq pR - ph, \quad (\text{T1.7})$$

na pravej strane osamostatníme polomer  $R$  a dostaneme

$$R \geq \frac{h}{p} + h. \quad (\text{T1.8}) \quad 3b$$

Z odvodenej nerovnice vidíme, že pre väčšie  $h$  (vyšších ľudí) je nutný väčší polomer lode. Preto dosadíme  $h = 2 \text{ m}$  a  $p = 0,05$ , čím dostaneme podmienku pre polomer

$$\boxed{R \geq 42 \text{ m}}. \quad (\text{T1.9}) \quad 3b$$

**T2** Krátky život častice

(20b, autor: Samuel Buranský)

Interakciou s kozmickým žiarením vznikajú v horných vrstvách atmosféry okrem iných častíc aj mióny s veľmi krátkou dobou života (v zlomkoch sekundy). Pri uvažovaní klasickej mechaniky by tieto častice nikdy nemali šancu dostať sa k povrchu Zeme. Vypočítajte, ako rýchlo by musel mión letieť, aby z výšky  $h = 100$  km trafil Zem skôr než zanikne, pričom jeho pokojová doba života je  $\tau_0 \approx 2,197 \mu\text{s}$ . Neuvažujte zrážky s inými časticami a výsledok vyjadrite v percentách rýchlosti svetla.

Ak sa častica pohybuje dostatočne rýchlo, je nutné započítať relativistické efekty, ktoré spôsobujú odlišné plynutie času v rozdielnych vzťažných sústavách. Životnosť častice podlieha pri vysokých rýchlostiach dilatácii času, pre ktorý platí vzťah

$$\Delta t = \Delta t_0 \gamma, \quad (\text{T2.1}) \quad 2b$$

kde  $\gamma$  je tzv. Lorentzov faktor definovaný vzťahom

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (\text{T2.2}) \quad 3b$$

Podiel rýchlosti voči rýchlosti svetla sa často označuje  $\beta$ , čo je vlastne bezrozmerná rýchlosť

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (\text{T2.3})$$

pričom tento podiel je to, čo chceme vypočítať. Pomocou bezrozmernej rýchlosti môžeme Lorentzov faktor prepísať ako

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{T2.4}) \quad 2b$$

Na výpočet rýchlosti použijeme klasický vzťah

$$s = vt, \quad (\text{T2.5})$$

kde  $s = h$  je dráha, ktorú musí mión prejsť,  $v$  je rýchlosť, ktorú podľa rovnice (T2.3) prepíšeme ako  $v = c\beta$ , a  $t = \tau$  je životnosť častice. Podľa rovníc (T2.4) a (T2.1) platí

$$\tau = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{T2.6}) \quad 3b$$

Keď dosadíme všetky výrazy do rovnice (T2.5), dostaneme rovnicu

$$h = \frac{c\beta\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{T2.7}) \quad 5b$$

Osamostatníme odmocninu na ľavej strane a celú rovnicu umocníme na druhú

$$1 - \beta^2 = \beta^2 \left( \frac{c\tau_0}{h} \right)^2, \quad (\text{T2.8})$$

$$1 = \beta^2 \left( \frac{c\tau_0}{h} \right)^2 + \beta^2, \quad (\text{T2.9})$$

na pravej strane vyjmeme  $\beta^2$  pred zátvorku a rovnicu podelíme zátvorkou

$$\beta^2 = \frac{1}{\left( \frac{c\tau_0}{h} \right)^2 + 1}, \quad (\text{T2.10}) \quad 2b$$

rovnicu odmocníme a dostaneme výraz pre bezrozmernú rýchlosť  $\beta$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 + \left( \frac{c\tau_0}{h} \right)^2}} \doteq 0,99998 = \boxed{99,998 \%}. \quad (\text{T2.11}) \quad 3b$$

### **T3** Krátkozraký pozorovateľ (40b, autor: S. Buranský & D. Král)

Pri uvažovaní o optike oka sú dôležité rôzne vzdialenosti. Vzdialený bod je najvzdialenejší bod, ktorý oko vidí ostro bez akomodácie (bez námahy svalov), a pre zdravé oko leží v nekonečne. Naopak, konvenčná zrková vzdialenosť (dohodou stanovená na 25 cm) je štandardná vzdialenosť, pri ktorej sa predpokladá pohodlné čítanie u zdravého človeka, čo si však už vyžaduje určité namáhanie oka (akomodáciu).

David je krátkozraký, čo koriguje okuliarmi. O svojom ľavom oku bez okuliarov zistil, že vzdialený bod leží vo vzdialenosti 1,3 m. Pri pravom oku zistil, že text vo vzdialenosti 18,5 cm sa mu bez okuliarov javí, akoby ho mal v konvenčnej vzdialenosti.

David pozoruje hviezdu Sirius bežným binokulárom bez použitia okuliarov. Binokulár má centrálné ostrenie naraz pre oba ďalekohľady a taktiež možnosť ostrenia každého ďalekohľadu zvlášť. David zaostřil centrálné oba ďalekohľady dokonale pre svoje ľavé oko. O kolko dioptrií musí teraz otočiť korekciu na pravom ďalekohľade, aby videl ostro aj pravým okom?

*Nápoveda: Dve tenké šošovky postavené za sebou sa správajú ako jedna, ktorej optická mohutnosť je súčet optických mohutností jednotlivých šošoviek.*

Základná rovnica, ktorú budeme v tejto úlohe potrebovať, je zobrazovacia rovnica tenkej šošovky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad (\text{T3.1}) \quad 7b$$

kde  $a$  je predmetová vzdialenosť (vzdialenosť zobrazovaného predmetu od šošovky),  $a'$  je obrazová vzdialenosť (vzdialenosť vytvoreného obrazu, resp. tienidla, od šošovky) a  $f$  je ohnisková vzdialenosť, ktorá charakterizuje šošovku.

Ďalší dôležitý pojem spomenutý v zadaní je optická mohutnosť šošovky  $\varphi$ , a tá sa vypočíta ako prevrátená hodnota ohniskovej vzdialenosti v metroch

$$\varphi = \frac{1}{f}. \quad (\text{T3.2}) \quad 6b$$

Pre úspešný výpočet je nutné vedieť, že oko má špeciálnu vlastnosť a tou je zmena optickej mohutnosti, teda zaostrovanie na predmety v rôznych vzdialenostiach. Ako je napísané v zadaní, zdravé oko má vzdialený bod v nekonečne a konvenčnú vzdialenosť rovnú 25 cm. Krátkozraké oko má obe vzdialenosti zmenšené. Ak ale oko spojíme so správnou šošovkou, tak sústava oko-šošovka bude mať vzdialený bod aj konvenčnú vzdialenosť zhodnú so zdravým okom.

Začneme výpočet ľavým okom, pre ktoré si môžeme napísať dve zobrazovacie rovnice. Ako prvé si napíšeme zobrazovaciu rovnicu pre krátkozraké oko

$$\frac{1}{1,3 \text{ m}} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_L}, \quad (\text{T3.3}) \quad 4b$$

a pre krátkozraké oko s okuliarmi dostaneme

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_L} + \varphi_L, \quad (\text{T3.4}) \quad 4b$$

kde prvý zlomok je rovný nule, takže môžeme rovnicu prepísať ako

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f_L} + \varphi_L. \quad (\text{T3.5})$$

Ak odčítame rovnicu (T3.3) od rovnice (T3.5), dostaneme priamo optickú mohutnosť ľavej šošovky Davidových okuliarov

$$\varphi_L = -\frac{1}{1,3 \text{ m}} \doteq -0,77 \text{ D}. \quad (\text{T3.6}) \quad 3b$$

Podobné rovnice si môžeme napísať pre pravé oko a jeho konvenčnú vzdialenosť. Pre krátkozraké oko platí

$$\frac{1}{0,185 \text{ m}} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_P}, \quad (\text{T3.7}) \quad 4b$$

a pre krátkozraké s okuliarmi platí

$$\frac{1}{0,25 \text{ m}} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_P} + \varphi_P. \quad (\text{T3.8}) \quad 4b$$

Ak odčítame rovnicu (T3.7) od rovnice (T3.8), dostaneme výraz pre Davidovu dioptriú na pravom oku

$$\varphi_P = \frac{1}{0,25 \text{ m}} - \frac{1}{0,185 \text{ m}} \doteq -1,4 \text{ D}. \quad (\text{T3.9}) \quad 3b$$

Preostrenie medzi nastavením ľavého a pravého oka je iba rozdiel optických mohutností Davidových okuliarov teda

$$\varphi_P - \varphi_L = \boxed{-0,64 \text{ D}}. \quad (\text{T3.10}) \quad 5b$$

Alternatívne sa dá uvažovať aj tak, že akú šošovku musí mať David pred ľavým okom aby mu objekty z nekonečna posunula do vzdialenosti 1,3 m. Opäť použijeme zobrazovaciu rovnicu, kde predmetová vzdialenosť je nekonečno a obrazová je  $-1,3$  m, pričom záporné znamienko je spôsobené tým, že sa obraz nachádza v predmetovom priestore. Po dosadení dostaneme Davidovu ľavú dioptriu

$$\varphi_L = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-1,3} = \frac{1}{-1,3} \doteq -0,77 \text{ D}. \quad (\text{T3.11}) \quad 5b$$

Pre pravé oko urobíme rovnaký výpočet pričom predmetová vzdialenosť je 25 cm a obrazová  $-18,5$  cm. Po dosadení do zobrazovacej rovnice dostaneme Davidovu pravú dioptriou

$$\varphi_P = \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-0,185} \doteq -1,4 \text{ D}. \quad (\text{T3.12}) \quad 5b$$

## T4 ISS

(50b, autor: Jana Švrčková)

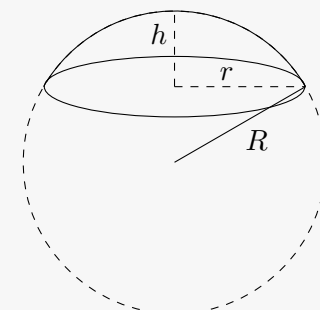
Medzinárodná vesmírna stanica obieha Zem po dráhe so strednou výškou nad povrchom 400 km a sklonom  $51,6^\circ$ . Na priamych prenosoch NASA priamo z ISS jasne vidno, že astronauti na palube vidia iba malú časť zemského povrchu.

- (a) [20b] Akú časť zemského povrchu je možné naraz vidieť z ISS? Odpoveď uveďte v percentách zemského povrchu. Zanedbajte atmosférickú refrakciu a excentricitu dráhy ISS. Zem považujte za dokonalú guľu.

*Nápoveda: Môže sa vám hodiť vzorec na výpočet povrchu guľového vrchlíka  $S = 2\pi hR$ .*

Vďaka orbitálnemu pohybu ISS a rotácii Zeme môžu astronauti počas dlhšej doby vidieť oveľa väčšiu časť povrchu Zeme, než ste vypočítali v časti (a).

- (b) [30b] Vypočítajte, akú časť povrchu Zeme je možné teoreticky zahliadnuť z paluby ISS v priebehu mnohých obehov. Svoju odpoveď opäť uveďte v percentách.



Obr. T4.1: Guľový vrchlík.

- (a) Načrtnime si najskôr celú situáciu (pozri obr. T4.2, ktorý nie je v skutočnej mierke). Oblasť viditeľná z ISS je zafarbená namodro a výška ISS nad zemským povrchom je označená  $H$ . Priamka spájajúca ISS a najvzdialenejší viditeľný bod na povrchu je zároveň dotyčnicou k povrchu, a preto s polomerom Zeme v bode dotyku zvierá pravý uhol. Vznikne tak pravouhlý

trojuholník, v ktorom pre stredový uhol  $\alpha$  platí

$$\cos \alpha = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + H}. \quad (\text{T4.1}) \quad 5b$$

Vzdialenosť podstavy vrchlíka od stredu Zeme sa podľa obr. T4.2 rovná  $R \cos \alpha$ . Vzďialenosť  $h$  od podstavy vrchlíka po povrch Zeme sa preto dá vyjadriť ako

$$h = R_{\oplus} - R_{\oplus} \cos \alpha = R_{\oplus} \left( 1 - \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + H} \right) = \frac{R_{\oplus} H}{R_{\oplus} + H}. \quad (\text{T4.2}) \quad 5b$$

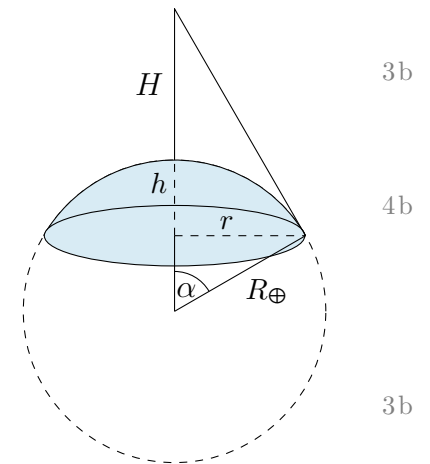
Celkový povrch Zeme je  $S = 4\pi R_{\oplus}^2$ , zatiaľ čo povrch guľového vrchlíka viditeľného z ISS je

$$S_1 = 2\pi h R_{\oplus} = \frac{2\pi R_{\oplus}^2 H}{R_{\oplus} + H}. \quad (\text{T4.3})$$

Pomer týchto dvoch plôch je

$$\frac{S_1}{S} = \frac{H}{2(R_{\oplus} + H)} \doteq \boxed{0,0295}. \quad (\text{T4.4})$$

Astronauti z ISS môžu teda naraz vidieť približne 3 % zemského povrchu.

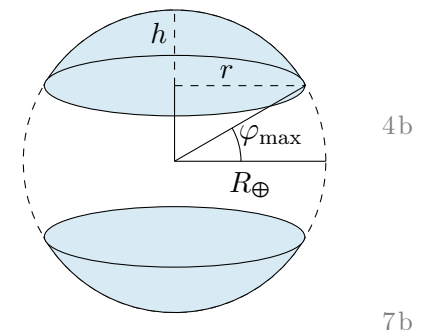


Obr. T4.2: Schematický náčrt oblasti viditeľnej naraz z ISS.

- (b) Vďaka sklonu dráhy ISS môžu astronauti vidieť väčšinu povrchu Zeme s výnimkou oblastí okolo pólův – modrých oblastí na obrázku T4.3. ISS sa na svojej naklonenej dráhe dokáže pri správnom natočení Zeme (na čo stačí počkať dostatočne veľa obbehov) dostať priamo nad ľubovoľné miesto so zemepisnou šírkou v absolútnej hodnote maximálne rovnou  $i = 51,6^\circ$ . 2b

Keďže ale obieha vo výške 400 km, je možné vidieť ešte väčšie zemepisné šírky. Najväčšia absolútna hodnota zemepisnej šírky na severnej pologuli, ktorá je ešte stále viditeľná z ISS, je  $\varphi_{\max} = i + \alpha$ , kde  $\alpha$  je rovnaký uhol ako v časti (a). Číselne dostaneme

$$\varphi_{\max} = i + \alpha = i + \arccos\left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + H}\right) \doteq 71,4^\circ \text{ N}. \quad (\text{T4.5})$$



Obr. T4.3: Schematický náčrt oblasti dlhodobo viditeľnej z ISS.

Najjužnejšia viditeľná zemepisná šírka je  $71,4^\circ \text{ S}$ , symetricky k severnej pologuli. Najjednoduchší spôsob, akým môžeme vypočítať celý viditeľný povrch Zeme je najskôr zistiť, aký je povrch guľových vrchlíkov v okolí pólův, ktoré nevidíme. Postu- 2b

pujeme pri tom rovnako ako v predchádzajúcej časti úlohy. Vzďialenosť  $h$  je podľa obrázka

$$h = R_{\oplus} - R_{\oplus} \sin \varphi_{\max}. \quad (\text{T4.6}) \quad 5b$$

Celkový povrch oblasti, ktorú nevidno z ISS, je teda po zarátaní oboch oblastí okolo pólov

$$S_2 = 2 \cdot 2\pi h R_{\oplus} = 4\pi R_{\oplus}^2 (1 - \sin \varphi_{\max}). \quad (\text{T4.7}) \quad 5b$$

Pomer viditeľnej oblasti a celého zemského povrchu je

$$\frac{S - S_2}{S} = \frac{4\pi R_{\oplus}^2 - 4\pi R_{\oplus}^2 (1 - \sin \varphi_{\max})}{4\pi R_{\oplus}^2} = \sin \varphi_{\max} \doteq \boxed{0,948}, \quad (\text{T4.8}) \quad 5b$$

takže astronauti môžu napokon zahliadnuť až 95% povrchu Zeme.

## **T5** Farebná

(60 b, autor: Radovan Lascsák)

Spektrum slnečného žiarenia je možné hrubo aproximovať ako žiarenie absolútne čierneho telesa pomocou Planckovho zákona pre povrchový spektrálny tok  $F_{\lambda}$ , čo je veličina predstavujúca tok na povrchu telesa na jednotku vlnovej dĺžky  $\lambda$

$$F_{\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (\text{T5.1})$$

kde  $h$  je Planckova konštanta,  $c$  rýchlosť svetla,  $\lambda$  vlnová dĺžka,  $k_B$  Boltzmannova konštanta,  $T$  efektívna teplota a  $\exp(x)$  alternatívny zápis pre funkciu  $e^x$ .

Pri pozorovaniach je zvykom používať štandardný fotometrický systém založený na filtroch U, B a V, ktorých parametre sú zhrnuté v tabuľke T5.1. Spektrálnu priepustnosť filtrov pre jednoduchosť uvažujte ako konštantných 100 % v oblasti filtra a 0 % mimo neho.

### Úlohy

- [30 b] Vypočítajte absolútnu magnitúdu Slnka vo filtroch B a V. Uvažujte konštantný spektrálny tok  $F_{\lambda}$  v oblasti filtra.
- [15 b] V ďalekohľade pozorujeme hviezdu fyzikálne totožnú so Slnkom, ktorej zdanlivá magnitúda je 27,25 mag vo filtri B a 25,67 mag vo filtri V. Vypočítajte jej farebný index  $(B - V)$  a farebný exces  $E_{(B-V)}$ .
- [15 b] Vypočítajte vzdialenosť hviezdy so zarátaním medzihviezdnej absorpcie. Predpokladajte, že magnitúda Slnka vo V filtri je rovná vizuálnej magnitúde Slnka. Hodnotu R-čísła (extinkčného koeficientu priamej úmery medzi absorpciou vo V filtri a farebným excesom  $(B - V)$ ) uvažujte ako  $R_V = 3,1$ .

Tabuľka T5.1: Prehľad štandardných fotometrických filtrov.

Označenie	Stred filtra	Šírka filtra
U	365 nm	66 nm
B	445 nm	94 nm
V	551 nm	88 nm
R	658 nm	138 nm
I	806 nm	149 nm

- (a) Využijeme Pogsonovu rovnicu, v ktorej porovnáme absolútnu magnitúdu Slnka  $M_{\odot}^{\text{B,V}}$  vo filtri (B alebo V) a absolútnu bolometrickú magnitúdu Slnka  $M_{\odot}^{\text{bol}}$  (ktorá prislúcha povrchovému bolometrickému toku  $F_{\odot}^{\text{bol}}$  pre celé spektrum);

$$M_{\odot}^{\text{B,V}} - M_{\odot}^{\text{bol}} = -2,5 \log \left( \frac{F_{\odot}^{\text{B,V}}}{F_{\odot}^{\text{bol}}} \right), \quad (\text{T5.2}) \quad 5b$$

kde  $F_{\odot}^{\text{B,V}}$  je povrchový tok Slnka vo filtri B, respektíve V. Ten vypočítame pomocou spektrálneho toku  $F_{\lambda}$  a spektrálnej šírky filtrov  $\Delta\lambda$ , podľa tabuľky T5.1.

$$F_{\odot}^{\text{B,V}} = F_{\odot,\lambda}^{\text{B,V}} \cdot \Delta\lambda^{\text{B,V}}, \quad (\text{T5.3}) \quad 5b$$

kde  $F_{\odot,\lambda}^{\text{B,V}}$  vypočítame zo zadanej rovnice (T5.1) pre Planckovo spektrum po dosadení stredú filtrov za vlnovú dĺžku  $\lambda$  a teploty Slnka  $T_{\odot}$  za teplotu  $T$ .

$$\begin{aligned} F_{\odot,\lambda}^{\text{B}} &= F_{\lambda}(\lambda = 445 \text{ nm}, T = T_{\odot}) = 79,574 \cdot 10^{12} \text{ W m}^{-2} \text{ m}^{-1} \\ &= 79,574 \text{ kW m}^{-2} \text{ nm}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{T5.4}) \quad 5b$$

$$\begin{aligned} F_{\odot,\lambda}^{\text{V}} &= F_{\lambda}(\lambda = 551 \text{ nm}, T = T_{\odot}) = 80,878 \cdot 10^{12} \text{ W m}^{-2} \text{ m}^{-1} \\ &= 80,878 \text{ kW m}^{-2} \text{ nm}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{T5.5}) \quad 5b$$

čiže po dosadení do rovnice (T5.3)

$$F_{\odot}^{\text{B}} = F_{\odot,\lambda}^{\text{B}} \cdot 94 \text{ nm} = 7479,9 \text{ kW m}^{-2}, \quad (\text{T5.6}) \quad 1b$$

$$F_{\odot}^{\text{V}} = F_{\odot,\lambda}^{\text{V}} \cdot 88 \text{ nm} = 7117,3 \text{ kW m}^{-2}. \quad (\text{T5.7}) \quad 1b$$

Povrchový bolometrický tok Slnka určíme pomocou jeho svietivosti  $L_{\odot}$  a povrchu, ktorý aproximujeme sférou s polomerom  $R_{\odot}$ .

$$F_{\odot}^{\text{bol}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = 62\,939 \text{ kW m}^{-2}, \quad (\text{T5.8}) \quad 4b$$

pričom vidíme, že je asi o rád väčší ako toky vo filtroch B a V, čo je očakávaný výsledok.

Vyjadrením  $M_{\odot}^{B,V}$  z rovnice (T5.2), a dosadením  $F_{\odot}^{B,V}$  a  $F_{\odot}^{\text{bol}}$  dostávame

$$M_{\odot}^B = M_{\odot}^{\text{bol}} - 2,5 \log \left( \frac{F_{\odot}^B}{F_{\odot}^{\text{bol}}} \right) \doteq \boxed{7,053 \text{ mag}}, \quad (\text{T5.9}) \quad 2b$$

$$M_{\odot}^V = M_{\odot}^{\text{bol}} - 2,5 \log \left( \frac{F_{\odot}^V}{F_{\odot}^{\text{bol}}} \right) \doteq \boxed{7,107 \text{ mag}}. \quad (\text{T5.10}) \quad 2b$$

(b) Výpočet farebného indexu  $(B - V)$  je triviálny. Odčítame od seba magnitúdu vo filtri B a magnitúdu vo filtri V. Dostávame

$$(B - V) = 27,25 \text{ mag} - 25,67 \text{ mag} = \boxed{1,58 \text{ mag}}. \quad (\text{T5.11}) \quad 6b$$

Pre výpočet farebného excesu potrebujeme takzvanú *intrinsic* hodnotu farebného indexu, ktorú budeme značiť  $(B - V)_0$  a predstavuje počiatočnú hodnotu farebného indexu, tesne po vyslaní žiarenia z pozorovanej hviezdy. Keďže je hviezda fyzikálne identická so Slnkom, tak intrinsic hodnota farebného indexu hviezdy je rovná hodnote farebného indexu Slnka, pretože Slnko je blízko Zeme, a teda absorpcia je zanedbateľná. Preto

$$(B - V)_0 = (B - V)_{\odot} = M_{\odot}^B - M_{\odot}^V = -0,054 \text{ mag}. \quad (\text{T5.12}) \quad 4b$$

Farebný exces je následne rozdiel pozorovaného a intrinsic farebného indexu, teda

$$E_{(B-V)} = (B - V) - (B - V)_0 = \boxed{1,634 \text{ mag}}. \quad (\text{T5.13}) \quad 5b$$

(c) Na výpočet vzdialenosti  $d$  využijeme vzorec pre modul vzdialenosti vo filtri V so zarátaním absorpcie;

$$m_V - M_V = -5 + 5 \log d + A_V, \quad (\text{T5.14}) \quad 6b$$

kde  $m_V$  je zdanlivá (pozorovaná) magnitúda hviezdy vo filtri V,  $M_V$  je absolútna magnitúda hviezdy vo filtri V,  $d$  je vzdialenosť hviezdy v parsekoch a  $A_V$  je celková absorpcia vo filtri V. Zdanlivú magnitúdu  $m_V = 25,67 \text{ mag}$  máme zadanú v zadaní, absolútna magnitúda  $M_V$  je rovnaká ako spočítaná absolútna vizuálna magnitúda Slnka  $M_{\odot}^V = 7,107 \text{ mag}$  a absorpciu  $A_V$  určíme pomocou R-čísla a farebného excesu ako

$$A_V = R_V \cdot E_{(B-V)} = 3,1 \cdot 1,634 \text{ mag} = 5,0654 \text{ mag}. \quad (\text{T5.15}) \quad 6b$$

Vyjadrením vzdialenosti z rovnice (T5.14) a dosadením máme

$$d = 10^{0,2(m_V - M_{\odot}^V + 5 - A_V)} \doteq \boxed{5,0 \text{ kpc}}. \quad (\text{T5.16}) \quad 3b$$

**T6 Milkdoméda III** (60b, autor: Terézia Hanáková & Radovan Lascsák)

Galaxia v Androméde (M 31) sa po dobu takmer 4,5 miliardy rokov približovala k Mliečnej ceste – galaxii, kde sa nachádza slnečná sústava, planéta Zem a aj toto miesto, kde práve píšete celoslovenské kolo. Po splynutí týchto dvoch sesterských galaxií nastane nová epocha, v ktorej sa už nebude hovoriť jednotlivo o galaxii v Androméde a Mliečnej ceste (po ang. *Milky Way*), ale o jednotnej novej galaxii – Milkdoméde.

Jasnosť galaxie je tvorená dvomi hlavnými komponentami – jadrom a diskom. V tejto úlohe sa zameriame na disk, keďže jasnosť jadra dominuje iba v centrálnej oblasti galaxie do vzdialenosti asi 1,2 kpc od stredu galaxie. Jasnosť galaxie sa zvykne popisovať pomocou plošnej magnitúdy  $\mu$ , ktorej jednotky sú  $\text{mag}/\text{arcsec}^2$  (magnitúda na štvorcovú uhlovú sekundu oblohy). Rôzne miesta disku galaxie majú rozdielnu jasnosť, a teda aj rozdielnu plošnú magnitúdu. Budeme predpokladať, že si M 31 udržuje rovnováhu medzi zánikom a tvorbou hviezd tak, že jej absolútna magnitúda a rozloženie jasností rôznych častí disku sú v čase konštantné.

- (a) [15b] Dokážte, že plošná magnitúda  $\mu$ , ktorú pozorujeme zo Zeme v jednom konkrétnom mieste disku galaxie M 31, nezávisí od vzdialenosti M 31 od Zeme a jej inklinácie voči zornému líču.

Profil jasnosti kruhového disku M 31 môžeme modelovať exponenciálnym poklesom, ktorý je polárne symetrický okolo stredu galaxie. Matematicky zapísané

$$\text{jasnosť} = K \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right), \quad (\text{T6.1})$$

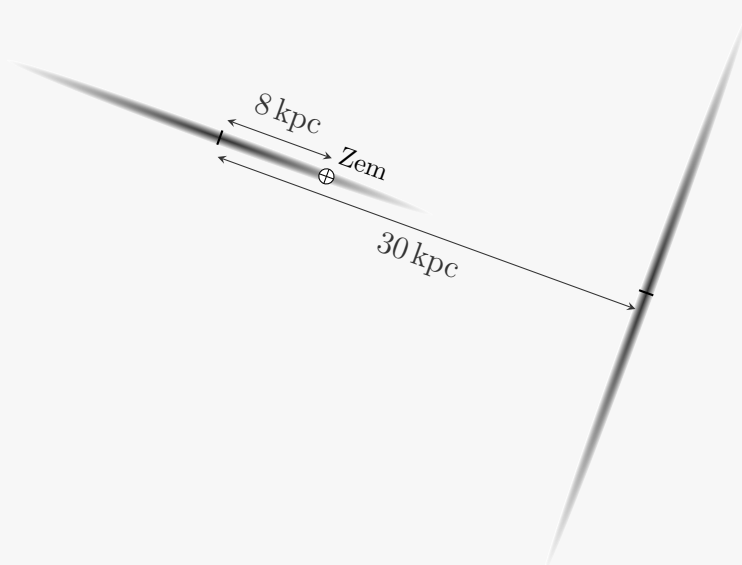
kde  $K$  je konštanta,  $r$  je vzdialenosť časti disku od stredu galaxie a  $r_s = 5,7$  kpc je škálovacia vzdialenosť, v ktorej jasnosť disku klesne  $e$ -krát voči jasnosti v strede disku. Konštanta  $K$  je rovná jasnosti disku v strede galaxie, teda jasnosti stredu galaxie po odpočítaní zložky jasnosti pre jadro galaxie. Plošnú magnitúdu v strede disku budeme označovať  $\mu_0$ .

- (b) [15b] Prepísaním vzťahu (T6.1) do plošných magnitúd pomocou Pogsonovej rovnice ukážte, že plošná magnitúda disku klesá lineárne so vzdialenosťou  $r$ . Ako výsledok uveďte vyjadrenie pre  $\mu$  v závislosti od  $\mu_0, r, r_s$ .

V súčasnosti sa galaxia M 31 nachádza vo vzdialenosti  $d_{\text{M31}} = 765$  kpc od Zeme, jej plošná magnitúda disku v strede je  $\mu_0 = 16,7$   $\text{mag}/\text{arcsec}^2$  a na nočnej oblohe voľným okom limitne vidíme disk M 31 do vzdialenosti  $20'$  od jeho stredu.

- (c) [15b] Určte, do akej fyzickej vzdialenosti  $r_{\text{lim}}$  v kpc vidíme v súčasnosti voľným okom disk galaxie M 31 od jeho stredu. Vypočítajte limitnú plošnú magnitúdu  $\mu_{\text{lim}}$  zodpovedajúcu vzdialenosti  $r_{\text{lim}}$ , ktorú dokáže naše oko zaznamenať v disku galaxie M 31.

Teraz sa presunieme do budúcnosti do času tesne pred zrážkou galaxií. Pre jednoduchosť uvažujme, že disky galaxií sú orientované kolmo na seba, zachovali si kruhový tvar a Mliečna cesta mieri do stredu M 31. Situácia je zobrazená na obrázku T6.1.



Obr. T6.1: Znázornenie zrážajúcich sa galaxií pri pohľade z boku ich diskov. Zem leží na spojnici stredov galaxií, ktoré sú od seba vzdialené 30 kpc.

- (d) [15 b] Vypočítajte rozsah galaktických šírok  $b$ , na ktorých by sme mohli voľným okom pozorovať galaktický disk M31 v čase, kedy nastane situácia zobrazená na obrázku T6.1. Zanedbajte medzihviezdnu absorpciu.

- (a) Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že plošná magnitúda bude menšia pre menšiu vzdialenosť, keďže množstvo zachytenej energie z jedného metra štvorcového disku galaxie je úmerné  $1/d^2$ , kde  $d$  je vzdialenosť galaxie M31. Avšak musíme si dať pozor na to, že pod plošnou magnitúdou  $\mu$  v jednotke mag/arcsec<sup>2</sup> rozumieme magnitúdu, ktorá do našich očí prichádza z oblasti oblohy s uhlovými rozmermi  $1 \times 1$  uhlovej sekundy (angl. *arc second*). Plocha disku galaxie obsiahnutá v jednej štvorcovej uhlovej sekunde je tým menšia, čím bližšie sa k nám galaxia nachádza. Veľkosť tejto plochy je úmerná takisto  $1/d^2$ , čo presne vykompenzuje efekt menšej vzdialenosti galaxie. Preto množstvo energie zachytené z jednej štvorcovej uhlovej sekundy disku galaxie je nezávislé od vzdialenosti galaxie. To platí pre každé miesto disku galaxie, keďže predpokladáme, že si galaxia zachováva absolútny profil jasnosti.

8b

Druhou prekvapivou vecou je, že plošná magnitúda nezávisí od uhla sklonenia disku. Klasicky sme zvyknutí na to, že množstvo zachytenej plochy z jedného metra štvorcového je úmerné  $\sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je uhol medzi zorným lúčom a pozorovanou žiariacou plochou. Avšak v prípade plošnej magnitúdy hovoríme o ploche, ktorú vidíme pod uhlom jednej štvorcovej oblúkovej sekundy. Sklonenie plochy o uhol  $\alpha$  spôsobí nárast plochy, ktorá sa vojde do jednej štvorcovej oblúkovej sekundy, a to práve s koeficientom  $\sin \alpha$ . Efekty sa opäť vzájomne vyrušia a plošná magnitúda nezávisí od uhla naklonenia disku. Rovnaká úvaha platí pre každé miesto disku.

7b

(b) Pogsonovu rovnicu môžeme písať v tvare

$$\mu - \mu_0 = -2,5 \log \left( \frac{\text{jasnosť}}{\text{jasnosť v strede}} \right), \quad (\text{T6.2}) \quad 5b$$

kde  $\mu_0$  je plošná magnitúda v strede disku ( $r = 0$ ) a  $\mu$  je plošná magnitúda časti disku vo vzdialenosti  $r$  od stredu disku. Dosadením exponenciálneho predpisu pre jasnosť zo zadania dostaneme

$$\mu - \mu_0 = -2,5 \log \left( \frac{K \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right)}{K \exp\left(-\frac{0}{r_s}\right)} \right) = -2,5 \log \left( \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) \right). \quad (\text{T6.3})$$

Po úprave, v ktorej si dáme pozor na to, že logaritmus je dekadický a nie prirodzený, máme

$$\boxed{\mu = \mu_0 + 2,5 \frac{r}{r_s} \log e}. \quad (\text{T6.4}) \quad 10b$$

(c) Vzdialenosť  $r_{\text{lim}}$  pozorujeme zo vzdialenosti  $d_{\text{M31}} = 765$  kpc pod uhlom  $20'$ . Keďže je tento uhol malý, môžeme  $r_{\text{lim}}$  aproximovať kružnicovým oblúkom a písať trojčlenku v tvare

$$\frac{20'}{360^\circ} = \frac{r_{\text{lim}}}{2\pi d_{\text{M31}}}, \quad (\text{T6.5}) \quad 5b$$

z ktorej

$$r_{\text{lim}} = 2\pi d_{\text{M31}} \frac{20'}{360^\circ} \doteq \boxed{4,5 \text{ kpc}}. \quad (\text{T6.6}) \quad 5b$$

Alternatívne by sme vedeli  $r_{\text{lim}}$  vypočítať pomocou trigonometrie cez tangens alebo sínus.

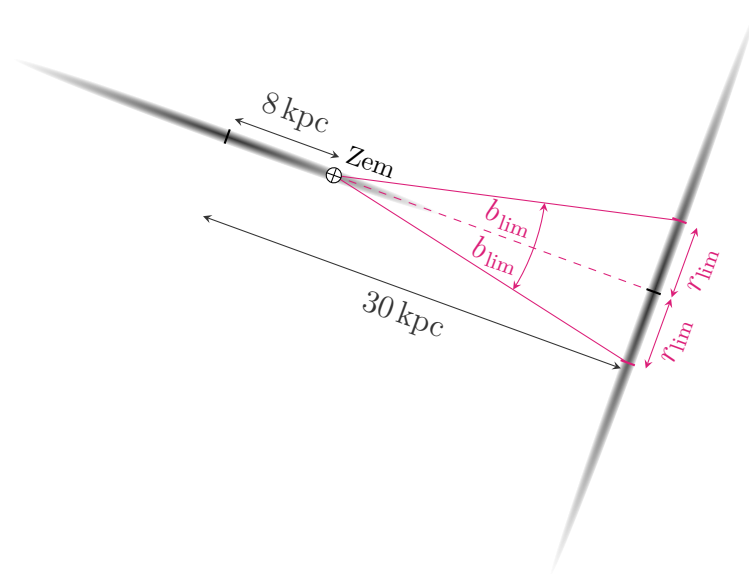
Dosadením  $r = r_{\text{lim}}$  do rovnice (T6.4) vypočítame  $\mu = \mu_{\text{lim}}$  ako

$$\mu_{\text{lim}} = \mu_0 + 2,5 \frac{r_{\text{lim}}}{r_s} \log e \doteq \boxed{17,5 \text{ mag/arcsec}^2}. \quad (\text{T6.7}) \quad 5b$$

(d) Keďže plošná magnitúda disku nie je závislá od vzdialenosti a uhla, tak to znamená, že hranica  $\pm r_{\text{lim}}$  okom pozorovateľného disku M31 bude rovnaká v budúcnosti ako je dnes. Úloha sa preto mení na jednoduchú geometriu zobrazenú na obrázku T6.2. Galaktická šírka je uhlová súradnica popisujúca vzdialenosť od galaktického rovníka Mliečnej cesty pri pohľade zo Zeme. Keďže Zem leží na spojnici stredov galaxií, tak rozsah galaktických šírok  $b$  bude symetrický okolo nuly. Z geometrie pravouhlého trojuholníka dostávame

$$\tan b_{\text{lim}} = \frac{r_{\text{lim}}}{30 \text{ kpc} - 8 \text{ kpc}} \Rightarrow b_{\text{lim}} = 11,4^\circ. \quad (\text{T6.8}) \quad 5b$$

Rozsah galaktických šírok, na ktorých uvidíme galaxiu M31, bude  $\boxed{b \in (-11,4^\circ; 11,4^\circ)}$ . Galaxia bude mať na oblohe 46-krát väčší priemer ako Mesiac, čo je toľko ako uhlová vzdialenosť medzi hviezdami Aldebaran a Pollux. 2b



Obr. T6.2: Znázornenie voľným okom pozorovateľných častí galaxie M 31, ktorá sa nám zobrazí na rozsah galaktických dĺžok  $b \in (-b_{\text{lim}}, b_{\text{lim}})$ .

## T7 Limitná magnitúda fotoaparátu (75 b, autor: V. Slanina)

Svetelné znečistenie rastie rýchlym tempom takmer o 10 % ročne, čo robí z prirodzene tmavej oblohy ohrozený unikát. Na Slovensku je najtmavším miestom Park tmavej oblohy Poloniny ( $\phi = 49,03^\circ \text{ N}$ ,  $\lambda = 22,45^\circ \text{ E}$ ), kde jas nočnej oblohy dosahuje limitné hodnoty plošnej magnitúdy  $\mu_1 \approx 22 \text{ mag/arcsec}^2$ . Pre astrofotografov je v takýchto podmienkach veľmi dôležité zistiť, ako nastaviť expozíciu tak, aby zachytili čo najslabšie objekty bez toho, aby boli hviezdy v dôsledku rotácie Zeme rozmazané.

V tejto úlohe sa budeme zaoberať fotením s digitálnou zrkadlovkou Nikon D780 s full-frame CMOS senzorom (rozmery  $a \times b = 35,9 \text{ mm} \times 23,9 \text{ mm}$ , počet štvorcových pixelov  $N_p = 24 \text{ MPx}$ ) a objektívom s ohniskovou vzdialenosťou  $f = 50 \text{ mm}$  a svetelnosťou ( $F$ -ratio)  $f/1.8$ . Uvažujte, že fotíme hviezdy s deklináciou  $\delta = 30^\circ$  a predpokladajte, že nepoužívame motorizovanú montáž.

- (a) [13 b] Vypočítajte najdlhšiu expozičnú dobu  $\tau$ , pri ktorej nebudú vznikať takzvané *star trails*. Ako podmienku na vznik star trails budeme považovať, že obraz hviezdy musí na senzore prejsť dráhu rovnú aspoň veľkosti strany štvorcového pixela senzora.

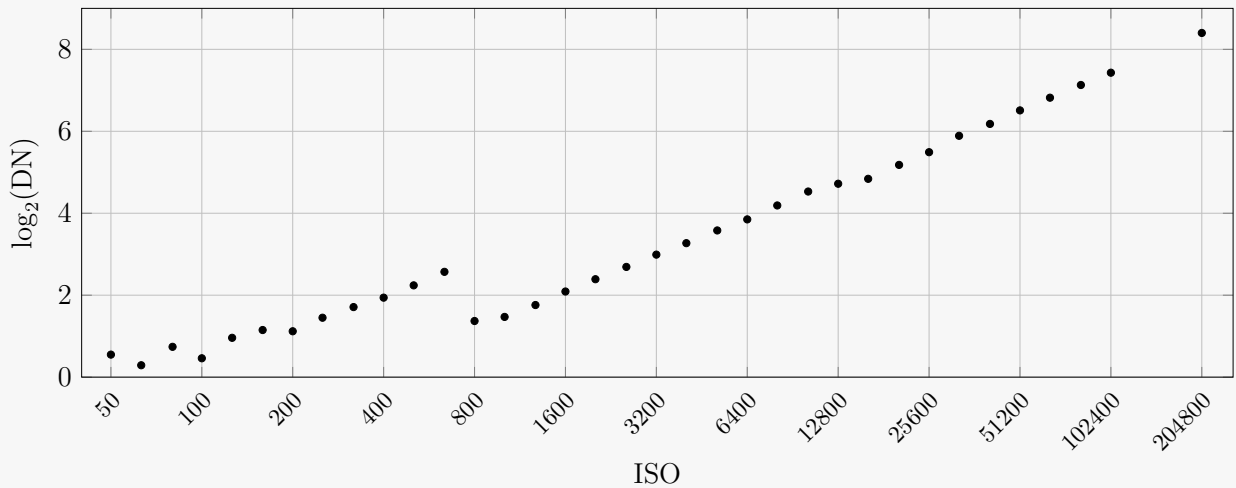
Schopnosť senzora zaznamenať slabú hviezdu je limitovaná šumom  $N$ . Proces fungovania CMOS senzora je zjednodušene založený na tom, že fotóny dopadajúce na pixel z jeho povrchu „vybijú“ elektróny, ktoré sa v ňom akumulujú ako náboj (pomer počtu vybitých elektrónov na jeden fotón sa nazýva kvantová účinnosť  $\eta$ ). Po ukončení expozície sa tento náboj premení na napätie, zosilní sa a v A/D prevodníku sa zmení na digitálnu hodnotu DN (*Digital Number*).

Tento proces nie je dokonalý a do signálu vstupuje niekoľko zložiek šumu:

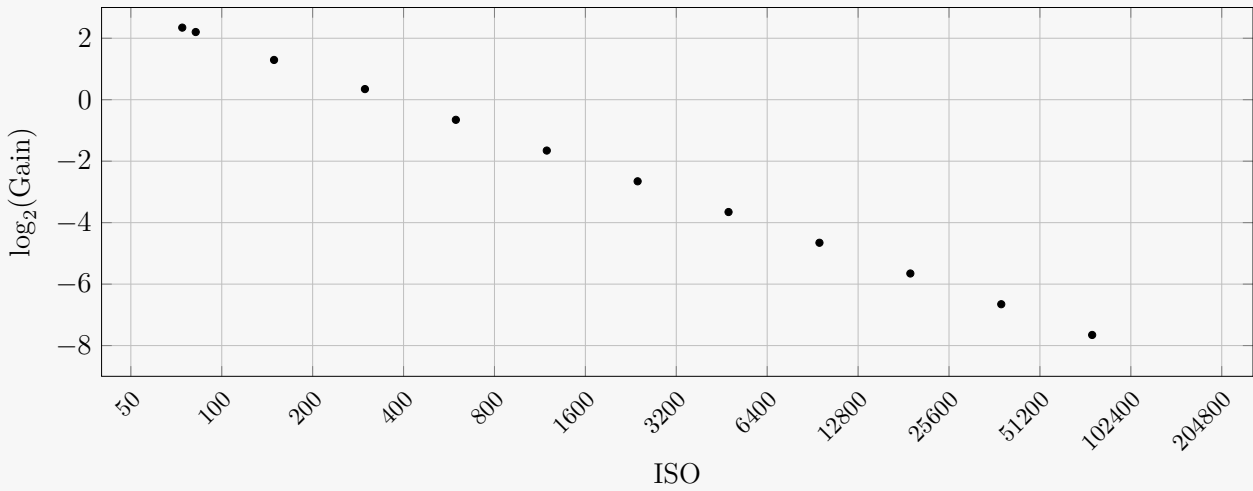
- **Fotónový šum** (*photon shot noise*) samotného žiarenia hviezdy je rozptyl  $\sigma_{\text{PN}}^2 = S$ , kde  $S$  je signál, teda počet zaznamenaných elektrónov  $e^-$ .
- **Tmavý šum** (*dark current noise*) je  $\sigma_{\text{DC}}^2 = n_{\text{px}} \cdot DC \cdot \tau$ , kde  $n_{\text{px}}$  je počet pixelov, z ktorých sa vyčítava informácia, a  $DC$  tmavý prúd (*dark current*) senzora, pre ktorý platí  $DC = 0,1 e^-/\text{pixel/s}$ .
- **Vyčítací šum** (*readout noise*) vzniká pri samotnom čítaní signálu z pixelu a jeho digitalizácii. Jeho hodnota v digitálnych jednotkách (DN) závisí od nastavenia ISO. Platí preň vzťah  $\sigma_{\text{RN}}^2 = n_{\text{px}} \cdot RN^2$ , kde  $RN$  je šum v elektrónoch, ktorý viete odčítať z priloženého grafu. Pre prevod z digitálnych jednotiek (DN) na elektróny ( $e^-$ ) použite konverzný zisk (Gain), ktorý takisto viete odčítať z priloženého grafu. Platí prevodový vzťah: Signál [ $e^-$ ] = Signál [DN] · Gain.
- **Šum pozadia oblohy** (*background sky noise*) sa rovná priamo počtu elektrónov, ktoré vznikajú ako dôsledok dopadu fotónov z oblohy na pixely, teda  $\sigma_{\text{sky}}^2 = S_{\text{sky}}$ .

#### Doplňujúce informácie:

- Hviezdu na fotke uvidíme, ak je pomer signálu k šumu (*Signal-to-Noise ratio*) rovný aspoň 3, teda  $S/N \geq 3$ .
  - Fotíme na citlivosti ISO 800.
  - Kvantová účinnosť celej aparatury na uvažovanej vlnovej dĺžke fotenia  $\lambda = 500 \text{ nm}$  je  $\eta = 60 \%$  ( $e^-/\text{fotón}$ ).
  - Šírka pásma, ktorú senzor prepúšťa, je  $\Delta\lambda = 100 \text{ nm}$ .
  - Referenčný svetelný tok  $\Phi_0$  pre nulovú plošnú magnitúdu ( $\mu_0 = 0 \text{ mag/arcsec}^2$ ) je rovný  $\Phi_0 = 10^4 \text{ fotónov cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ nm}^{-1}$ .
  - Kvôli seeingu sa efektívne bodová hviezda nezobrazí iba na jeden pixel. Predpokladajte, že obraz hviezdy bude rovnomerne „rozmazaný“ na 4 susedných pixeloch.
  - Celkový šum určíte ako  $N = \sqrt{\sigma_{\text{PN}}^2 + \sigma_{\text{DC}}^2 + \sigma_{\text{RN}}^2 + \sigma_{\text{sky}}^2}$ .
- (b) [5b] Vypočítajte plochu oblohy v  $\text{arcsec}^2$ , z ktorej sa zbiera šum oblohy.
- (c) [57b] Vypočítajte limitnú magnitúdu hviezd  $m$ , ktoré sme v uvažovanej časti oblohy schopní zachytiť fotografiou s dĺžkou expozície  $\tau$ .



Obr. T7.1: Graf závislosti  $\log_2(\text{DN})$  od nastavenia ISO. Zdroj: photonstophotos.net.



Obr. T7.2: Graf závislosti  $\log_2(\text{Gain})$  od nastavenia ISO. Zdroj: photonstophotos.net.

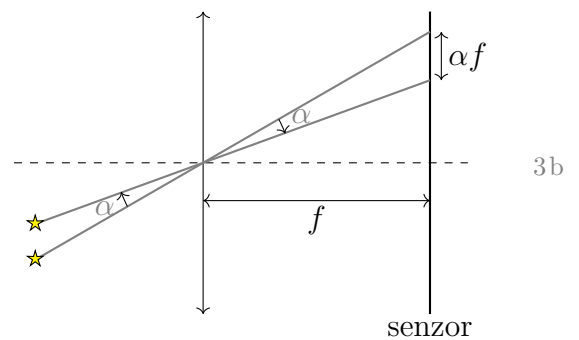
- (a) Naším cieľom je určiť rýchlosť  $v$ , ktorou sa obraz hviezdy pohybuje po senzore, pretože z toho potom vieme priamočiaro určiť čas, za ktorý prejde obraz hviezdy veľkosť strany pixela  $p$ .

Pixely sú štvorcové a na jeden pixel pripadá plocha  $ab/N_p$ , z čoho pre veľkosť strany štvorcového pixela máme

$$p = \sqrt{\frac{ab}{N_p}} \doteq 5,98 \mu\text{m}. \quad (\text{T7.1})$$

Uhlová rýchlosť, ktorou pozorujeme, že sa pohybujú hviezdy na oblohe s deklináciou  $\delta$ , je

$$\omega = \frac{2\pi}{t_{\oplus}} \cos \delta. \quad (\text{T7.2})$$



Obr. T7.3: Geometria pohybu hviezdy na oblohe a na senzore fotoaparátu. 3b

Pri zaostrení fotoaparátu na hviezdu je vzdialenosť šošovky a senzora rovná  $f$ . Keďže  $p \ll f$ , tak z obr. T7.3 vyplýva, že pri posune hviezdy na oblohe o uhol  $\alpha$  sa obraz na senzore posunie o vzdialenosť  $f\alpha$ . Dostávame tak vzťah pre čas

$$p = f\alpha = f\omega\tau \quad \implies \quad \tau = \frac{p}{\omega f} = \frac{p}{2\pi f \cos \delta} t_{\oplus} \doteq \boxed{1,9 \text{ s}}. \quad (\text{T7.3}) \quad 5b$$

- (b) Z podúlohy (a) vieme, že uhlový rozmer jedného pixelu na oblohe je  $\alpha$ . Plocha jedného pixelu na oblohe tak bude  $\Omega_{\text{px}} = \alpha^2$ . Keďže uvažujeme, že sa hviezda rozmaže na  $n_{\text{px}} = 4$  pixely, tak celková plocha oblohy, z ktorej zbierame šum je

$$\Omega = n_{\text{px}}\alpha^2 = n_{\text{px}}\left(\frac{p}{f}\right)^2 \doteq 5,722 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^2 \doteq \boxed{2434 \text{ arcsec}^2}. \quad (\text{T7.4}) \quad 5b$$

- (c) Hoci to tak na prvý pohľad možno nevyzerá, úloha je celkom priamočiara – vypočítať hodnoty jednotlivých šumov a potom z podmienky  $S/N \geq 3$  určiť limitný tok, ktorý už považujeme za postačujúcu podmienku na odfoťenie hviezdy. Následne z Pogsonovej rovnice podľa referenčného toku vypočítame, aká magnitúda tomuto toku prislúcha.

Vypočítajme najprv hodnoty jednotlivých šumov:

**Fotónový šum** určíme priamo zo zadania  $\sigma_{\text{PN}}^2 = S$ .

**Tmavý šum** vypočítame zo zadaného vzorca  $\sigma_{\text{DC}}^2 = n_{\text{px}} \cdot DC \cdot \tau \doteq 0,756 e^-$ .

**Vyčítací šum** vypočítame podľa zadaného vzorca  $\sigma_{\text{RN}}^2 = n_{\text{px}} \cdot RN^2$ , kde  $RN$  vyčítame z priložených grafov. Z grafu T7.2 lineárnou regresiou určíme, že pre ISO 800 máme  $\log_2(\text{Gain}) = -1$ , z čoho  $\text{Gain} = 0,5$ . Obdobne z grafu T7.1 je  $\log_2(\text{Signál [DN]}) = 1,33$ , a teda  $\text{Signál [DN]} \doteq 2,51$ . Preto  $RN = \text{Gain} \cdot \text{Signál [DN]} \doteq 1,26$  a  $\sigma_{\text{RN}}^2 \doteq 6,35 e^-$ . 7b

**Šum pozadia oblohy** určíme priamo ako počet fotónov dopadajúcich do fotoaparátu. Tok fotónov  $\Phi_{1,1}$  z jednej uhlovej štvorcovej sekundy oblohy určíme z Pogsonovej rovnice

$$\mu_1 - \mu_0 = -2,5 \log\left(\frac{\Phi_{1,1}}{\Phi_0}\right), \quad (\text{T7.5}) \quad 7b$$

z čoho po úpravách

$$\Phi_{1,1} = \Phi_0 \cdot 10^{0,4(\mu_0 - \mu_1)} \doteq 1,58 \cdot 10^{-5} \text{ fotónov cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ nm}^{-1}. \quad (\text{T7.6}) \quad 4b$$

V podúlohe (b) sme vypočítali plochu oblohy  $\Omega$ , z ktorej fotoaparát zachytáva šum z pozadia oblohy. Tok týchto fotónov je

$$\Phi_1 = \Omega \Phi_{1,1} = 3,86 \cdot 10^{-2} \text{ fotónov cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ nm}^{-1}. \quad (\text{T7.7}) \quad 5b$$

Ostáva už len urobiť prevod toku fotónov na reálny signál v elektrónoch. Jednotka toku  $\Phi_1$  nám napovedá, ako presne to urobíme. Započítaním kvantovej účinnosti, ktorá má jednotku  $e^-/\text{fotón}$ , tak získame už priamo signál v elektrónoch

$$S_{\text{sky}} = \Phi_1 \cdot \eta \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \tau \cdot \Delta\lambda, \quad (\text{T7.8}) \quad 8b$$

kde  $D$  je priemer vstupnej pupily<sup>1</sup>. Ten určíme zo svetelnosti objektívu ako

$$1.8 = f/D \quad \Rightarrow \quad D = f/1.8 = 27,8 \text{ mm}. \quad (\text{T7.9}) \quad 3b$$

Dosadením do rovnice (T7.8) dostaneme  $S_{\text{sky}} \doteq 26,55e^-$ . 3b

Teraz už len ostáva všetko dosadiť do rovnice pre  $S/N$ .

$$3 = \frac{S}{\sqrt{S + S_{\text{sky}} + \sigma_{\text{RN}}^2 + \sigma_{\text{DC}}^2}} := \frac{S}{\sqrt{S + \Sigma}}, \quad (\text{T7.10}) \quad 3b$$

kde pre prehľadnosť výpočtov  $\Sigma \doteq 33,66 e^-$  je súčet rozptylov šumov, ktorých hodnoty už poznáme. Úpravami dostaneme kvadratickú rovnicu

$$S^2 - 9S - 9\Sigma = 0, \quad (\text{T7.11})$$

ktorej riešením je kladný koreň

$$S = \frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9\Sigma} \doteq 22,45e^-. \quad (\text{T7.12}) \quad 5b$$

Podobným spôsobom, akým sme počítali tok fotónov z oblohy, teraz vypočítame limitnú magnitúdu hviezdy. Pre tok fotónov hviezdy, ktorý sme zachytili, platí

$$\Phi_2 = \frac{S}{\eta \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \tau \cdot \Delta\lambda} \doteq 3,261 \cdot 10^{-2} \text{ fotónov cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ nm}^{-1}. \quad (\text{T7.13}) \quad 5b$$

Dosadením do Pogsonovej rovnice získame

$$m_2 = m_0 - 2,5 \log\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right) \doteq \boxed{13,7 \text{ mag}}. \quad (\text{T7.14}) \quad 4b$$

<sup>1</sup>Pozor, ide o inú vec ako priemer objektívu – fotoaparát má pevne daný priemer objektívu, ktorý sa nedá meniť, ale naopak môžete meniť tzv. clonu. Vstupná pupila je teda otvor, ktorý pozorujete pri pohľade spredu na objektív pri privretej clone.

## T8 Pohyb hviezd

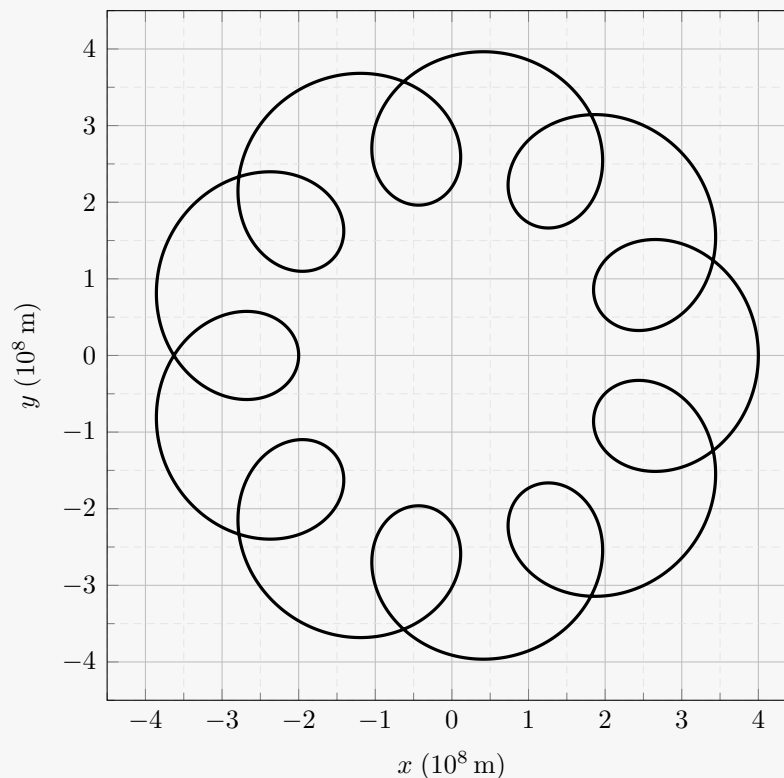
(80b, autor: Tomáš Kubrický)

Väčšina exoplanét sa v súčasnosti objavuje nepriamo, napríklad sledovaním poklesu jasnosti hviezd pri tranzite planéty alebo meraním zmien jej radiálnej rýchlosti. Ďalšou, na presnosť prístrojov však extrémne náročnou metódou je astrometria, teda priame pozorovanie pohybu centrálnej hviezd v dôsledku gravitačného vplyvu planét obiehajúcich okolo nej.

Uvažujme hviezdnu sústavu, v ktorej okolo materskej hviezd obiehajú po kruhových dráhach dve planéty v rovine kolmej na zorný lúč. Pre jednoduchosť tieto planéty ďalej označme ako  $A$  a  $B$  tak, aby polomer dráhy planéty  $A$  bol väčší ako polomer dráhy planéty  $B$ .

Na priloženom obrázku je znázornená trajektória stredu materskej hviezd (po odčítaní jej vlastného, paralaktického a aberačného pohybu), pričom vieme, že stred hviezd opíše celú túto trajektóriu za čas  $t = 10$  rokov a potom sa pohyb po trajektórii periodicky opakuje. Ďalej predpokladajme, že hmotnosti oboch planét sú zanedbateľne malé v porovnaní s hmotnosťou hviezd, a tak môžeme aj gravitačný vplyv planét na seba navzájom zanedbať.

- (a) [40b] Na základe obrázka a zadaných údajov určte siderické obežné periódy  $T_A, T_B$  oboch planét.
- (b) [40b] Nezávislým pozorovaním planéty  $A$  sme zistili, že polomer jej dráhy je  $r_A = 5,5$  au. Na základe tejto hodnoty, predošlých údajov a meraní z priloženého obrázka určte hmotnosť hviezd  $M$  a hmotnosti oboch planét  $m_A, m_B$ .



Obr. T8.1: Trajektória stredu materskej hviezd.

- (a) Zamyslime sa najprv nad tým, ako by vyzerala trajektória stredú hviezdy, ak by šlo o hviezdnu sústavu len s jednou planétou, ktorá by okolo svojej materskej hviezdy obiehalo po kruhovej dráhe v rovine kolmej na zorný lúč. V takom prípade by planéta aj hviezda obiehalo po kruhových dráhach okolo svojho spoločného ťažiska, takže trajektória stredú hviezdy by mala tvar kružnice.

Na určenie hmotnosti hviezdy a planéty by sme potom potrebovali už len obežnú dobu planéty a polomer kružnice, ktorú počas svojho pohybu vykresluje stred hviezdy, keďže z 3. Keplerovho zákona a z definície ťažiska (teda z rovnosti súčinu hmotnosti a vzdialenosti od ťažiska pre planétu a hviezdu) by sme potom dostali sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi, ktorú by nám stačilo vyriešiť.

Vráťme sa teraz k situácii zo zadania, teda k hviezdnej sústave s dvomi planétami. Z obrázka vidíme, že trajektória stredú hviezdy už teraz nemá iba jednoduchý tvar kružnice, ale vytvára rôzne slučky, ktoré sa napokon po čase  $t$  uzavrujú. Vďaka predpokladom  $m_A, m_B \ll M$  sa však na túto situáciu vieme pozeráť tak, že každá planéta svojim gravitačným vplyvom spôsobuje pohyb stredú hviezdy po trajektórii tvaru kružnice a že výsledný tvar trajektórie stredú hviezdy je jednoducho súčtom (alebo tzv. superpozíciou) týchto dvoch efektov. Geometricky si vieme takýto pohyb predstaviť tak, že máme väčšiu kružnicu, po ktorej sa pohybuje myslený bod, a súčasne menšiu kružnicu so stredom v tomto pohybujúcom sa bode, po ktorej obieha druhý bod, zodpovedajúci práve polohe stredú hviezdy. Myšlienku takéhoto pohybu vieme potvrdiť aj opätovným analyzovaním trajektórie stredú hviezdy. Jednotlivé slučky totiž zdanlivo obiehajú po väčšej kružnici (gravitačný vplyv jednej planéty), pričom samotné slučky vznikajú v dôsledku obiehania po menšej kružnici s vyššou uhlovou rýchlosťou (gravitačný vplyv druhej planéty). 10b

Keďže stred hviezdy vykoná za jeden obchod po veľkej kružnici viacero obchodov po malej kružnici (trajektória obsahuje viacero slučiek), tak obežná perióda planéty, ktorá spôsobuje obchod po veľkej kružnici, je určite väčšia ako obežná perióda planéty, ktorá spôsobuje obchod po malej kružnici. Z 3. Keplerovho zákona zároveň vieme, že pri zanedbaní hmotností planét voči hmotnosti hviezdy s rastúcou veľkou polosou rastie aj perióda planéty. Planéta spôsobujúca obchod po veľkej kružnici je preto určite vzdialenejšia planéta, teda planéta  $A$ . Zo zadania tiež vieme, že stred hviezdy opíše celú túto trajektóriu za čas  $t = 10$  rokov. Tento čas je ale zjavne určený priamo periódou obchodu po veľkej kružnici, teda periódou planéty  $A$ , ktorá je tak  $T_A = 10$  rokov. 3b

Na určenie obežnej periódy planéty  $B$  bude užitočné spočítať z obrázka počet vykonaných slučiek trajektórie stredú hviezdy, ktorý je rovný  $N = 9$ . Odtiaľto je ľahké unáhle dospieť k záveru, že keď za jednu periódu planéty  $A$  vykoná stred hviezdy  $N$  slučiek, tak každá slučka zodpovedá jednému obchodu planéty  $B$  okolo svojej materskej hviezdy. Perióda planéty  $B$  by potom bola  $N$ -krát nižšia ako perióda planéty  $A$ , takže by platilo  $T_B = \frac{T_A}{N} = \frac{10}{9}$  rokov. 3b

Keď sa však bližšie zamyslíme nad dôvodom vzniku jednotlivých slučiek, tak zistíme, že predošlý argument je nesprávny. Vo vnútornom „vrchole“ každej slučky totiž dochádza k tomu,

že efekty gravitačného vplyvu oboch planét sa „odčítavajú“ (ide o body trajektórie, ktoré sa nachádzajú najbližšie k počiatku súradnicovej sústavy). To nastáva v okamihu, keď sa obe planéty nachádzajú na spoločnej priamke s ich materskou hviezdou, no na opačných stranách od nej. Každá slučka tak v skutočnosti prislúcha synodickej obežnej perióde planéty  $B$  voči planéte  $A$ . 8b

Teraz je ešte potrebné rozmyslieť si z obrázka, že obe planéty obiehajú v rovnakom smere. Ak si totiž vyberieme ľubovoľný z dvoch možných smerov obehu po veľkej kružnici, tak v tom istom smere dochádza aj k obehu po malej kružnici pri vykresľovaní slučiek, pričom každá planéta obieha okolo materskej hviezdy v tom istom smere, v akom sa vplyvom jej gravitačného vplyvu pohybuje hviezda. 3b

Označme teraz uhlové rýchlosti obehu planét okolo svojej materskej hviezdy ako  $\omega_A, \omega_B$ . Keďže  $T_A > T_B$ , tak  $\omega_A < \omega_B$ , takže vnútorná planéta  $B$  „predbieha“ vonkajšiu planétu  $A$ . Z toho, že  $T_A = t$  a že synodická perióda planéty  $B$  je  $\frac{t}{N}$ , dostávame potom rovnice

$$t = \frac{2\pi}{\omega_A}, \quad (\text{T8.1})$$

$$\frac{t}{N} = \frac{2\pi}{\omega_B - \omega_A}. \quad (\text{T8.2}) \quad 4b$$

Po vzájomnom vydelení týchto rovníc dostaneme

$$N = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_A}, \quad (\text{T8.3})$$

odkiaľ po úprave máme

$$\omega_B = (N + 1)\omega_A. \quad (\text{T8.4})$$

Skutočná siderická perióda planéty  $B$  je teda

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi}{(N + 1)\omega_A} = \frac{t}{N + 1} = \frac{10 \text{ rokov}}{9 + 1} = \boxed{1 \text{ rok}}. \quad (\text{T8.5}) \quad 6b$$

- (b) Označme  $r_A, r_B$  polomery dráh oboch planét a  $r'_A, r'_B$  príslušné polomery kružníc, po ktorých sa v dôsledku gravitačného vplyvu planét stred hviezdy pohybuje. Vďaka predpokladom  $m_A, m_B \ll M$  môžeme potom pre planétu  $A$  napísať 3. Keplerov zákon v tvare

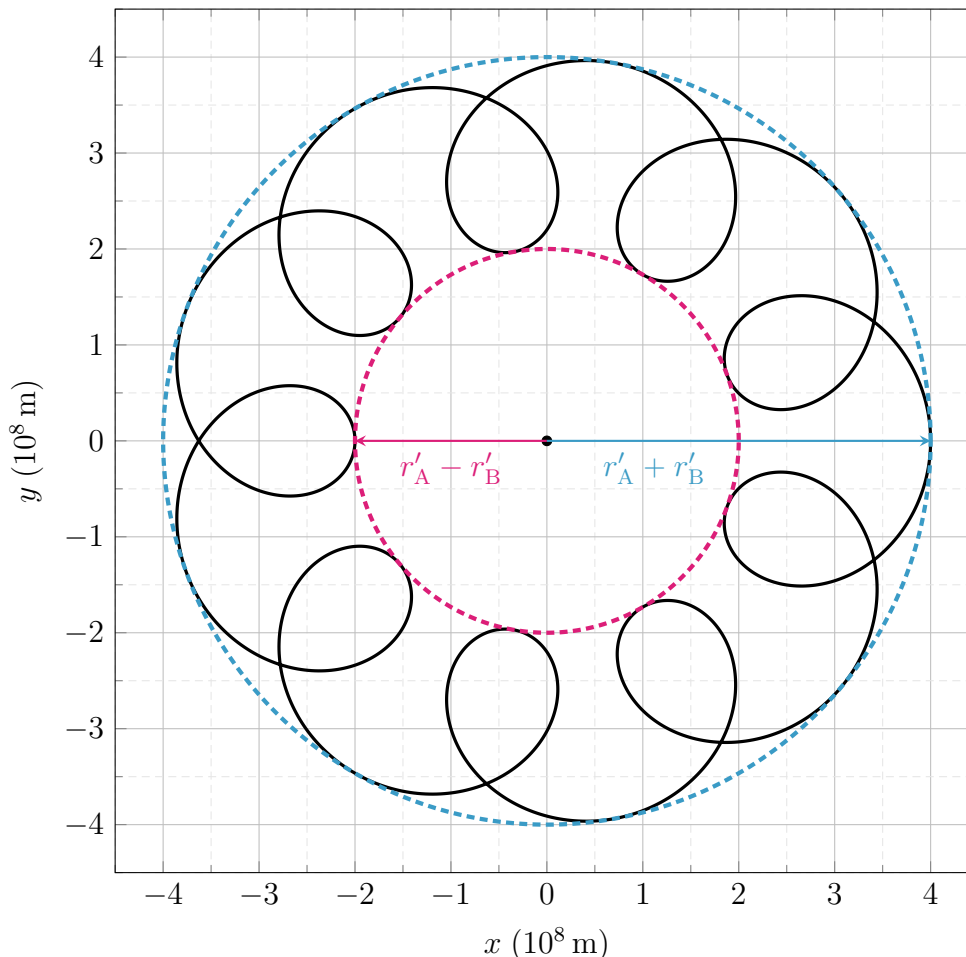
$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (\text{T8.6}) \quad 3b$$

kde hodnotu  $r_A$  poznáme zo zadania a hodnotu  $T_A$  sme určili v podúlohe (a), takže hmotnosť hviezdy vieme jednoducho vyjadriť a vyčísliť ako

$$M = \frac{4\pi^2 r_A^3}{GT_A^2} \doteq \boxed{3,3 \cdot 10^{30} \text{ kg} \doteq 1,7 m_\odot}, \quad (\text{T8.7}) \quad 2b$$

Podme teraz z obrázka zistiť polomery  $r'_A, r'_B$ . Podobne ako pri zdôvodnení toho, že každá 5b  
 slučka zodpovedá synodickej perióde planéty  $B$ , sa nám aj teraz oplatí pozrieť na nejaké vý-  
 značné body trajektórie stredy hviezdy, a to konkrétne na body s najmenšou, respektíve naj-  
 väčšou vzdialenosťou od počiatku súradnicovej sústavy. Tieto body totiž zodpovedajú tomu,  
 že gravitačné vplyvy oboch planét sa navzájom akurát „odčítavajú“, respektíve „sčítavajú“.  
 Tie najvzdialenejšie body trajektórie sú teda od počiatku súradnicovej sústavy vzdialené  
 $r'_A + r'_B$ , zatiaľ čo tie najbližšie body sú od stredy vzdialené  $r'_A - r'_B$ . 8b

Inak povedané, trajektóriu stredy hviezdy vieme ohraničiť sústrednými kružnicami so stredom 4b  
 v počiatku súradnicovej sústavy a s polomermi  $r'_A + r'_B$  a  $r'_A - r'_B$  (obr. T8.2), pričom práve  
 dotykové body týchto kružníc s trajektóriou stredy hviezdy sú význačné body, ktoré nám  
 pomôžu určiť tieto polomery. Jeden z význačných bodov na vonkajšej kružnici totiž leží na  
 kladnej  $x$ -ovej polosi práve na súradnici  $x = 4 \cdot 10^8$  m a na zápornej  $x$ -ovej polosi leží naopak  
 jeden z význačných bodov trajektórie na vnútornej kružnici práve na súradnici  $x = -2 \cdot 10^8$  m.



Obr. T8.2: Modrá a ružová kružnica ohraničujú trajektóriu stredy hviezdy zvonka a zvnútra, pričom ich polomery vieme odčítať z vyznačených bodov na  $x$ -ovej osi.

Pre polomery  $r'_A, r'_B$  teda platia rovnosti

$$r'_A + r'_B = 4 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad (\text{T8.8})$$

$$r'_A - r'_B = 2 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad (\text{T8.9})$$

ktorých vzájomným sčítaním dostávame  $2r'_A = 6 \cdot 10^8 \text{ m}$ , teda  $r'_A = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$ , a ktorých vzájomným odčítaním dostaneme zase  $2r'_B = 2 \cdot 10^8 \text{ m}$ , odkiaľ  $r'_B = 1 \cdot 10^8 \text{ m}$ . 4b

Keď už teraz poznáme polomery kružníc, po ktorých sa hviezda pohybuje vplyvom gravitačného pôsobenia oboch planét, tak ich vieme dať do vzťahu s hmotnosťami a polomermi dráh jednotlivých planét pomocou definície ťažiska

$$Mr'_A = m_A r_A, \quad (\text{T8.10})$$

$$Mr'_B = m_B r_B. \quad (\text{T8.11}) \quad 5b$$

Keďže už poznáme hmotnosť hviezdy aj polomer dráhy planéty  $A$ , tak z rovnice (T8.10) vieme vyjadriť hmotnosť planéty  $A$  ako

$$m_A = \frac{Mr'_A}{r_A} \doteq \boxed{1,2 \cdot 10^{27} \text{ kg}}. \quad (\text{T8.12}) \quad 2b$$

Na určenie hmotnosti planéty  $B$  nám treba zistiť ešte polomer jej dráhy, ktorý určíme podobne opäť z 3. Keplerovho zákona v zjednodušenom tvare

$$\frac{T_B^2}{r_B^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (\text{T8.13}) \quad 3b$$

odkiaľ

$$r_B = \sqrt[3]{\frac{GMT_B^2}{4\pi^2}} \approx 1,8 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 1,2 \text{ au}. \quad (\text{T8.14}) \quad 2b$$

Teraz už máme všetko potrebné na vyjadrenie hmotnosti planéty  $B$  z rovnice (T8.11), čím dostaneme

$$m_B = \frac{Mr'_B}{r_B} \doteq \boxed{1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}}. \quad (\text{T8.15}) \quad 2b$$

*Poznámka: Výsledná trajektória stredu hviezdy, ktorá je superpozíciou dvoch súhlasných pohybov po kružnici s rozdielnymi polomermi a uhlovými rýchlosťami, je v geometrii známa ako epitrochoida. Ak by ale jedna z planét obiehala v opačnom smere, tak by slučky nesmerovali dovnútra, ale von, a šlo by o tzv. hypotrochoidu. Obe tieto krivky patria do širšej matematickej rodiny tzv. ruliet (kriviek, ktoré vznikajú odvalovaním jednej krivky po druhej). Ako zaujímavosť môžeme uviesť, že s rovnakým typom trajektórie sa vo vesmíre stretávame úplne bežne. Pri predpoklade kruhových dráh vykonávajú presne takýto zložený pohyb napríklad mesiace planét vo vzťažnej sústave spojenej s materskou hviezdou. Rovnaký princíp platí aj pre zdanlivý pohyb iných planét pri pohľade zo Zeme. Vizualným prejavom toho je napríklad retrográdny pohyb Marsu, ktorý zodpovedá práve slučke epitrochoidy, ktorú Mars na oblohe pri pohľade zo Zeme približne opisuje.*

**T9 MIThenge**

(90b, autor: Patrik Prítrský)

Na americkej univerzite MIT sa nachádza dlhá hlavná chodba – *the Infinite Corridor*. Niekoľkokrát za rok sa stane, že sa Slnko na oblohe dostane presne do takej polohy, že presvieti cez presklené dvere a cez celú chodbu. Keďže je výhľad z východnej časti blokovaný inou budovou, tak tento úkaz nastáva iba pri západoch Slnka.

Pri pohľade z východného konca chodby sa stred jej západného konca nachádza na azimute  $A = 245,81^\circ$  (azimut je meraný od severu smerom na východ). Dĺžka chodby je  $l = 250$  m, výška je  $h = 4$  m a šírka  $w = 2,75$  m. Súradnice MIT sú  $\phi = 42,36^\circ$  N a  $\lambda = 71,09^\circ$  W. Uvažujte pozorovateľa s výškou  $h_p = 2$  m stojaceho v strede východného konca chodby.

V tejto úlohe zanedbajte atmosférickú refrakciu pri horizonte, excentricitu zemskej orbity a vplyv inklinácie zemskej osi na časovú rovnicu. Predpokladajte, že deklinácia Slnka sa počas dňa nemení.

- [5b] Vypočítajte uhlové rozmery západného konca chodby pre tohto pozorovateľa.
- [25b] Odvodte rovnicu závislosti deklinácie Slnka od dňa roka.
- [25b] Zistite, pre akú deklináciu bude Slnko zapadať na azimute  $A$ .
- [35b] Pomocou týchto vzťahov a hodnôt zistite, kedy nastane najbližší MIThenge, teda dátum, kedy má Slnko deklináciu určenú v podzadaní (c). Ďalej zistite čas, kedy v daný deň nastane západ Slnka. Bude sa vám hodiť vedieť, že jarná rovnodennosť nastala 20. marca 2026 a že sa MIT nachádza v časovom pásme EST, teda UTC-5.

- (a) Na toto podzadanie nám stačí obyčajná planárna trigonometria;

5b

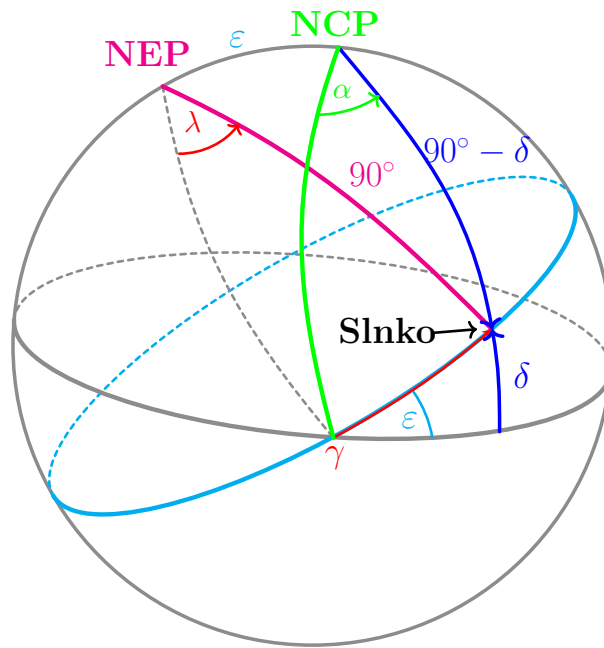
$$\text{uhlová výška: } \alpha_h = 2 \arctan\left(\frac{h/2}{l}\right) = \boxed{0,92^\circ}, \quad (\text{T9.1})$$

$$\text{uhlová šírka: } \alpha_w = 2 \arctan\left(\frac{w/2}{l}\right) = \boxed{0,63^\circ}. \quad (\text{T9.2})$$

- (b) Na túto časť použijeme sférickú trigonometriu podľa nákresu na obr. T9.1. Vrcholy použitého sférického trojuholníka sú severný svetový pól (NCP), severný ekliptikálny pól (NEP) a Slnko. Veľkosti strán sú viditeľné na obrázku T9.1.

Nech  $\lambda$  je ekliptikálna dĺžka Slnka (uhlová vzdialenosť od jarného bodu). Keďže nultý poludník ekliptikálnych súradníc prechádza jarným bodom, uhol pri vrchole NEP v našom trojuholníku je  $A = 90^\circ - \lambda$ . Dosadíme do kosínusovej vety pre sférický trojuholník

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A). \quad (\text{T9.3})$$



Obr. T9.1: Sférický trojuholník pre výpočet deklinácie Slnka. Vrcholy tvoria severný svetový pól (NCP), severný ekliptikálny pól (NEP) a samotné Slnko.

Po dosadení hodnôt ( $a = 90^\circ - \delta$ ,  $b = 90^\circ$ ,  $c = \varepsilon$ ,  $A = 90^\circ - \lambda$ ) dostaneme

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ) \cos(\varepsilon) + \sin(90^\circ) \sin(\varepsilon) \cos(90^\circ - \lambda). \quad (\text{T9.4}) \quad 10b$$

Výraz postupne upravíme s využitím goniometrických identít  $\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$ ,  $\cos(90^\circ) = 0$  a  $\sin(90^\circ) = 1$

$$\sin(\delta) = 0 \cdot \cos(\varepsilon) + 1 \cdot \sin(\varepsilon) \sin(\lambda), \quad (\text{T9.5})$$

$$\sin(\delta) = \sin(\varepsilon) \sin(\lambda). \quad (\text{T9.6})$$

Nakoniec vyjadríme výsledný vzťah pre deklináciu

$$\delta = \arcsin(\sin(\varepsilon) \sin(\lambda)). \quad (\text{T9.7}) \quad 5b$$

Keďže v zadaní je uvedené, aby sme zanedbali excentricitu zemskej orbity, uvažujeme, že Slnko sa z nášho pohľadu pohybuje po ekliptike konštantnou uhlovou rýchlosťou. Ekliptikálnu dĺžku  $\lambda$  tak vieme vyjadriť ako lineárnu funkciu času

$$\lambda = \frac{360^\circ}{365,25} (N - N_V), \quad (\text{T9.8}) \quad 5b$$

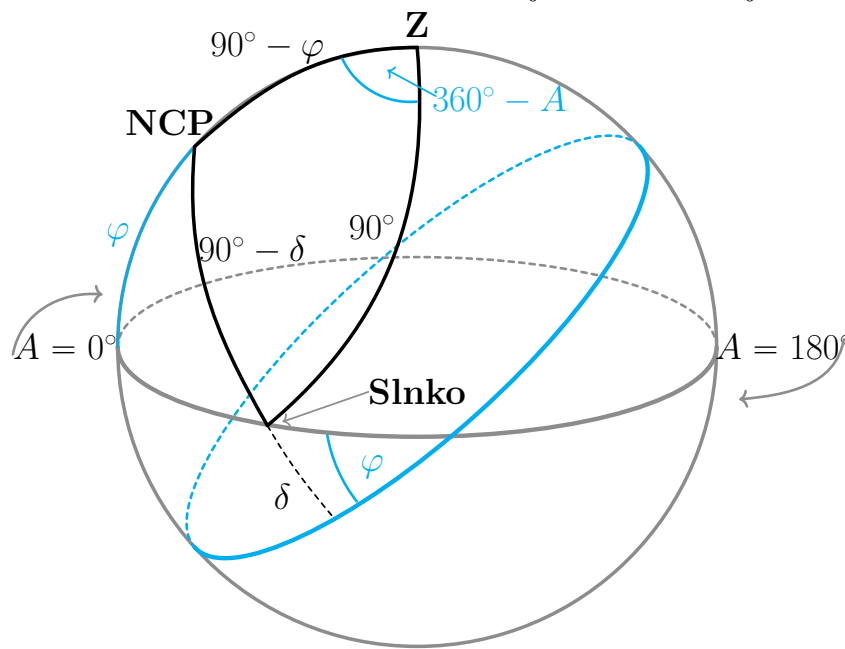
kde  $N$  je číslo dňa v roku a  $N_V$  je deň jarnej rovnodennosti (kedy  $\lambda = 0^\circ$ ).

Dosadením tohto vzťahu späť dostávame výslednú rovnicu

$$\delta = \left[ \arcsin \left[ \sin(\varepsilon) \cdot \sin \left( \frac{360^\circ}{365,25} (N - N_V) \right) \right] \right]. \quad (\text{T9.9}) \quad 5b$$

- (c) Nakreslíme si ďalší sférický trojuholník. Tu si musíme dať pozor na to, že sférické trojuholníky sa skladajú iba z hlavných kružníc (preto nemôžeme ako stranu použiť deklinačnú rovnobežku Slnka).

Použijeme nautický sférický trojuholník na obr. T9.2, ktorého vrcholy sú severný svetový pól (NCP), zenit a Slnko na horizonte. Veľkosti strán trojuholníka sú zrejmé z obr. T9.2.



Obr. T9.2: Nautický sférický trojuholník pri západe Slnka. Strany spájajú severný svetový pól, zenit a Slnko na horizonte.

Pre tento sférický trojuholník môžeme použiť sférickú kosínusovú vetu pre stranu  $90^\circ - \delta$

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ) \cos(360^\circ - A). \quad (\text{T9.10}) \quad 15b$$

Vieme, že  $\cos(90^\circ) = 0$ ,  $\sin(90^\circ) = 1$  a  $\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$ . Rovnicu teda môžeme prepísať do zjednodušeného tvaru

$$\sin(\delta) = \cos(\phi) \cdot \cos(A). \quad (\text{T9.11}) \quad 5b$$

Z toho si jednoducho vyjadríme sínus deklinácie  $\delta$ . Dosadíme hodnoty pre MIT ( $\phi = 42,36^\circ$ ) a azimut stredovej osi chodby ( $A = 245,81^\circ$ )

$$\sin(\delta) = \cos(42,36^\circ) \cdot \cos(245,81^\circ) \approx 0,7389 \cdot (-0,4097) \approx -0,3027, \quad (\text{T9.12})$$

$$\delta = \arcsin(-0,3027) \approx \boxed{-17,62^\circ}. \quad (\text{T9.13}) \quad 5b$$

(d) Z predošlej časti vieme, že deklinácia by mala byť  $\delta = -17,62^\circ$ . Pre výpočet dátumov vyjadrieme ekliptikálnu dĺžku  $\lambda$  zo vzťahu, ktorý sme odvodili v časti (b)

$$\sin(\lambda) = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\varepsilon)}. \quad (\text{T9.14}) \quad 5b$$

Po dosadení dostávame

$$\sin(\lambda) = \frac{\sin(-17,62^\circ)}{\sin(23,44^\circ)} \approx \frac{-0,3027}{0,3978} \approx -0,7609, \quad (\text{T9.15})$$

pričom tento sínus zodpovedá dvom uhlom na ekliptike:

5b

- $\lambda_1 \approx 360^\circ - 49,54^\circ = 310,46^\circ$ ,
- $\lambda_2 \approx 180^\circ + 49,54^\circ = 229,54^\circ$ .

Pomocou rovnice z časti (b) vieme zistiť, koľko dní po jarnej rovnodennosti sa bude slnko nachádzať na daných ekliptikálnych dĺžkach

$$\Delta N = \lambda \frac{365,25}{360^\circ}. \quad (\text{T9.16})$$

Pre  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  dostávame hodnoty:  $\Delta N_1 \approx 315$  a  $\Delta N_2 \approx 233$ .

Vidíme, že skôr nastane  $\lambda_2$ , a vieme dopočítať, že to bude **8. novembra 2026**.

5b

Následne pre výpočet času západu Slnka určíme hodinový uhol  $H$ . Využijeme nautický trojuholník z predošlej časti. Hodinový uhol  $H$  zodpovedá v tomto trojuholníku uhlu pri severnom svetovom póle. Použijeme sférickú kosínusovú vetu pre stranu medzi zenitom a Slnkom (ktorej dĺžka je pri západe  $90^\circ$ )

$$\cos(90^\circ) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos(H). \quad (\text{T9.17})$$

Keďže  $\cos(90^\circ) = 0$ ,  $\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$  a  $\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$ , rovnicu upravíme do tvaru

$$0 = \sin(\phi) \sin(\delta) + \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(H). \quad (\text{T9.18})$$

Z toho priamo vyplýva známy vzťah pre hodinový uhol pri západe

$$\cos(H) = -\frac{\sin(\phi) \sin(\delta)}{\cos(\phi) \cos(\delta)} = -\tan(\phi) \tan(\delta). \quad (\text{T9.19}) \quad 5b$$

odkiaľ po dosadení dostaneme

$$\cos(H) = -\tan(42,36^\circ) \tan(-17,62^\circ) \approx -(0,9119)(-0,3176) \approx 0,2896, \quad (\text{T9.20})$$

$$H \approx 73,16^\circ. \quad (\text{T9.21})$$

Keďže Zem rotuje rýchlosťou  $15,00^\circ = \frac{360^\circ}{24\text{h}}$  za hodinu, čas uplynutý od pravého slnečného poludnia je

$$t_H = \frac{73,16^\circ}{15^\circ/\text{h}} \approx 4,877 \text{ h} \approx 4 \text{ h } 52 \text{ min } 38 \text{ s}. \quad (\text{T9.22}) \quad 5b$$

Pravé slnečné poludnie na MIT však nenastáva presne o 12:00, pretože univerzita neleží na centrálnom poludníku svojho časového pásma. Pásmo EST (UTC-5) má referenčný poludník  $75^\circ \text{ W}$ . Keďže MIT leží na  $\lambda_{\text{MIT}} = 71,09^\circ \text{ W}$ , nachádza sa o  $3,91^\circ$  východnejšie. Slnko tam teda kulminuje skôr o  $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{3,91^\circ}{15^\circ/\text{h}} \approx 0,2607 \text{ h} \approx 15 \text{ min } 38 \text{ s}. \quad (\text{T9.23}) \quad 5b$$

Takže pravé slnečné poludnie nastane o  $12 : 00 : 00 - 00 : 15 : 38 = 11:44:22 \text{ EST}$ .

Výsledný čas západu Slnka v tento deň je teda

$$t_{\text{západ}} = 11 : 44 : 22 + 4 : 52 : 38 = \boxed{16:37:00 \text{ EST}}. \quad (\text{T9.24}) \quad 5b$$

*Poznámka: Ak sa pozrieme na presné predpovede na stránke MIT, tak zistíme, že sa náš výpočet sekol o približne 3 dni. To je spôsobené viacerými faktormi, ktoré sme v zadaní pre jednoduchosť zanedbali (najmä ohyb svetla v atmosfére, excentricita zemskej orbity, či nepresnosti s uvažovaním, že slnko bude na horizonte). Detailné informácie, merania a presné predpovede viete nájsť na <https://web.mit.edu/planning/www/mithenge.html>.*

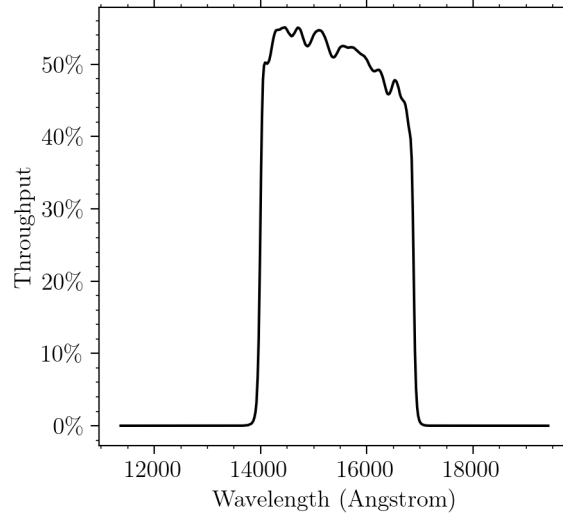
## **T10** Kozmologická supernova

(90b, autor: Radovan Lascsák)

30. decembra 2010 Hubblov vesmírny ďalekohľad (HST) objavil v súhvezdí Veľryba jednu z najvzdialenejších supernov. Táto supernova bola označená ako SN UDS10Wil a jej červený posun bol určený na väčší ako 1, konkrétne  $z = 1,91$ . Pri takto vysokých červených posunoch už neplatí Hubblov–Lemaîtreov zákon, ktorý je iba aproximáciou pre blízky vesmír.

- (a) [15b] Jeden z filtrov, cez ktorý HST pozoroval, bol infračervený filter F160W. Graf závislosti jeho priepustnosti od vlnovej dĺžky je zobrazený na obrázku T10.1 nižšie. Pod priepustnosťou rozumieme pomer množstva svetla, ktoré prejde cez filter, k celkovému množstvu dopadajúceho svetla, vyjadrený v percentách. Z grafu odčítajte interval

$\mathbb{F}_0 = (\lambda_{\min,0}, \lambda_{\max,0})$  vlnových dĺžok, ktoré filter prepúšťa, a odhadnite jeho priemernú priepustnosť  $\eta$  v percentách. Takisto odhadnite neistotu  $\lambda_{\min,0}$ ,  $\lambda_{\max,0}$  a  $\eta$ .



Obr. T10.1: Graf závislosti priepustnosti (*throughput*) vo filteri F160W od vlnovej dĺžky (*wavelength*). Jeden angstrom ( $\text{\AA}$ ) je rovný  $0,1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$ . Zdroj: Hubble Space Telescope User Documentation.

- (b) [10 b] Pri pozorovaní HST vo filteri F160W supernova najjasnejšie zasvietila so zdanlivou magnitúdou  $m'_{\mathbb{F}_0} = 26,9 \text{ mag}$ . Túto magnitúdu opravte o priemernú priepustnosť filtra, ktorú ste stanovili v (a). Inými slovami, určte reálnu zdanlivú magnitúdu  $m_{\mathbb{F}_0}$  supernovy pri pozorovaní v oblasti vlnových dĺžok v intervale  $\mathbb{F}_0$ . Neistotu  $m_{\mathbb{F}_0}$  neurčujte.

Označenie	Stred filtra	Šírka filtra
U	3650 $\text{\AA}$	660 $\text{\AA}$
B	4450 $\text{\AA}$	940 $\text{\AA}$
V	5510 $\text{\AA}$	880 $\text{\AA}$
R	6580 $\text{\AA}$	1380 $\text{\AA}$
I	8060 $\text{\AA}$	1490 $\text{\AA}$

Tabuľka T10.1: Prehľad štandardných fotometrických filtrov.

- (c) [15 b] Každá vlna žiarenia putujúca vesmírom sa predlžuje v dôsledku rozpínania vesmíru. Vypočítajte, akému intervalu vlnových dĺžok  $\mathbb{F} = (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$  zodpovedal detekčný interval  $\mathbb{F}_0$  pri emitovaní žiarenia supernovou. Takisto vypočítajte neistotu  $\lambda_{\min}$  a  $\lambda_{\max}$  na základe neistôt  $\lambda_{\min,0}$  a  $\lambda_{\max,0}$ , ktoré ste odhadli v (a). Akému filteru zo štandardného fotometrického systému (tabuľka T10.1) najbližšie zodpovedá interval  $\mathbb{F}$ ?

Na kozmologických škálach existuje viacero rôznych definícií vzdialenosti. Jednou z nich je

luminozitná vzdialenosť  $d_L$ , ktorá je definovaná pomocou modulu vzdialenosti ako

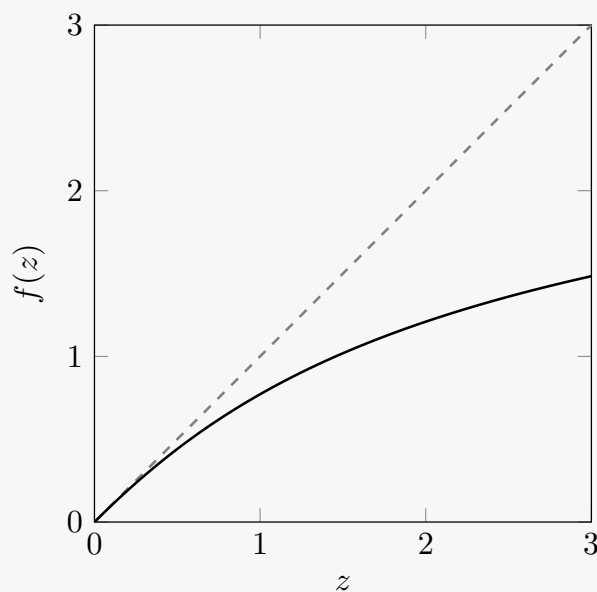
$$m_{\mathbb{F}_0} - M_{\mathbb{F}} = 5 \log d_L - 5 \quad , \quad [d_L] = \text{pc} \quad , \quad (\text{T10.1})$$

kde  $m_{\mathbb{F}_0}$  je zdanlivá a  $M_{\mathbb{F}}$  absolútna magnitúda v daných intervaloch vlnových dĺžok. Zanedbali sme absorpciu žiarenia a K-korekciu, ktorá by bola potrebná, ak by sme nepracovali v zodpovedajúcich si intervaloch  $\mathbb{F}_0$  a  $\mathbb{F}$ .

Na popisovanie kozmologických štruktúr je vhodnejšou definíciou vzdialenosti takzvaná *comoving distance*  $d_C$ . Uvažujme štandardný  $\Lambda$ CDM kozmologický model a plochý vesmír. Comoving vzdialenosť vieme potom vyjadriť ako

$$d_C = d_H f(z) \quad , \quad (\text{T10.2})$$

kde  $d_H = c/H_0$  je Hubblova vzdialenosť,  $c$  rýchlosť svetla,  $H_0$  Hubblova konštanta a  $f(z)$  komplikovaná funkcia červeného posunu zobrazená na obrázku T10.2. Medzi luminozitnou a comoving vzdialenosťou navyše platí jednoduchý vzťah  $d_L = (1+z)d_C$ .

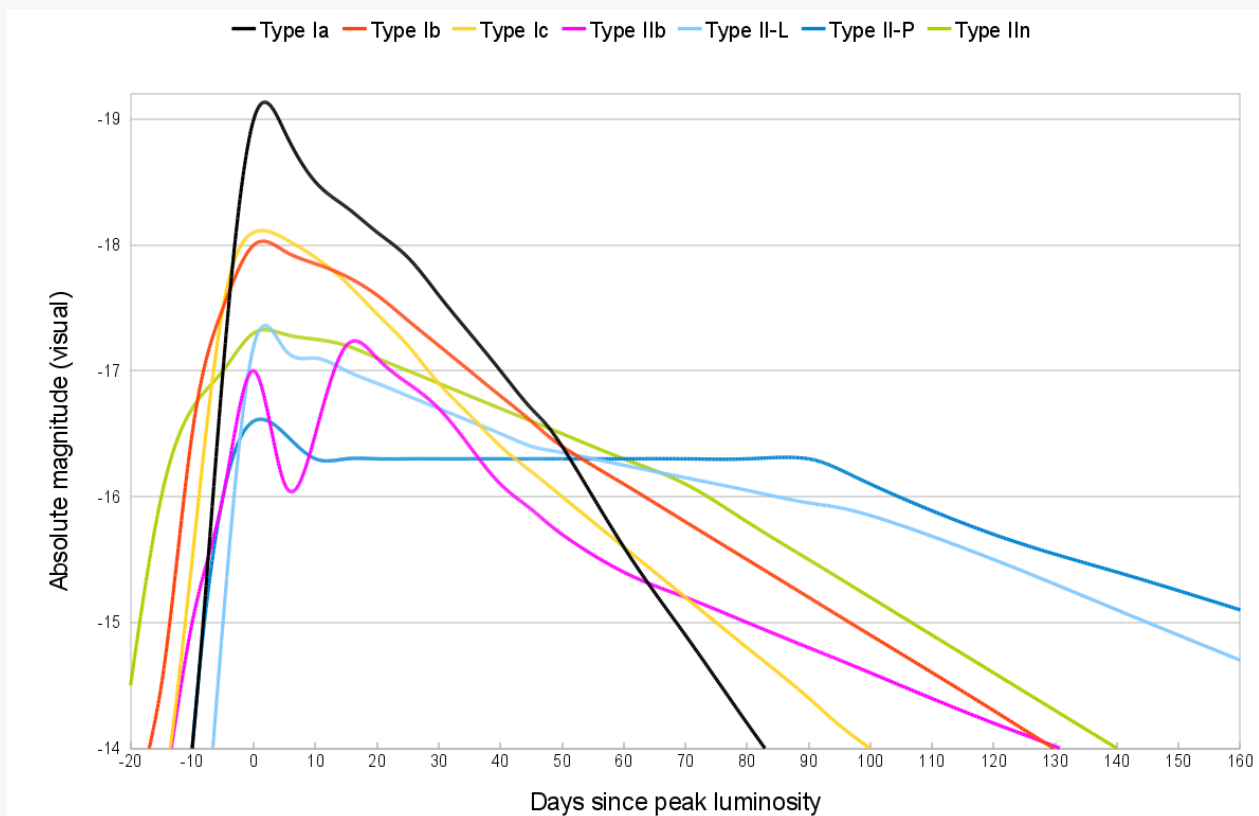


Obr. T10.2: Graf funkcie  $f(z)$  pre výpočet comoving vzdialenosti  $d_C$ . Prerušovanou čiarou je zobrazená aproximácia pre malé červené posuny  $z$  (Hubblou-Lemaîtreov zákon).

(d) [35 b] Vypočítajte  $M_{\mathbb{F}}$ . Neistotu neurčujte.

Rozpínanie vesmíru spôsobuje natahovanie vln elektromagnetického žiarenia, a teda aj predlžovanie ich periód. Zároveň sa ale v rovnakom pomere predlžujú aj ďalšie časové intervaly (tie, ktoré sú výrazne kratšie ako vek vesmíru), vrátane dĺžky dosvitu supernovy. Bolo pozorované, že po maxime jasnosti narástla magnitúda supernovy o 1,5 mag za  $\Delta t_0 = 67$  dní.

- (e) [10b] Vypočítajte reálnu dĺžku dosvitu  $\Delta t$ , čiže časový interval, za ktorý stúpla absolútna magnitúda supernovy z maximálnej hodnoty  $M_F$  o hodnotu 1,5 mag.
- (f) [5b] Na základe maximálnej absolútnej magnitúdy  $M_F$  a času dosvitu  $\Delta t$  odhadnite typ supernovy SN UDS10Wil. Využite graf typického priebehu svetelnej krivky pre rôzne typy supernov na obrázku T10.3, ktorý je nakreslený v takzvanom *rest frame*, teda vo vzťažnej sústave, ktorá je v pokoji vzhľadom na supernovu.



Obr. T10.3: Typické priebehy svetelných kriviek pre rôzne typy supernov. Na horizontálnej osi je znázornený čas v jednotke dní od najvyššej jasnosti (*Days since peak luminosity*), pričom časová škála je v takzvanom *rest frame*, teda vo vzťažnej sústave, ktorá je v pokoji vzhľadom na supernovu. Na vertikálnej osi je znázornená absolútna vizuálna magnitúda – *Absolute magnitude (visual)*. Typ supernovy je rozlíšený farebne, legenda je uvedená nad grafom. Autor: Lithopsian.

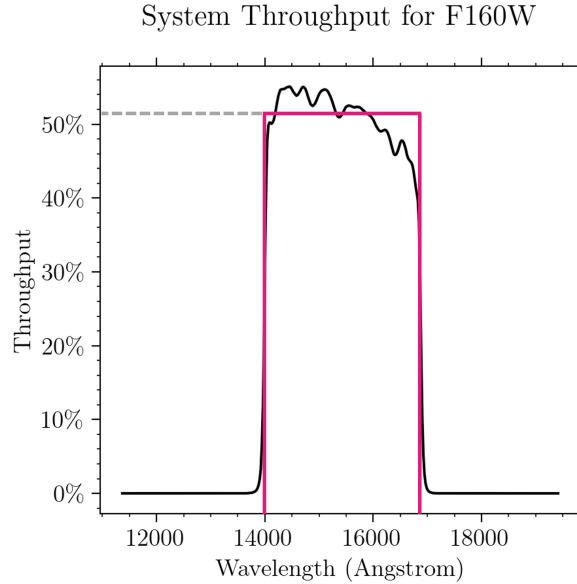
- (a) Rozsah vlnových dĺžok, ktoré filter F160W zaznamenáva, určíme odčítaním z grafu pomocou pravítka, ako je zobrazené na obrázku T10.4. Dostávame

$$\lambda_{\min,0} = (14\,000 \pm 200) \text{ \AA}, \quad (\text{T10.3})$$

$$\lambda_{\max,0} = (16\,800 \pm 200) \text{ \AA}. \quad (\text{T10.4})$$

Priemernú priepustnosť  $\eta$  odhadneme vodorovnou čiarou približne kopírujúcou krivku priepustnosti na intervale  $\mathbb{F}_0 = (\lambda_{\min,0}, \lambda_{\max,0})$  tak, aby zhruba rovnaká plocha bola pod a nad vodorovnou čiarou. Dostávame

$$\boxed{\eta = (51,5 \pm 1,5) \%}. \quad (\text{T10.5})$$



Obr. T10.4: Náčrt odčítania vlastností filtra F160W.

- (b) Pri pozorovaní cez filter zachytíme iba  $\eta = (51,5 \pm 1,5) \% = 0,515 \pm 0,015$  toku svetla  $f_0$ , čo sme odhadli v podzadaní (a). Vzťah medzi magnitúdami môžeme vyjadriť Pogsonovou rovnicou

$$m_{\mathbb{F}_0} - m'_{\mathbb{F}_0} = -2,5 \log\left(\frac{f_0}{\eta f_0}\right), \quad (\text{T10.6})$$

z čoho

$$m_{\mathbb{F}_0} = m'_{\mathbb{F}_0} + 2,5 \log(\eta), \quad (\text{T10.7})$$

$$= 26,9 \text{ mag} + 2,5 \log(0,515 \pm 0,015), \quad (\text{T10.8})$$

$$\doteq \boxed{26,2 \text{ mag}}. \quad (\text{T10.9})$$

Chybu  $\eta$  sme už nepreniesli ďalej, nakoľko spôsobila vo výsledku rozdiel až na druhom desatinnom mieste, ale  $m'_{\mathbb{F}_0}$  máme zadané iba na jedno desatinné miesto.

- (c) Červený posun je definovaný ako

$$z := \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1, \quad (\text{T10.10})$$

kde  $\lambda_{\text{obs}}$  je v súčasnosti pozorovaná vlnová dĺžka a  $\lambda_{\text{emit}}$  je v minulosti emitovaná vlnová

dĺžka. Preto pre hranice intervalov  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}$  platí

$$\frac{\lambda_{\min,0}}{\lambda_{\min}} - 1 = z = \frac{\lambda_{\max,0}}{\lambda_{\max}} - 1. \quad (\text{T10.11})$$

Uvažovať v tomto kozmologickom kontexte o Dopplerovom posune nie je správne. Rovnice s ním nemajú nič spoločné. Ide čisto iba o to, ako definujeme červený posun. Úpravou dostávame

$$\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\min,0}}{z+1} = \frac{(14\,000 \pm 200) \text{ \AA}}{1,91+1} \doteq \boxed{(4810 \pm 70) \text{ \AA}}, \quad (\text{T10.12})$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_{\max,0}}{z+1} = \frac{(16\,800 \pm 200) \text{ \AA}}{1,91+1} \doteq \boxed{(5770 \pm 70) \text{ \AA}}. \quad (\text{T10.13})$$

Najbližšie k tomuto rozsahu vlnových dĺžok je filter V, ktorý sa podľa tabuľky T10.1 nachádza v strede viditeľného svetla v rozsahu  $\pm 440 \text{ \AA}$  okolo  $5510 \text{ \AA}$ . Zodpovedá to minimálnej vlnovej dĺžke  $5070 \text{ \AA}$  a maximálnej vlnovej dĺžke  $5950 \text{ \AA}$ . Filter V je teda posunutý voči intervalu  $\mathbb{F}$  o menej ako  $300 \text{ \AA}$  a má aj podobnú šírku.

- (d) V tomto podzadaní je dôležité nestratiť sa v troch rôznych definíciách vzdialenosti. Inak máme všetko zadané a postup je priamočiary. Začneme výpočtom Hubblovej vzdialenosti

$$d_H = \frac{c}{H_0} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \doteq 4283 \text{ Mpc}, \quad (\text{T10.14})$$

kde nesmieme zabudnúť premeniť  $\text{km s}^{-1}$  na  $\text{m s}^{-1}$  v Hubblovej konštante  $H_0$ . Výsledok si ponechávame s vysokou presnosťou, keďže ide iba o medzivýsledok a nechceme sa dopustiť zaokrúhľovacej chyby. Ďalej vypočítame comoving vzdialenosť, pre ktorú budeme potrebovať odčítať hodnotu  $f(z)$  pre  $z = 1,91$  z grafu na obrázku T10.2. Odčítanie je zobrazené na obrázku T10.5 a dostávame z neho  $f(z = 1,91) = 1,18 \pm 0,05$ . Pre comoving distance dostávame

$$d_C = d_H f(z) = 4283 \text{ Mpc} \cdot (1,18 \pm 0,05) \doteq (5050 \pm 200) \text{ Mpc}. \quad (\text{T10.15})$$

Zo znalosti comoving vzdialenosti zistíme luminozitu zadaným vzťahom

$$d_L = (1+z) d_C \quad (\text{T10.16})$$

$$= (1+1,91) \cdot (5050 \pm 200) \text{ Mpc} \quad (\text{T10.17})$$

$$\doteq (14\,700 \pm 600) \text{ Mpc}. \quad (\text{T10.18})$$

Je dobré poznamenať, že táto vzdialenosť nezodpovedá vzdialenosti, ktorú prekonalo svetlo zo supernovy. Po prepočte  $d_L$  na svetelné roky zistíme, že  $d_L = 50 \cdot 10^9 \text{ ly}$ , čo by ale svetlu trvalo viac ako vek vesmíru,  $13,8 \cdot 10^9$  rokov. Podobne to je aj pre comoving vzdialenosť  $d_C$ ,

ktorá je po prepočte na svetelné roky  $d_C = 16,5 \cdot 10^9$  ly.

*Poznámka: comoving vzdialenosť sa zavádza preto, lebo najlepšie zodpovedá vzdialenosti supernovy od nás, ktorú by sme namerali ak by sme k nej natiahli veľmi dlhý meter. Ako je však možné, že nám vychádza väčšia ako stihol ľubovoľný fotón vo vesmíre od jeho vzniku prejsť? Je to spôsobené tým, že vesmír stihol expandovať medzi emitovaním svetla supernovou a pozorovaním tohto svetla nami. Supernova sa takto od nás odsunula ďalej, ako stihlo prejsť svetlo. Tento princíp sa aplikuje na celý vesmír. Funkcia  $f(z)$  sa pre veľké  $z$  blíži k hodnote okolo 3,3. Po prepočte na comoving vzdialenosť vychádza  $d_C = 46 \cdot 10^9$  ly, čo zodpovedá hranici pozorovateľného vesmíru.*

Ako posledné stačí dosadiť  $d_L$  a  $m_{F_0}$ , určené v podzadaní (b), do definície luminozítnej vzdialenosti

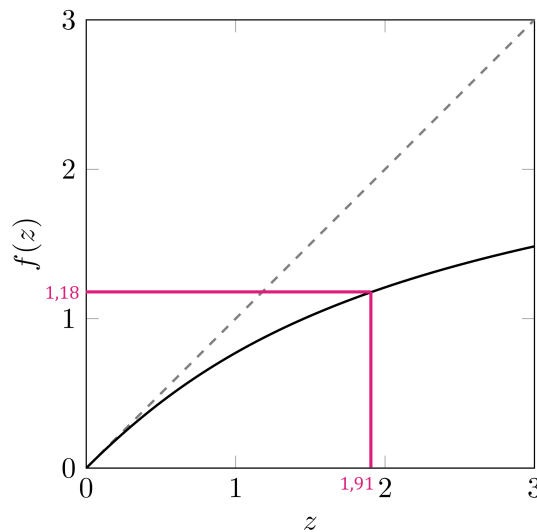
$$m_{F_0} - M_F = 5 \log d_L - 5 \quad , \quad [d_L] = \text{pc} \quad , \quad (\text{T10.19})$$

čím po úprave získame hľadanú absolútnu magnitúdu

$$M_F = m_{F_0} - 5 \log d_L + 5 \quad , \quad (\text{T10.20})$$

$$= 26,2 \text{ mag} - 5 \log ((14\,700 \pm 600) \cdot 10^6) + 5 \quad , \quad (\text{T10.21})$$

$$\doteq \boxed{(-19,64 \pm 0,08) \text{ mag}} \quad . \quad (\text{T10.22})$$



Obr. T10.5: Odčítanie hodnoty  $f(z = 1,91)$ .

- (e) Ako sme zistili v podzadaní (c), vlnové dĺžky sa škálujú s koeficientom  $(1 + z)$ . Rovnako sa škálujú aj periódy vĺn a ako napovedá zadanie, tak aj dĺžka dosvitu supernovy. Preto platí

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{1 + z} = \frac{67 \text{ dní}}{1 + 1,91} \doteq \boxed{23 \text{ dní}} \quad . \quad (\text{T10.23})$$

- (f) Supernova má magnitúdu menšiu ako  $-19$ , takže jedinou možnosťou je  $\boxed{\text{typ Ia}}$ . To potvrdzuje

dzuje aj čas dosvitu, ktorý je príliš krátky pre iné typy. Supernovy typu Ia vznikajú vtedy, keď v dvojhviezdnom systéme nabalí na seba biely trpaslík príliš veľa hmoty, prekoná Chandrasekharovu medzu a nedokáže zabrániť vlastnému gravitačnému kolapsu. Supernovy tohto typu majú podobné absolútne magnitúdy a svetelné krivky, preto ide o veľmi dôležité štandardné sviečky, ktoré nám pomáhajú určovať vzdialenosti vo vesmíre.

## T11 Svetelný výkon hviezd

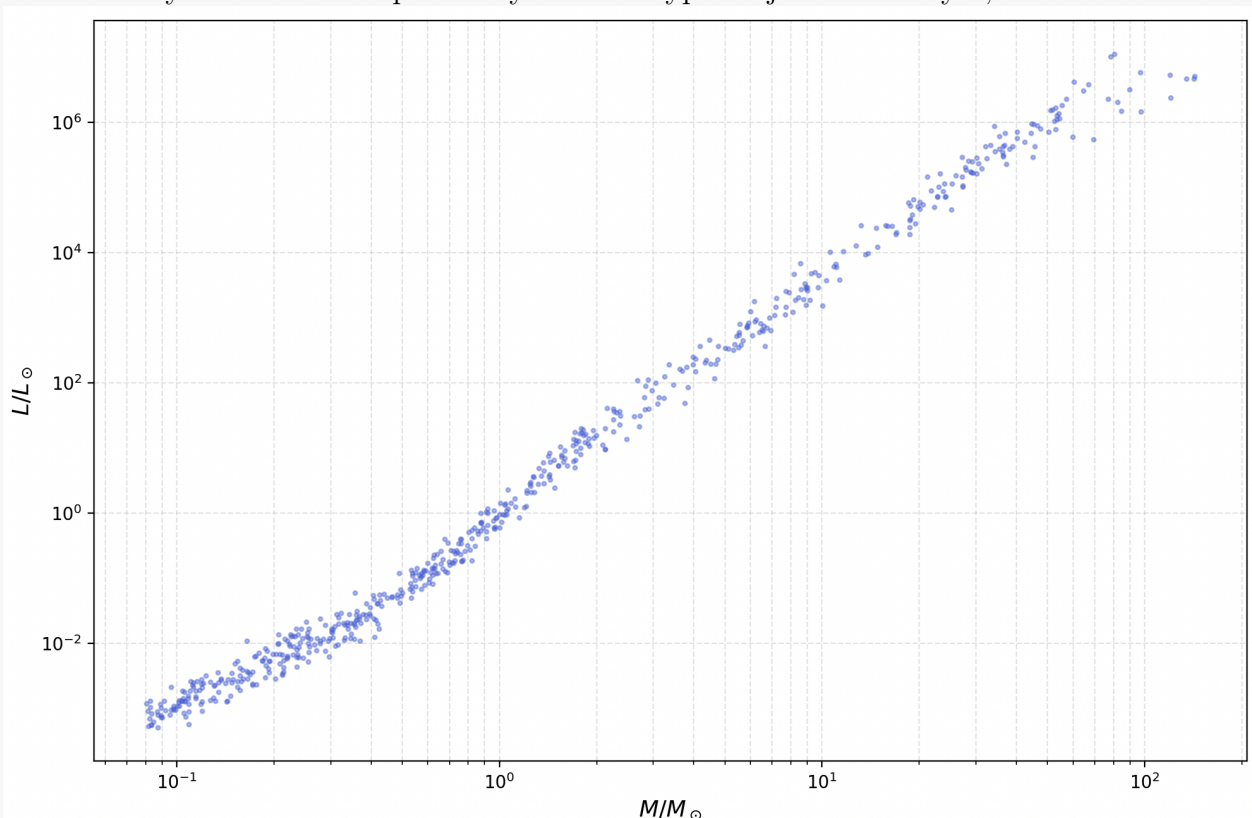
(180b, autor: Vladimír Slanina)

### A. Empirické pozorovania

V astrofyzike sa často stretávame so vzťahom, ktorý vyjadruje úmeru medzi svetelným výkonom  $L$  hviezd a jej hmotnosťou  $M$ . Z priloženého grafu vyplýva, že hviezdy v rôznych intervaloch sa správajú podľa rôznych mocninových závislostí v tvare

$$\frac{L}{L_{\odot}} = b \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^a. \quad (\text{T11.1})$$

A.1 [30b] Na základe priloženého grafu rozdeľte hviezdy podľa ich hmotnosti na niekoľko vhodných intervalov a pre každý interval vypočítajte koeficienty  $a, b$ .



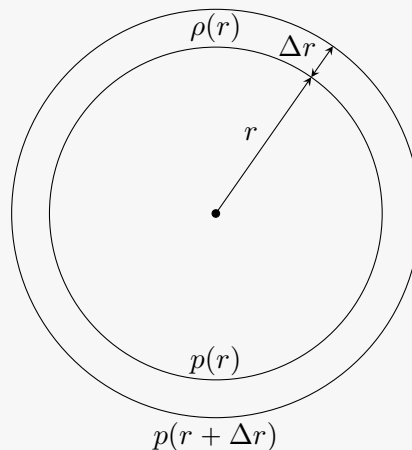
Obr. T11.1: Logaritmický graf závislosti  $L/L_{\odot}$  od  $M/M_{\odot}$ .

## B. Teoretický výpočet teploty

Budeme uvažovať jednoduchý model sférickej nerotujúcej hviezdy s hmotnosťou  $M$  a polomerom  $R$  zloženej len z vodíkovej plazmy (plne ionizovaného vodíka, teda sa vo hviezde nachádzajú iba jadrá vodíka a elektróny). Hviezdu môžeme považovať za súbor tenkých sústredných guľových škrupín s hrúbkou  $\Delta r \ll R$  a hustotou  $\rho(r)$ .

Pri analýze tekutých telies nás často zaujíma hydrostatická rovnováha, ktorá nastáva, keď je výslednica tiažovej sily a tlakových síl nulová.

- B.1 [15b] Napíšte rovnicu hydrostatickej rovnováhy pre škrupinu vo vzdialenosti  $r$  od stredu hviezdy. Výsledok vyjadrite pomocou  $r$ ,  $\Delta r$ ,  $\rho(r)$ , rozdielu tlaku medzi susednými škrupinami  $\Delta p(r)$ , hmotnosti plynu pod škrupinou  $M_p(r)$  a základných fyzikálnych konštánt. Môže sa vám hodiť obrázok T11.2.



Obr. T11.2: Na guľovú šupku pôsobí zvnútra tlak  $p(r)$  a zvonku  $p(r + \Delta r)$ .

V ďalších podúlohách budeme uvažovať  $\rho(r) = \text{konšt.} = \rho$  a takisto konštantnú teplotu  $T(r) = \text{konšt.}$  Ďalej uvažujme, že na povrchu hviezdy je tlak  $p(R) = 0$  a tlak v strede hviezdy je  $p(0) = p_0$ . Pre hrubý odhad budeme predpokladať, že sa hviezda skladá iba z dvoch škrupín s rovnakou hmotnosťou.

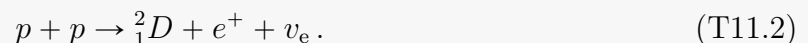
- B.2 [10b] Použitím výsledku z podúlohy B.1. vypočítajte tlak v strede hviezdy len pomocou  $M$ ,  $R$  a základných fyzikálnych konštánt.
- B.3 [10b] Vyjadrite teplotu Slnka  $T_1$  za predpokladu, že sa plazma správa ako ideálny plyn. Odpoveď vyjadrite pomocou  $M, R$  a základných fyzikálnych konštánt.

Vodík pri nízkych teplotách (menej než milióny stupňov) vytvára dvojatómové molekuly  $H_2$ , no v Slnku, kde je teplota v jadre zhruba 15 miliónov kelvinov, sa nachádza v plne ionizovanom stave v podobe protónov. Ide teda o jednoatómové molekuly, preto má ionizovaný vodík  $s = 3$  stupne voľnosti (môže sa pohybovať v smeroch  $x, y, z$ ).

B.4 [15b] Pomocou viriálovej vety (angl. *virial theorem*) vypočítajte strednú teplotu  $T_2$  vnútri hviezdy. Výsledok vyjadrite pomocou  $M$ ,  $R$  a základných fyzikálnych konštánt.

*Nápoveda: Práca, ktorú by ste vykonali na rozobratie všetkých hmotných častíc tvoriacich homogénne guľové rozloženie hmotnosti  $M$  a polomeru  $R$  z tohto rozloženia do nekonečnej vzdialenosti od seba navzájom, je rovná  $3GM^2/(5R)$ .*

Vo vnútri Slnka (a hviezd hlavnej postupnosti) dochádza k vytváraniu energie prostredníctvom exoenergetických jadrových reakcií. Základným procesom je fúzia jadier vodíka ( $H^+$ ) v tzv. protón-protónovom ( $p-p$ ) cykle. Prvá reakcia tohto procesu je fúzia dvoch protónov

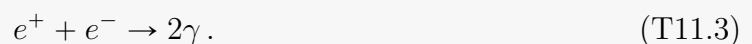


B.5 [15b] Vypočítajte potrebnú teplotu hviezdy  $T_3$  na fúziu protónov, ak k ich fúzii dochádza, keď sa k sebe priblížia na vzdialenosť  $d_p = 1,5 \cdot 10^{-15}$  m. Uvažujte, že počiatočná vzdialenosť protónov je omnoho väčšia ako  $d_p$  a obidva k sebe priamo smerujú rovnakou rýchlosťou. Využívajte iba znalosti z klasickej fyziky.

B.6 [10b] Porovnajte výsledky získané v častiach B.3, B.4 a B.5. V ktorej časti je určená teplota najbližšie k teplote Slnka? Krátko zdôvodnite vzniknuté rozdiely medzi jednotlivými vypočítanými teplotami a skutočnou hodnotou Slnka.

## C. Výpočet žiarivého výkonu

Fúziou protónov vzniká pozitron ( $e^+$ ), ktorý ďalej anihiluje s elektrónmi ( $e^-$ ), ktoré sa nachádzajú vo hviezde.



Pri anihilácii vznikajú fotóny ( $\gamma$ ), ktoré ale z hviezdy neunikajú priamo. Dochádza k ich rozptylu a vstupujú do množstva termonukleárnych reakcií predtým, než sa dostanú na povrch. Tieto náhodné procesy vieme popísať procesom nazývaným difúzia, ktorý je vyjadrený prvým Fickovým zákonom. Ten hovorí, že hustota toku je úmerná gradientu koncentrácie.

Keďže je náš model hviezdy radiálne symetrický, tak je Fickov zákon matematicky vyjadrený ako

$$F = -D \frac{\Delta u}{\Delta r}, \quad (\text{T11.4})$$

kde  $F$  je svetelný tok (v jednotkách  $\text{W m}^{-2}$ ),  $\Delta u$  je malá zmena energetickej hustoty žiarenia čierneho telesa (v jednotkách  $\text{J m}^{-3}$ ) a  $D > 0$  je konštanta úmernosti, ktorá sa nazýva difúznym koeficient. Fyzikálny význam znamienka mínus je, že teplo prúdi z teplejších oblastí (s vyššou energetickou hustotou) do chladnejších oblastí (s nižšou energetickou hustotou).

C.1 [13b] Odvodte vzťah pre energetickú hustotu žiarenia čierneho telesa  $u$  pomocou teploty telesa  $T$  a základných fyzikálnych konštánt. Pri energetickej hustote žiarenia pre jednoduchosť uvažujte z každého zdroja na povrchu čierneho telesa len radiálny prís-

pevok daného lúča. Využite fakt, že čisto radiálne šíriace sa žiarenie tvorí 1/4 celkovej energie vyžiarenej elementom povrchu.

*Nápoveda: predstavte si objem energie vyžiarenej čiernym telesom za čas  $\Delta t$ .*

Uvažujme ďalej, že hviezda má homogénnu teplotu  $T_2$  a mimo hviezdy je teplota  $T = 0$  K.

C.2 [7b] Vyjadrite svetelný tok medzi jadrom hviezdy, kde  $T(0) = T_2$ , a jej povrchom, kde  $T(R) = 0$ , pomocou  $D$ ,  $T_2$  a základných fyzikálnych konštánt.

Difúzny koeficient sa vzťahuje na časticu pohybujúcu sa prostredím.

C.3 [10b] Na základe rozmerovej analýzy určte hodnoty  $\alpha, \beta, \gamma$  za predpokladu, že platí  $D = \frac{1}{3} \lambda^\alpha p^\beta v^\gamma$ , kde  $\lambda$  je stredná voľná dráha častice (stredná vzdialenosť, ktorú častica prejde pred tým, než narazí do inej častice),  $p$  je jej hybnosť a  $v$  je jej rýchlosť.

V plne ionizovanej hviezde fotóny interagujú hlavne s elektrónmi. Efektívny prierez pre interakciu elektrónu a fotónu je daný vzťahom

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\alpha \hbar c}{m_e c^2} \right)^2, \quad (\text{T11.5})$$

kde  $m_e$  je hmotnosť elektrónu a  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$ . Uvažujte, že všetky elektróny nachádzajúce sa vo hviezde pochádzajú z rozkladu vodíka na jeho jadro a elektrónový obal.

C.4 [15b] Vyjadrite difúzny koeficient pomocou  $\sigma_e$ , hustoty elektrónov  $n_e$  (počet elektrónov na jednotku objemu) a základných fyzikálnych konštánt.

C.5 [30b] Vyjadrite svetelný výkon hviezdy len pomocou  $M$  a základných fyzikálnych konštánt. Vyčísľte tento výkon pre Slnko a porovnajte ho so skutočnou hodnotou Slnka. Určte koeficient  $a$  z rovnice (T11.1) pre tento model. Ku ktorému z intervalov hmotností hviezd z podúlohy A.1 je tento model najbližšie?

*Poznámka: Ak sa vám nepodarilo určiť  $T_2$ , môžete predpokladať  $T_2 \propto MR^{-1}$  a na základe toho určiť hodnotu koeficientu  $a$ .*

**A.1** Keďže už máme zadaný priamo log-log graf, tak je prirodzené zlogaritmováť rovnicu (T11.1), čím získame

$$\log_{10} \left( \frac{L}{L_\odot} \right) = a \log_{10} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) + \log_{10}(b). \quad (\text{T11.6})$$

Jednotlivé intervaly teda budú mať tvar priamky.

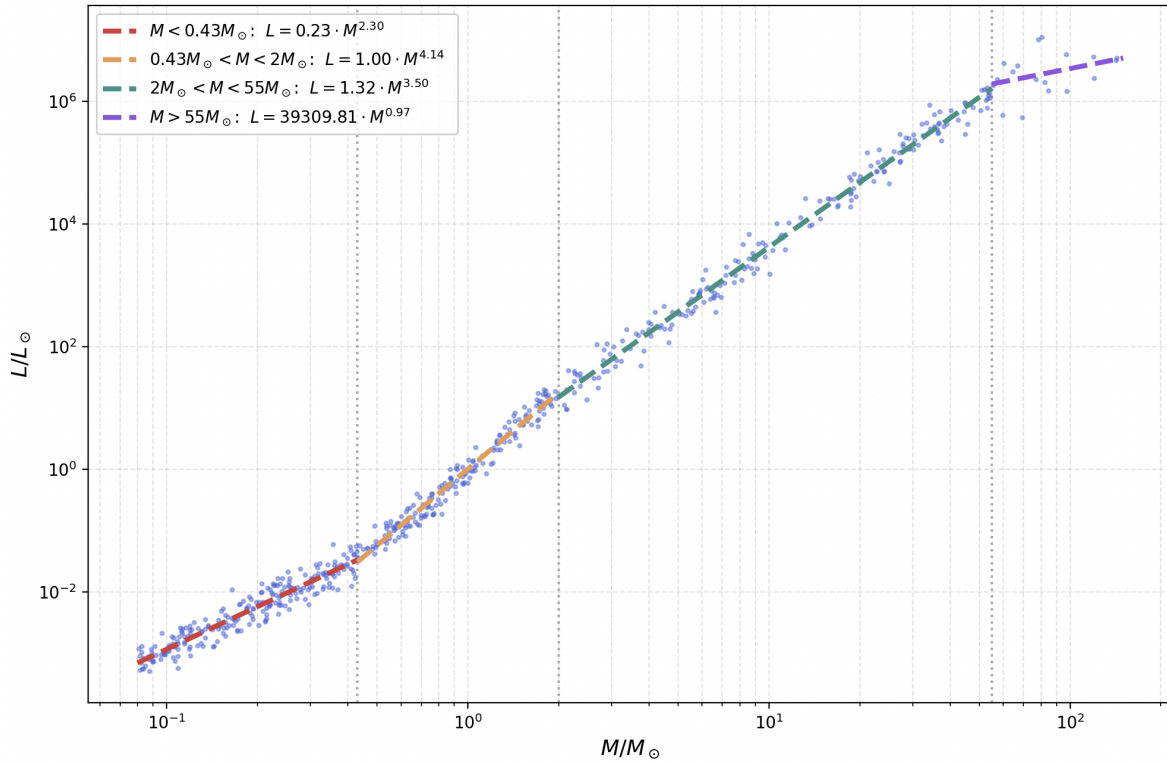
Teraz je kľúčové si rozmyslieť, koľko intervalov vlastne hľadáme. Prvý nám do oka určite padne posledný „chvostík“ postupnosti hviezd, v ktorom je najmenšia „hustota“ hviezd. Podobne v prvom úseku pozorujeme vyššiu hustotu hviezd. Keď sa ďalej budeme pozornejším okom pozeráť na stredný úsek alebo by sme sa ho pokúsili preložiť jednou priamkou, tak by sme si mohli všimnúť, že tam je v skutočnosti ešte jeden prechod – celkovo je teda postupnosť

hviezd rozdelená 4 intervaly, viď obr. T11.3.

Koeficienty  $a_i, b_i$   $i$ -teho intervalu určíme tak, že daný interval preložíme priamkou a nájdeme na nej 2 body  $[x_{i1}, y_{i1}], [x_{i2}, y_{i2}]$ . Z nich potom vieme vypočítať hľadané koeficienty ako 4 × 6b

$$a_i = \frac{\log_{10}(y_{i2}) - \log_{10}(y_{i1})}{\log_{10}(x_{i2}) - \log_{10}(x_{i1})}, \quad (\text{T11.7})$$

$$b_i = \log_{10}(y_{i1}) - a \log_{10}(x_{i1}). \quad (\text{T11.8})$$



Obr. T11.3: Postupnosť hviezd rozdelená na jednotlivé intervaly.

**B.1** Nakolko uvažujeme sférickú nerotujúcu hviezdu, na škrupinu pôsobí iba vztlaková sila a gravitačná sila, obidve v radiálnom smere. Rozpíšme si preto sily, ktoré pôsobia na škrupinu smerom dovnútra a smerom von z hviezdy. Označme si  $\Delta m$  hmotnosť škrupiny a  $S$  jej povrch. Potom

$$F_{\text{dovnutra}} = \frac{GM_p(r)\Delta m}{r^2} + p(r + \Delta r)S, \quad (\text{T11.9})$$

$$F_{\text{von}} = p(r)S. \quad (\text{T11.10}) \quad 4b$$

Predpokladáme  $\Delta r \ll r$ , preto povrch škrupiny je rovnaký zvnútra ako zvonku, a to  $S = 4\pi r^2$ . Hmotnosť hviezdy vypočítame priamočiaro podľa hustoty ako  $\Delta m(r) = \Delta V \rho(r) = 4\pi r^2 \Delta r \rho(r)$ . Hydrostatická rovnováha potom hovorí, že 3b

$$F_{\text{von}} = F_{\text{dovnutra}}, \quad (\text{T11.11})$$

$$p(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{GM_p(r)}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Delta r \rho(r) + p(r + \Delta r) \cdot 4\pi r^2, \quad (\text{T11.12})$$

odkiaľ po úpravách dostávame

3b

$$\boxed{-\frac{GM_p(r)\rho(r)}{r^2} = \frac{p(r + \Delta r) - p(r)}{\Delta r} = \frac{\Delta p}{\Delta r}}. \quad (\text{T11.13})$$

5b

**B.2** Na vonkajšiu škrupinu pôsobí gravitačná sila vnútornej škrupiny, ktorá má hmotnosť  $M_p = M/2$ . Hustotu uvažujeme v celej hviezde konštantnú, preto

$$\rho(r) = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (\text{T11.14})$$

V zadaní máme dané 2 hodnoty tlaku, z čoho pre ich rozdiel dostaneme  $\Delta p = p(R) - p(0) = -p_0$ . Z toho prirodzene plynie  $\Delta r = R - 0 = R$ . Dosadením do rovnice hydrostatickej rovnováhy získame

$$\frac{-p_0}{R} = -\frac{G \frac{M}{2} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}}{R^2}, \quad (\text{T11.15})$$

z čoho po úpravách

$$\boxed{p_0 = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}}. \quad (\text{T11.16})$$

4b

**B.3** Stavová rovnica ideálneho plynu je

2b

$$p_0 V = N k_B T_1, \quad (\text{T11.17})$$

kde  $N$  je počet častíc tvoriacich plyn. Slnko sa skladá z vodíkovej plazmy, teda iba z protónov a elektrónov, pričom na každý protón pripadá 1 elektrón. Z toho plynie  $N = 2N_p$ . Keďže  $m_p \gg m_e$ , tak počet protónov je  $N_p = M/m_p$ , z čoho pre celkový počet častíc máme  $N = 2M/m_p$ . Po vyjadrení teploty  $T_1$  a následnom dosadení získame

5b

$$\boxed{T_1 = \frac{p_0 V}{N k_B} = \frac{\frac{3GM^2}{8\pi R^4} \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2M}{m_p} k_B} = \frac{GM m_p}{4k_B R}}. \quad (\text{T11.18})$$

3b

**B.4** Viriálová veta

5b

$$2K + U = 0, \quad (\text{T11.19})$$

udáva vzťah medzi kinetickou energiou častíc  $K$  a gravitačnou väzbovou energiou  $U$  vo viriálovej rovnováhe. Stredná kinetická energia jednej častice s termodynamickou teplotou  $T_2$

je rovná  $s/2 \cdot k_B T_2 = 3/2 \cdot k_B T_2$ . Celková kinetická energia častíc tak je

$$K = \frac{3}{2} N k_B T_2 = \frac{3}{2} \left( 2 \frac{M}{m_p} \right) k_B T_2 = 3 \frac{M}{m_p} k_B T_2. \quad (\text{T11.20})$$

Gravitačná väzbová energia pre guľu s konštantnou hustotou je  $U = -3GM^2/(5R)$ , preto podľa viriálovej vety platí 5b

$$2 \cdot 3 \frac{M}{m_p} k_B T_2 = \frac{3GM^2}{5R}, \quad (\text{T11.21})$$

z čoho

$$\boxed{T_2 = \frac{GMm_p}{10k_B R}}. \quad (\text{T11.22})$$

5b

**B5** Protóny musia mať dostatočnú počiatočnú rýchlosť v nekonečne na to, aby sa mohli k sebe priblížiť na vzdialenosť  $d_p$ . Pre elektrostatickú energiu medzi dvomi protónmi (každý má náboj  $e$ ) platí

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d_p}. \quad (\text{T11.23})$$

Zo symetrie situácie sa v bode najväčšieho priblíženia zastavia (vo vzťažnej sústave ich ťažiska), preto podľa zákona zachovania energie 4b

$$E_e = 2E_k = mv_0^2. \quad (\text{T11.24})$$

Ako sme už využili v predchádzajúcej podúlohe, stredná kinetická energia častice s teplotou  $T_3$  je  $3k_B T_3/2 = E_k = mv_0^2/2$ . Po dosadení do rovnice T11.24 a následnom vyjadrení hľadanej teploty získame 4b

$$\boxed{T_3 = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 k_B d_p} \doteq 3,7 \cdot 10^9 \text{ K}}. \quad (\text{T11.25})$$

4 + 3b

**B.6** Ak do vzťahov dosadíme hodnoty pre Slnko ( $M = M_\odot$ ,  $R = R_\odot$ ), dostaneme rádovo hodnoty

- $T_1 \doteq 5,8 \cdot 10^6 \text{ K}$ , 2b
- $T_2 \doteq 2,3 \cdot 10^6 \text{ K}$ , 2b
- $T_3 \doteq 3,7 \cdot 10^9 \text{ K}$ .

Z výsledkov vidíme, že teplota  $T_1$  získaná z hydrostatickej rovnováhy je najbližšie k teplote Slnka  $T_\odot = 15 \cdot 10^6 \text{ K}$ . Zdrojom rozdielu vo všetkých prípadoch je samozrejme uvažovanie konštantnej teploty v celej hviezde. Prvý aj druhý model takisto predpokladajú homogénne rozloženie hmoty (konštantnú hustotu), avšak v skutočnosti hustota smerom od jadra hviezdy

klesá. Takisto si všimnite, že teploty  $T_1, T_2$  sa od seba navzájom líšia iba o multiplikatívnu konštantu.

Teplota  $T_3$  je rádovo úplne iná ako hodnoty  $T_1$  a  $T_2$ . Jeden z dôvodov je ten, že táto hodnota vôbec nezávisí od parametrov hviezdy. Takisto si vieme všimnúť, že táto hodnota je o 3 rády vyššia ako skutočná hodnota Slnka, teda by v skutočnosti ani k jadrovým fúziám vôbec nemalo dochádzať. Dôvod, prečo k fúziám aj napriek tomu dochádza, je, že vďaka kvantovému tunelovaniu môžu protóny prekonať potrebnú energetickú „bariéru“. Ďalší (druhotný) dôvod je ten, že vzťah pre **strednú** kinetickú energiu častice hovorí len o strednej hodnote jej energie, ktorá patrí do Maxwell-Boltzmannovho rozdelenia. Keďže ide o štatistické rozdelenie, tak je nenulová pravdepodobnosť toho, že aj pri nižších teplotách bude dochádzať k fúzii. 6b

**C.1** Podľa Stefan-Boltzmannovho zákona je výkon vyžiarený z jednotkovej plochy čierneho telesa  $I = \sigma T^4$ . Z celej hviezdy je tak za čas  $\Delta t$  vyžiarená celková energia 2b

$$E = I \Delta t \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Delta t. \quad (\text{T11.26}) \quad 4b$$

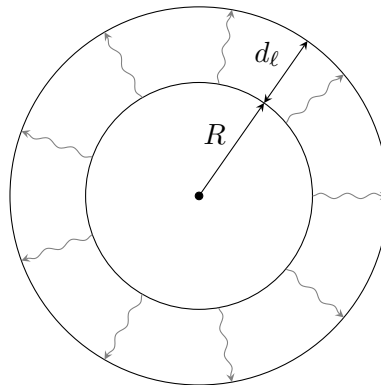
Uvažujme zatiaľ iba radiálne žiarenie. Za čas  $\Delta t$  prejde svetlo dráhu  $c\Delta t$ , teda vyplní objem  $V = 4\pi R^2 c\Delta t$ . 3b

Hustota čisto radiálneho žiarenia potom je

$$u_{\text{rad}} = \frac{E}{V} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4 \Delta t}{4\pi R^2 c \Delta t} = \frac{\sigma}{c} T^4. \quad (\text{T11.27})$$

Žiarenie ale vyžaruje do celého polpriestoru daného dotykovou rovinou k povrchu hviezdy a k tomu ani nie izotropne, ale ako kosínový žiarič. Našťastie nám namiesto presného počítania stačí využiť fakt v zadaní, že  $u_{\text{rad}}$  tvorí 1/4 celkovej hustoty žiarenia  $u$ , teda

$$u = 4u_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (\text{T11.28}) \quad 4b$$



Obr. T11.4: Znázornenie uvažovaného šírenia žiarenia.

**C.2** Obdobne ako v podúlohe B.2 riešime zmenu  $\Delta u = u(R) - u(0)$  na vzdialenosti  $\Delta r = R - 0$ , teda 2 + 2b

$$F = -D \frac{u(R) - u(0)}{R - 0} = -D \frac{\frac{4\sigma}{c} T(R)^4 - \frac{4\sigma}{c} T(0)^4}{R} = D \frac{4\sigma T_2^4}{cR}. \quad (\text{T11.29}) \quad 6b$$

**C.3** Jednotky veličín vo Fickovom zákone sú

$$[F] = \text{W m}^{-2} = \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}, \quad (\text{T11.30})$$

$$\left[ \frac{\Delta u}{\Delta r} \right] = \text{J m}^{-4}. \quad (\text{T11.31})$$

Z toho plynie

$$[D] = \frac{[F]}{[\Delta u / \Delta r]} = \text{m}^2 \text{s}^{-1}. \quad (\text{T11.32}) \quad 4b$$

Jednotky premenných na pravej strane rovnice  $D = \frac{1}{3} \lambda^\alpha p^\beta v^\gamma$  sú

$$[\lambda] = \text{m}, \quad (\text{T11.33})$$

$$[p] = \text{kg m s}^{-1}, \quad (\text{T11.34})$$

$$[v] = \text{m s}^{-1}. \quad (\text{T11.35})$$

Všimnime si, že hybnosť obsahuje jednotku hmotnosť, zatiaľ čo difúzny koeficient  $D$  nie. Z toho plynie  $\beta = 0$ . Po tomto pozorovaní ľahko nahliadneme, že  $\alpha = 1$  a  $\gamma = 1$ . Výsledná 3b  
rovnica pre difúzny koeficient je

$$D = \frac{1}{3} \lambda v. \quad (\text{T11.36})$$

3b

**C.4** Riešime difúziu fotónov v hviezde, ktoré sa pohybujú rýchlosťou  $v = c$ .

Ostáva nám už len určiť strednú voľnú dráhu  $\lambda$ . Elektróny v hviezde majú zaručene rýchlosť  $v_e \ll c$ , z čoho vyplýva, že ich môžeme považovať za statické body, ktoré sú rovnomerne rozložené v priestore s hustotou  $n_e$ . Nad fotónom teraz uvažujeme ako nad časticou s prierezom 4b  
 $\sigma_e$ . Pri posune o dráhu  $l$  tak v priestore „vytne“ objem  $V = \sigma_e l$ . V tomto objeme sa nachádza  $N_e = n_e V = n_e \sigma_e l$  elektrónov. Stredná voľná dráha  $\lambda$  hovorí o strednej dráhe, ktorú prejde 7b  
častica medzi dvomi zrážkami. Keďže na dráhe  $l$  došlo k  $N_e$  zrážkam, tak priemerná dráha medzi dvomi zrážkami je

$$\lambda = \frac{l}{N_e} = \frac{l}{n_e \sigma_e l} = \frac{1}{n_e \sigma_e}. \quad (\text{T11.37})$$

Pre difúzny koeficient tak dostávame

$$D = \frac{1}{3} \frac{1}{n_e \sigma_e} c. \quad (\text{T11.38})$$

**C.5** V tejto podúlohe pospájame všetko, čo sme si odvodili, dokopy.

Zo symetrie vyplýva, že na povrchu hviezdy bude konštantný svetelný tok  $F$ , preto celkový výkon hviezdy je

$$L = F \cdot 4\pi R^2. \quad (\text{T11.39})$$

Za  $F$  dosadíme z rovnice T11.29

$$F = \frac{c}{3n_e\sigma_e} \frac{4\sigma T_2^2}{cR} = \frac{4\sigma T^4}{3n_e\sigma_e R}. \quad (\text{T11.40}) \quad 8b$$

Hustotu elektrónov vyjadríme cez hmotnosť hviezdy. Ako sme už odvodili, pre celkový počet častíc platí  $N = 2M/m_p$  a takisto  $N = 2N_e$ . Hustotu elektrónov tak vypočítame jednoducho ako

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{\frac{M}{m_p}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3 m_p}. \quad (\text{T11.41}) \quad 8b$$

Dosadením do rovnice T11.40 a následným dosadením do rovnice

$$L = \frac{4\sigma T^4}{3\sigma_e R} \frac{4\pi R^3 m_p}{3M} \cdot 4\pi R^2 = \frac{64\pi^2 \sigma m_p R^4 T^4}{9\sigma_e M}. \quad (\text{T11.42})$$

Napokon ostáva už len dosadenie teploty  $T_2$  z rovnice T11.22:

$$L = \frac{64\pi^2 \sigma m_p R^4}{9\sigma_e M} \cdot \left( \frac{G^4 M^4 m_p^4}{10\,000 k_B^4 R^4} \right) = \left( \frac{64\pi^2 \sigma G^4 m_p^5}{90\,000 \sigma_e k_B^4} \right) M^3. \quad (\text{T11.43}) \quad 8b$$

Z výsledku vidíme, že sa nám krásne vykrátil polomer hviezdy  $R$  a skutočne nám ostala závislosť od fyzikálnych konštánt a  $M$ . Keďže nám vyšlo  $L \propto M^3$ , a teda  $a = 3$ , tak výsledok je najbližšie k 3. intervalu, v ktorom sú hviezdy v intervale hmotností  $2M_\odot < M < 55M_\odot$ .

Najprv si pre prehľadnosť vyčíslime  $\sigma_e \doteq 6,652 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$ . Po vyčíslení zvyšku a pre  $M = M_\odot$  dostaneme

$$L \doteq 2,1 \cdot 10^{27} \text{ W} \doteq 5,5L_\odot. \quad (\text{T11.44})$$

Výsledok je rádovo rovnaký, ako skutočná hodnota svetelného výkonu Slnka. Na to, ako veľmi hrubé odhady sme využili a ako veľmi komplikované procesy prebiehajú v Slnku, to vôbec nie je zlý výsledok.

**T12 Oslava pristátia na Marse II (235 b, autor: Vladimír Slanina)**

Ohlasy obyvateľov oboch planét na darček zaslaný Zemou pri príležitosti dvojstého výročia prvého pristátia človeka na Marse v roku 2230 boli také silné, až sa táto udalosť zapísala do historických análov ako „Deň medziplanetárneho vdakyvzdania“. Politici oboch planét sa zhodli, že by túto udalosť chceli zopakovať. Rovnako ako pri prvom štarte bude raketa štartovať po parabolickej trajektórii (vzhladom na Slnko) tak, že jej vektor rýchlosti bude rovnobežný s obežnou rýchlosťou Zeme. Na to, aby raketa preletela blízko Marsu, musí nastať vhodná konfigurácia Zeme a Marsu. Predpokladajte kruhové orbity Zeme a Marsu a pokiaľ nie je povedané inak, uvažujte iba gravitačný vplyv Slnka.

Môžu sa vám hodiť vzťahy pre pohyb telesa po parabolickej trajektórii, ktoré ste už odvodili na regionálnom kole

$$r = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu}, \quad (\text{T12.1})$$

$$t = \frac{P_{\oplus}\sqrt{2}}{2\pi} \left( \tan \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu}{2} \right), \quad (\text{T12.2})$$

kde  $r$  je okamžitá vzdialenosť,  $r_p$  je vzdialenosť v pericentre,  $\nu$  je pravá anomália,  $t$  je čas, ktorý uplynul od momentu prechodu pericentrom, a  $P_{\oplus}$  je siderická obežná doba Zeme.

- (a) [25 b] Aký uhol  $\alpha_1$  zvierali Zem-Slnko-Mars v čase štartu rakety a aký uhol  $\alpha_2$  budú zvierat v čase preletu rakety okolo Marsu?

Túto udalosť chcú ďalej politici zopakovať v roku, kedy nastane pekné okrúhle výročie. Zhodli sa, že to zopakujú pri príležitosti 300. výročia prvého pristátia na Marse.

- (b) [20 b] Určte s presnosťou na týždeň, v ktorý deň by mohla raketa v roku 2330 priletieť na Mars po parabolickej trajektórii. Posledná opozícia Zeme a Marsu nastala 16. januára 2025.

Doposiaľ sme zanedbávali gravitačný vplyv planét a uvažovali jedine vplyv Slnka. Pri štarte rakety a pri jej prelete v tesnej blízkosti Marsu ale bude na raketu aj na vyhodенý balík pôsobiť najmä gravitácia jednotlivých planét, s ktorou v podúlohách (c) až (g) v blízkosti planét už budeme počítať.

- (c) [10 b] Dokážte, že keď sa raketa pohybuje v blízkosti Zeme alebo Marsu, tak sa pohybuje vo vzťažnej sústave danej planéty po hyperbolickej trajektórii.
- (d) [25 b] Vypočítajte najmenšiu rýchlosť  $\Delta v_1$ , o ktorú musí raketa zrýchliť, aby po opustení zemského gravitačného poľa prešla na uvažovanú parabolickú dráhu voči Slnku. Predpokladajte, že raketa štartuje z nízkej obežnej dráhy Zeme (LEO), teda z výšky  $h_{\oplus} = 400$  km nad zemským povrchom.

- (e) [45 b] Raketa pri Marse nezastaví, ale v momente najväčšieho priblíženia preletí okolo neho vo vzdialenosti  $h_{\mathcal{G}} = 800$  km od povrchu. Vypočítajte rýchlosť rakety  $v'$  v bode najväčšieho priblíženia vo vzťažnej sústave Marsu.

Bez ohľadu na to, aký výsledok ste dostali v podúlohe (e), **počítajte ďalej v podúlohách (f) a (g) s hodnotou  $v' = 20,0$  km s<sup>-1</sup>.**

- (f) [55 b] Keďže raketa na Marse nepristáva, bude musieť mať systém, ktorým by sa balík vedel vystreliť z rakety. Vypočítajte najmenšiu rýchlosť  $\Delta v_2$  vystrelenia balíka vzhľadom na raketu potrebnú na to, aby balík po vystrelení z miesta najväčšieho priblíženia dopadol na povrch Marsu. Balík **nemusí** byť vystrelený rovnobežne so smerom pohybu rakety.
- (g) [35 b] Mars bude pri prelete rakety v jeho blízkosti slúžiť ako gravitačný prak, v dôsledku čoho dôjde k odkloneniu trajektórie od pôvodne uvažovanej parabolickej. Vypočítajte uhol odklonenia  $\psi$  vo vzťažnej sústave Marsu.

Predpokladajme, že raketa pokračovala ďalej po svojej parabolickej dráhe, ktorú sme doposiaľ uvažovali, bez zmeny smeru a rýchlosti v blízkosti Marsu.

- (h) [20 b] Odhadnite vzdialenosť  $d_2$  a latenciu  $\tau_2$  prijímaného signálu medzi Zemou a raketou v čase, keď astronauti v tejto rakete nadobudnú dôchodkový vek. Uvažujte, že boli do vesmíru vyslaní ako 25-roční a pri miere zvyšovania dôchodkov bude v roku 2330 dôchodkový vek 85 rokov. Pripomíname, že latencia je čas, za ktorý sa obojsmerne vymení informácia medzi raketou a Zemou.

- (a) Určme najprv rovnakým spôsobom ako v regionálnom kole čas, ktorý uplynie od štartu rakety do momentu, kedy pretne orbitu Marsu. V tom okamihu pre jej vzdialenosť od Slnka platí  $r = a_{\mathcal{G}}$ , takže podľa rovnice (T12.1) platí

$$a_{\mathcal{G}} = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu}, \quad (\text{T12.3})$$

$$\cos \nu_{\mathcal{G}} = \frac{2r_p}{a_{\mathcal{G}}} - 1 \Rightarrow \nu_{\mathcal{G}} \doteq 71,8^\circ, \quad (\text{T12.4}) \quad 5b$$

a doba letu k Marsu je potom podľa rovnice (T12.2) rovná

$$t = \frac{P_{\oplus} \sqrt{2}}{2\pi} \left( \tan \frac{\nu_{\mathcal{G}}}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu_{\mathcal{G}}}{2} \right) \doteq 69,9 \text{ dní}. \quad (\text{T12.5}) \quad 3b$$

Teraz určme ešte obežnú dobu Marsu pomocou 3. Keplerovho zákona

$$\frac{a_{\mathcal{G}}^3}{P_{\mathcal{G}}^2} = \frac{a_{\oplus}^3}{P_{\oplus}^2} \Rightarrow P_{\mathcal{G}} = P_{\oplus} \left( \frac{a_{\mathcal{G}}}{a_{\oplus}} \right)^{\frac{3}{2}} \doteq 687,2 \text{ dní}. \quad (\text{T12.6}) \quad 5b$$

Počas letu rakety opíšu Zem a Mars na svojich obežných dráhach uhly

$$\Delta\alpha_{\oplus} = \frac{t}{P_{\oplus}} \cdot 360^{\circ} \doteq 68,9^{\circ}, \quad (\text{T12.7}) \quad 2b$$

$$\Delta\alpha_{\delta} = \frac{t}{P_{\delta}} \cdot 360^{\circ} \doteq 36,6^{\circ}. \quad (\text{T12.8}) \quad 2b$$

Vieme teda, že po čase  $t$  bude z pohľadu zo Slnka uhol medzi pôvodnou polohou Zeme a konečnou polohou Marsu  $\alpha_1 + \Delta\alpha_{\delta}$ . Keďže musí presne tento uhol z pohľadu zo Slnka prejsť aj raketa, musí teda platiť

$$\alpha_1 + \Delta\alpha_{\delta} = \nu_{\delta}, \quad (\text{T12.9})$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\alpha_1 = \nu_{\delta} - \Delta\alpha_{\delta} \doteq \boxed{35,2^{\circ}}. \quad (\text{T12.10}) \quad 4b$$

Uhol Zem-Slnko-Mars v čase preletu rakety okolo Marsu už teraz určíme jednoducho, keďže od štartu rakety sa vplyvom obehu Marsu okolo Slnka tento uhol zvýšil o  $\Delta\alpha_{\delta}$  a vplyvom obehu Zeme okolo Slnka sa zase naopak znížil o  $\Delta\alpha_{\oplus}$ . V čase preletu rakety okolo Marsu tak platí

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha_{\delta} - \Delta\alpha_{\oplus} = \nu_{\delta} - \Delta\alpha_{\oplus} \doteq \boxed{2,9^{\circ}}. \quad (\text{T12.11}) \quad 4b$$

(b) Synodickú obežnú dobu Marsu určíme podobne ako na regionálnom kole ako

$$P_{\text{syn}} = \frac{2\pi}{\Omega'_{\delta}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{P_{\delta}} - \frac{2\pi}{P_{\oplus}}} = \frac{1}{\frac{1}{P_{\delta}} - \frac{1}{P_{\oplus}}} \doteq -779,7 \text{ dní}. \quad (\text{T12.12}) \quad 2b$$

Za  $\Delta t = 2330 - 2025 = 305$  rokov prebehne synodických periód približne

$$\frac{\Delta t}{|P_{\text{syn}}|} \doteq 143. \quad (\text{T12.13}) \quad 2b$$

Od poslednej opozície Marsu 16. januára 2025 si tak vieme odpočítať 143 synodických periód, ktoré trvajú  $143 \cdot |P_{\text{syn}}| = 111\,493$  dní. Je pritom dôležité medzivýsledky priebežne nezaokrúhľovať, keďže na časovej škále 305 rokov vie aj malá zmena v siderickej perióde výrazne ovplyvniť výsledný dátum. 3b

Od roku 2025 do roku 2329 je 73 priestupných rokov (násobkov štyroch od 2026 do 2328 je 76, od čoho ale treba ešte odpočítať roky, ktoré sú násobkami 100 a nie sú násobkami 400, čiže roky 2100, 2200 a 2300). Príslušných 305 rokov teda má dokopy  $365 \cdot 305 + 73 = 111\,398$  dní, takže nám ešte ostáva 95 dní do opozície. Potrebujeme teda zistiť deň, ktorý je 95 dní po dátume 16. januára 2330, respektíve zistiť 111. deň v roku 2330. Keďže ide o nepriestupný rok, tak prvé tri mesiace majú dokopy  $31 + 28 + 31 = 90$  dní a ostalo nám ešte 21 dní, takže opozícia nastane 21. apríla 2330. 4b

V čase preletu rakety okolo Marsu však nebol Mars v opozícii, ale uhol Zem-Slnko-Mars mal podľa výsledku podúlohy (a) veľkosť  $\alpha_2 \doteq 2,9^\circ$ . Keďže má Zem vyššiu obehovú uhlovú rýchlosť, tak sa veľkosť tohto uhla v čase zmenšuje, pričom na pôvodnú hodnotu sa vráti za jednu synodickú periódu  $P_{\text{syn}}$ . Z veľkosti  $\alpha_2$  sa tak tento uhol zmenší na nulovú veľkosť (teda na veľkosť prislúchajúcu opozícii Marsu) za čas

$$\frac{\alpha_2}{360^\circ} \cdot |P_{\text{syn}}| \doteq 6 \text{ dní}. \quad (\text{T12.14}) \quad 4b$$

Práve o takýto časový úsek skôr, než nastane opozícia Marsu, tak môže raketa priletieť na Mars, čo teda nastane približne 15. apríla 2330. Keďže je synodická perióda Marsu väčšia než 1 rok, tak žiaden iný vhodný okamih v roku 2330 už určite nenastane. 2b

- (c) V blízkosti Zeme musí mať raketa dostatočnú rýchlosť nielen na únik z gravitačného poľa Zeme, ale aj na následný únik z gravitačného poľa Slnka. To však znamená, že po úniku z gravitačného poľa Zeme jej vzhľadom na Zem musí ostať ešte nejaká nenulová zostatková rýchlosť. Keďže na okraji sféry vplyvu má raketa voči Zemi kladnú kinetickú energiu a nulovú potenciálnu energiu, tak jej celková mechanická energia vo vzťažnej sústave Zeme je nutne kladná ( $E > 0$ ), takže sa musí v jej blízkosti skutočne pohybovať po hyperbolickej trajektórii. 5b

V blízkosti Marsu vieme argumentovať veľmi podobne, že po úniku z gravitačného poľa Marsu musí mať raketa stále dostatočnú rýchlosť aj na únik z gravitačného poľa Slnka. Druhým spôsobom je zamerať sa na to, že do oblasti gravitačného vplyvu Marsu vletí raketa nenulovou rýchlosťou, a tak touto istou rýchlosťou z danej sféry určite aj vyletí. Oba tieto pohľady vedú opäť k tomu, že po úniku z gravitačného poľa Marsu má raketa kladnú energiu voči nemu, z čoho jasne vyplýva, že sa v jeho blízkosti pohybuje po hyperbolickej trajektórii. 5b

- (d) Rozdelme si túto podúlohu na dve časti, a to na únik z gravitačného poľa Slnka a na únik z gravitačného poľa Zeme. Určme teda najprv, akou rýchlosťou  $v_{\infty, \oplus}$  sa bude musieť raketa pohybovať voči Zemi v nekonečne, aby mala stále dostatočnú rýchlosť na únik z gravitačného poľa Slnka. V tom jej bude pomáhať rýchlosť Zeme voči Slnku 6b

$$v_{\oplus} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{P_{\oplus}} \doteq 29,8 \text{ km s}^{-1}, \quad (\text{T12.15}) \quad 3b$$

a tak pre jej vlastnú rýchlosť po úniku z gravitačného poľa Zeme musí platiť

$$\frac{1}{2}m(v_{\infty, \oplus} + v_{\oplus})^2 - \frac{GM_{\odot}m}{a_{\oplus}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\infty, \oplus} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_{\oplus}}} - v_{\oplus} \doteq 12,3 \text{ km s}^{-1}. \quad (\text{T12.16}) \quad 5b$$

V gravitačnom poli Zeme sa zase raketa pohybuje po nízkej obežnej dráhe Zeme s počiatočnou rýchlosťou voči Zemi

$$v_{\text{LEO}} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h_{\oplus}}} \doteq 7,67 \text{ km s}^{-1}. \quad (\text{T12.17}) \quad 3b$$

Počiatková energia rakety pritom musí byť rovnaká ako jej zostatková kinetická energia po opustení gravitačného poľa Zeme, takže pre potrebný rozdiel rýchlosti bude platiť

$$\frac{1}{2}m(v_{\text{LEO}} + \Delta v_1)^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h_{\oplus}} = \frac{1}{2}mv_{\infty, \oplus}^2, \quad (\text{T12.18}) \quad 5b$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{v_{\infty, \oplus}^2 + \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h_{\oplus}}} - v_{\text{LEO}} \doteq \boxed{8,76 \text{ km s}^{-1}}. \quad (\text{T12.19}) \quad 3b$$

*Poznámka: Ak by sme sa pokúšali spraviť celý výpočet potrebnej únikovej rýchlosti priamočiaro cez zákon zachovania energie, teda úvahou, že počiatková kinetická energia sa spotrebuje na nárast potenciálnej energie voči Slnku aj voči Zemi, dostali by sme nesprávny výsledok. Museli by sme totiž celé počítať v jednej vzťažnej sústave (napr. vo vzťažnej sústave Slnka), v ktorej sa však Zem, voči ktorej by sme tiež počítali potenciálnu energiu, pohybuje. V skutočnosti sa tak raketa nachádza v pohybujúcom sa gravitačnom poli, ktoré na ňu koná prácu, čím sa mení jej celková energia voči Slnku, čo takýto jednoduchý prístup nezohľadňuje. Môžeme si tiež uvedomiť, že takýto postup, pri ktorom by sme chceli „naraz“ vyriešiť únik rakety z gravitačného poľa Zeme aj Slnka, nedokáže rozlíšiť medzi obežnou rýchlosťou Zeme (ktorá rakete pomáha pri úniku z gravitačného poľa Slnka, no nie pri úniku z gravitačného poľa Zeme) a pôvodnou obežnou rýchlosťou rakety  $v_{\text{LEO}}$  vo vzťažnej sústave Zeme (ktorá pomáha rakete už aj pri úniku z gravitačného poľa Zeme).*

(e) Pri vstupe do sféry gravitačného vplyvu Marsu sa raketa pohybuje vzhľadom na Slnko po parabolickej trajektórii, takže pre jej rýchlosť  $v_{\text{vstup}}$  voči Slnku v danom okamihu bude platiť

$$\frac{1}{2}mv_{\text{vstup}}^2 - \frac{GM_{\odot}m}{a_{\delta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{vstup}} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_{\delta}}} \doteq 34,1 \text{ km s}^{-1}. \quad (\text{T12.20}) \quad 3b$$

Vo vzťažnej sústave Marsu však bude rýchlosť rakety v nekonečne o niečo iná, keďže aj Mars sa voči Slnku pohybuje nejakou rýchlosťou. Konkrétne, keďže Mars sa pohybuje rýchlosťou  $v_{\delta} = \sqrt{GM_{\odot}/a_{\delta}} \doteq 24,1 \text{ km s}^{-1}$  čisto v tangenciálnom smere voči Slnku, tak ak si rýchlosť rakety  $v_{\text{vstup}}$  vo vzťažnej sústave Slnka rozložíme na radiálnu zložku  $v_{\text{vstup},r}$  a na tangenciálnu zložku  $v_{\text{vstup},t}$ , vo vzťažnej sústave Marsu sa radiálna zložka rýchlosti nezmení a tangenciálna zložka sa zmenší o obežnú rýchlosť Marsu, takže jednotlivé zložky rýchlosti rakety v nekonečne voči Marsu budú

$$v_{\infty, \delta, r} = v_{\text{vstup}, r}, \quad (\text{T12.21}) \quad 7b$$

$$v_{\infty, \delta, t} = v_{\text{vstup}, t} - v_{\delta}. \quad (\text{T12.22}) \quad 7b$$

Teraz určme príslušné zložky rýchlosti  $v_{\text{vstup}}$ . Keďže poznáme jej celkovú veľkosť, vieme, že

$$v_{\text{vstup}}^2 = v_{\text{vstup}, r}^2 + v_{\text{vstup}, t}^2, \quad (\text{T12.23})$$

a tak nám stačí určiť už iba jednu z týchto zložiek a druhú dopočítať pomocou tohto vzťahu.

Lahko pritom vieme určiť tangenciálnu zložku pomocou zákona zachovania momentu hybnosti porovnaním s miestom úniku zo sféry gravitačného vplyvu Zeme, v ktorom je celá úniková rýchlosť  $v_p$  voči Slnku tangenciálna a má veľkosť

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a_\oplus}} \doteq 42,1 \text{ km s}^{-1}. \quad (\text{T12.24}) \quad 3b$$

Zo zákona zachovania momentu hybnosti teda pre  $v_{\text{vstup},t}$  dostávame

$$mv_{\text{vstup},t}a_\delta = mv_p a_\oplus \quad \Rightarrow \quad v_{\text{vstup},t} = v_p \frac{a_\oplus}{a_\delta} \doteq 27,6 \text{ km s}^{-1}, \quad (\text{T12.25}) \quad 9b$$

a radiálna zložka rýchlosti  $v_{\text{vstup}}$  je potom

$$v_{\text{vstup},r} = \sqrt{v_{\text{vstup}}^2 - v_{\text{vstup},t}^2} \doteq 20,0 \text{ km s}^{-1}. \quad (\text{T12.26}) \quad 5b$$

Vo vzťažnej sústave Marsu má teda raketa v nekonečne rýchlosť pozostávajúcu z oboch zložiek podľa vzťahov (T12.21) a (T12.22), takže táto celková rýchlosť v nekonečne voči Marsu bude mať veľkosť

$$v_{\infty,\delta} = \sqrt{v_{\infty,\delta,r}^2 + v_{\infty,\delta,t}^2} = \sqrt{v_{\text{vstup},r}^2 + (v_{\text{vstup},t} - v_\delta)^2} \doteq 20,3 \text{ km s}^{-1}. \quad (\text{T12.27}) \quad 5b$$

Teraz už stačí pracovať len vo vzťažnej sústave Marsu a v nej zo zákona zachovania energie vyjadriť rýchlosť rakety v bode najväčšieho priblíženia vo vzdialenosti  $R_\delta + h_\delta$  od jeho stredu, čím dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_{\infty,\delta}^2 = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GM_\delta m}{R_\delta + h_\delta} \quad \Rightarrow \quad v' = \sqrt{v_{\infty,\delta}^2 + \frac{2GM_\delta}{R_\delta + h_\delta}} \doteq \boxed{20,8 \text{ km s}^{-1}}. \quad (\text{T12.28}) \quad 6b$$

- (f) Ďalej už uvažujeme iba pohyb v blízkosti Marsu, teda môžeme zanedbať gravitačné pôsobenie Slnka. Zamyslime sa teraz nad tým, ako čo najvýhodnejšie vybrať rýchlosť vystrelenia balíka. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že keď vystrelíme balík priamo za loď tak, aby sa z trajektórie stala elipsa s apocentrom v  $r_0 = R_\delta + h_\delta$  a pericentrom v  $R_\delta$ , tak to bude najvýhodnejšie. V skutočnosti je však ešte energeticky výhodnejšie nechať balík letieť po hyperbolickej trajektórii a len ho „nasmerovať“ tak, aby jeho pericentrum bolo v  $R_\delta$ , čo podložíme aj príslušnými rovnicami. Balík teda vo všeobecnosti môžeme vystreliť šikmo vzhľadom na vektor rýchlosti rakety.

Celkovú rýchlosť balíka vieme rozložiť na zložku  $v_r$  v radiálnom smere a na zložku  $v_t$  v tangenciálnom smere. Keďže je rýchlosť rakety  $v'$  v bode najväčšieho priblíženia čisto tangenciálna, tak pre celkovú zmenu rýchlosti balíka dostávame

$$\Delta v_2^2 = v_r^2 + (v_t - v')^2, \quad (\text{T12.29}) \quad 5b$$

Zo zákona zachovania momentu hybnosti pre balík platí

$$mv_t r_0 = mv_p R_{\mathcal{G}} \quad \Rightarrow \quad v_p = \frac{r_0}{R_{\mathcal{G}}} v_t, \quad (\text{T12.30}) \quad 8b$$

kde  $v_p$  je rýchlosť balíka v pericentre jeho novej trajektórie (teda na povrchu Marsu). Teraz porovnáme bod vystrelenia a pericentrum aj pomocou zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2}(v_r^2 + v_t^2) - \frac{GM_{\mathcal{G}}}{r_0} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_{\mathcal{G}}}{R_{\mathcal{G}}}. \quad (\text{T12.31}) \quad 5b$$

Dosadením  $v_p$  z rovnice (T12.30) vyjadríme  $v_r^2$

$$v_r^2 = \left[ \left( \frac{r_0}{R_{\mathcal{G}}} \right)^2 - 1 \right] v_t^2 - 2GM_{\mathcal{G}} \left( \frac{1}{R_{\mathcal{G}}} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (\text{T12.32})$$

Tento výraz vieme teraz dosadiť do rovnice (T12.29), čím dostaneme

$$\Delta v_2^2 = \left[ \left( \frac{r_0}{R_{\mathcal{G}}} \right)^2 - 1 \right] v_t^2 - 2GM_{\mathcal{G}} \left( \frac{1}{R_{\mathcal{G}}} - \frac{1}{r_0} \right) + (v_t - v')^2, \quad (\text{T12.33})$$

$$\Delta v_2^2 = \left( \frac{r_0}{R_{\mathcal{G}}} \right)^2 v_t^2 - 2v'v_t + v'^2 - \frac{2GM_{\mathcal{G}}h_{\mathcal{G}}}{R_{\mathcal{G}}r_0}. \quad (\text{T12.34}) \quad 20b$$

Všimnime si, že sa nám teraz úspešne podarilo vyjadriť si druhú mocninu potrebnej zmeny rýchlosti ako kvadratickú závislosť od  $v_t$ . Pre nájdenie optimálnej rýchlosti  $v_t$  môžeme buď pravú stranu tejto rovnice zderivovať, alebo spomenúť si na to, že vrchol grafu kvadratickej funkcie  $ax^2 + bx + c$  nastáva pre  $x = -\frac{b}{2a}$ . Pre optimálne  $v_t$  tak dostávame napokon krásny vzťah

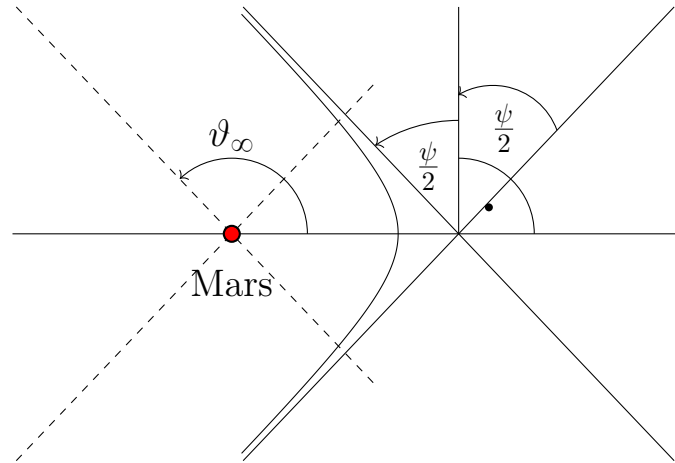
$$v_t = \frac{2v'}{2\left(\frac{r_0}{R_{\mathcal{G}}}\right)^2} = v' \left( \frac{R_{\mathcal{G}}}{r_0} \right)^2. \quad (\text{T12.35}) \quad 9b$$

Dosadením späť do rovnice (T12.34) napokon získame

$$\Delta v_2^2 = v'^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_{\mathcal{G}}}{r_0} \right)^2 \right] - \frac{2GM_{\mathcal{G}}h_{\mathcal{G}}}{R_{\mathcal{G}}r_0}. \quad (\text{T12.36}) \quad 3b$$

Po dosadení  $v' = 20,0 \text{ km s}^{-1}$  a vyčíslení dostávame  $\Delta v_2 \doteq 11,5 \text{ km s}^{-1}$ . 5b

- (g) V blízkosti Marsu sme zanedbávali gravitačné pôsobenie Slnka. Ak by ale Mars gravitačne nepôsoobil na raketu, tak by jej trajektóriou bola vo vzťažnej sústave Marsu približne priamka daná pôvodným vektorom rýchlosti, s akým raketa prišla z nekonečna. Pri gravitačnom pôsobení ale dôjde k odklonu jej trajektórie o uhol rovný dvojnásobku uhla, ktorý asymptota zvierá s  $y$ -ovou osou (pozri obrázok T12.1). Tento uhol bude mať teda veľkosť  $\psi/2$ .



Obr. T12.1: Vyznačenie uhlov súvisiacich s asymptotami hyperbolickej trajektórie rakety

Z polárnej rovnice hyperboly a z podmienky kladnej vzdialenosti  $r$  vyplýva, že existujú hodnoty pravej anomálie  $\vartheta$ , ktoré raketa nemôže nadobudnúť. Hraničná hodnota je daná nulovou hodnotou menovateľa

$$1 + e \cos \vartheta_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \vartheta_\infty = -\frac{1}{e}. \quad (\text{T12.37}) \quad 8b$$

Jednoduchou geometriou vieme z obrázka T12.1 určiť, že

$$\vartheta_\infty = 90^\circ + \frac{\psi}{2}. \quad (\text{T12.38}) \quad 6b$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice (T12.37) a využitím  $\cos(90^\circ + x) = -\sin x$  dostávame

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{1}{e}. \quad (\text{T12.39}) \quad 3b$$

Ostáva už len určiť excentricitu  $e$ . Využijeme na to vzťah z konštantovníka pre *semi-latus rectum*. Na to potrebujeme ešte poznať dĺžku hlavnej polosi, ktorú získame z rovnice vis-viva

$$v'^2 = GM_\delta \left( \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v'^2}{GM_\delta}. \quad (\text{T12.40}) \quad 5b$$

Dosadením do vzťahu pre *semi-latus rectum* získame

$$e^2 = 1 - \frac{L^2}{GM_\delta m^2 a} = 1 - \frac{(mv' r_0)^2}{GM_\delta m^2 a} = 1 - \frac{v'^2 r_0^2}{GM_\delta} \left( \frac{2}{r_0} - \frac{v'^2}{GM_\delta} \right), \quad (\text{T12.41}) \quad 8b$$

odkiaľ po dosadení  $v' = 20,0 \text{ km s}^{-1}$  a vyčíslení máme  $e \doteq 38,2$ . Z toho pre uhol odklonenia dostávame

$$\boxed{\psi = 2 \arcsin \frac{1}{e} \doteq 3,00^\circ}. \quad (\text{T12.42}) \quad 5b$$

- (h) Na určenie vzdialenosti cez polárne vyjadrenie paraboly potrebujeme určiť uhol  $\nu_2$ , v ktorom sa nachádza raketa v čase  $t_2 = (85 \text{ rokov}) - (25 \text{ rokov}) = 60 \text{ rokov}$  od vyštartovania rakety. Na to potrebujeme numericky vyriešiť rovnicu (T12.2). 1b

Opakujúci sa výraz  $\tan \frac{\nu}{2}$  navádza zaviesť substitúciu  $x = \tan \frac{\nu_2}{2}$ , kedy dostávame

$$t_2 = \frac{P_{\oplus} \sqrt{2}}{2\pi} \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right). \quad (\text{T12.43}) \quad 3b$$

Vhodným spôsobom, ako sa pri takto jednoduchšej rovnici rýchlo dopracovať k výsledku, je iteratívna metóda. V našom prípade máme na výber 2 možnosti, z ktorých si vyjadríme  $x$  – buď z kubického, alebo z lineárneho člena. Pri vyjadrení podľa lineárneho člena by sme ale veľmi rýchlo zistili, že rovnica diverguje, a teda pomocou nej nebudeme vedieť nájsť naše riešenie. Po vyjadrení  $x$  z kubického člena dostaneme

$$x = \sqrt[3]{3 \left( \frac{t_2}{P_{\oplus}} \pi \sqrt{2} - x \right)}. \quad (\text{T12.44}) \quad 6b$$

Ako počiatočnú hodnotu si môžeme zvoliť napríklad  $x_1 = 1$ . Po niekoľkých iteráciách výsledok skonverguje k číslu  $x \doteq 9,174$ , z čoho vieme vypočítať uhol 3b

$$\nu_2 = 2 \arctan x \doteq 167,6^\circ. \quad (\text{T12.45}) \quad 2b$$

Pre vzdialenosť od Slnka potom dostávame

$$r_{2\odot} = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu_2} \doteq 85,2 \text{ au}. \quad (\text{T12.46}) \quad 2b$$

Táto vzdialenosť je rádovo väčšia ako vzdialenosť Slnka a Zeme, teda pre vzdialenosť rakety od Zeme dostávame  $d_2 \approx r_{2\odot} \doteq 85 \text{ au}$ . Alternatívne by sme vedeli použiť kosínusovú vetu v trojuholníku Zem-Slnko-raketa a dopočítat tak presnejšiu hodnotu tejto vzdialenosti. 2b

Pre latenciu z definície dostávame  $\tau_2 = 2d_2/c \doteq 24 \text{ h}$ . Inými slovami, ak by astronauti z rakety poslali na Zem nejakú správu, tak by na odpoveď čakali aspoň približne jeden deň. 2b

# Dátová analýza

## D1 Slnčná II

(170b, autor: Terézia Hanáková)

Počas roka si môžeme všimnúť zaujímavý jav: Slnko sa na oblohe nepohybuje rovnomerne. Ak by sme totiž každý deň presne na poludnie (keď nám naše hodinky budú ukazovať 12:00) odfotili polohu Slnka na oblohe, zistili by sme, že nie je vždy na rovnakom mieste. Preto zavádzame pojmy pravého a stredného slnečného času.

Pravý slnečný čas  $T_P$  je čas, ktorý je určený hodinovým uhlom pravého (skutočného) Slnka, teda Slnka, ktoré vidíme na oblohe počas každého dňa. Tento čas je však v praxi ťažko použiteľný, a preto sa zaviedol pojem stredného slnečného času  $T_S$ , ktorý je určený hodinovým uhlom stredného (fiktívneho) Slnka. Stredné Slnko je myslený objekt, ktorý sa pohybuje po ekliptike tak, že jeho priemet na svetový rovník sa pohybuje pozdĺž neho úplne rovnomerne. Z neho je odvodený bežný 24-hodinový občiansky deň, ktorý používame v bežnom živote.

Rozdiel medzi týmito dvoma časmi sa nazýva časová rovnica

$$C = T_P - T_S. \quad (\text{D1.1})$$

Hodnota veličiny  $C$  môže nadobúdať kladné aj záporné hodnoty v závislosti od toho, či sa pravé Slnko oproti strednému (rovnomernému) času predbieha alebo oneskoruje. Graficky sú hodnoty  $C$  v závislosti od dňa v roku v priloženom grafe na obr. D1.1.

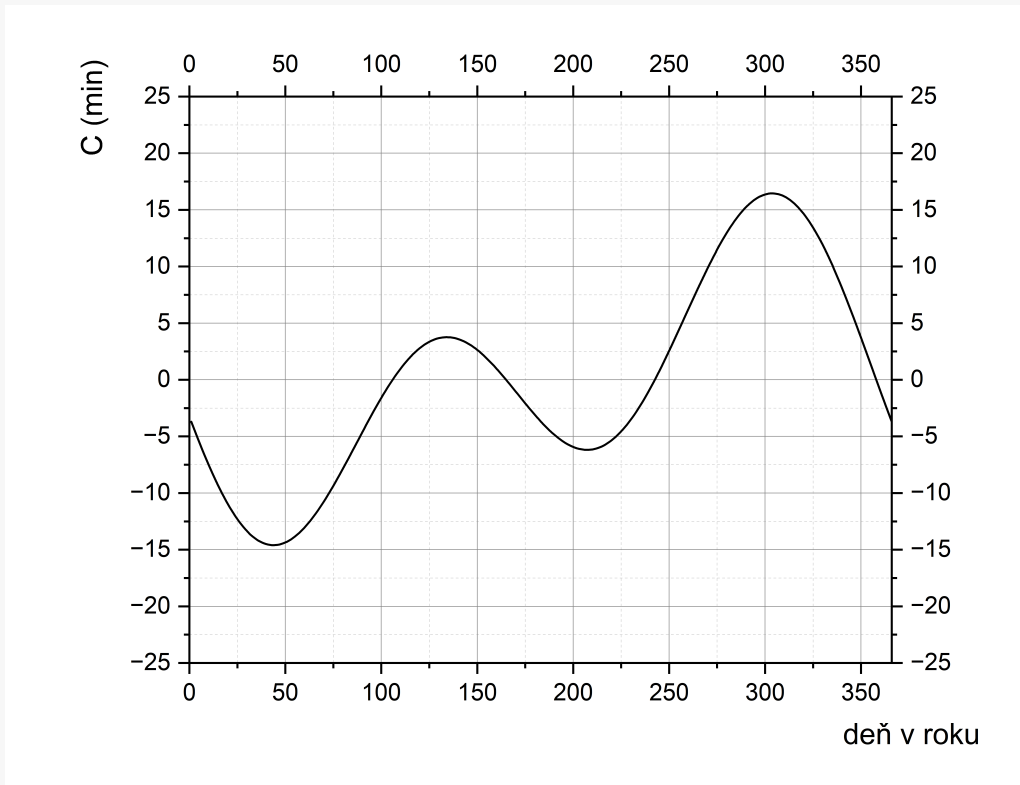
Výsledná časová rovnica je kombináciou dvoch vplyvov. Po prvé, to je excentricita dráhy Zeme, ktorá spôsobuje rozdiely medzi pravou ( $\nu$ ) a strednou ( $M$ ) anomáliou Zeme, čo pri pohľade zo Zeme spôsobuje nerovnomerný pohyb Slnka pozdĺž ekliptiky. Vplyv excentricity je nulový v perihéliu (3. 1.) a v aféliu (6. 7.). Po druhé, aj keby bola dráha Zeme kruhová a pohyb Slnka pozdĺž ekliptiky rovnomerný, tak by sa jeho priemet na nebeský rovník nepohyboval pozdĺž neho rovnomerne. To je spôsobené súradnicovou transformáciou medzi ekliptikálnymi a rovníkovými súradnicami, ktorá dáva zhodné hodnoty ekliptikálnej dĺžky a rektascenzie iba počas jarnej rovnodennosti (20. 3.), letného slnovratu (21. 6.), jesennej rovnodennosti (23. 9.) a zimného slnovratu (22. 12.).

Vplyv excentricity aj súradnicovej transformácie vieme aproximovať sínusovými závislosťami. Výsledná časová rovnica je zložením týchto dvoch závislostí. Pre malú excentricitu dráhy ( $e < 0.1$ ) a malý sklon rotačnej osi voči kolmici na rovinu orbity ( $\varepsilon < 30^\circ$ ) platí pre rozdiel

pravého a stredného slnečného času  $C$  v minútach približný vzťah

$$C \approx \frac{720}{\pi} \left( -2e \sin(M) - \tan^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(2M + M_0) \right), \quad (\text{D1.2})$$

kde  $M$  je stredná anomália a  $M_0$  konštanta.



Obr. D1.1: Hodnoty veličiny  $C$ , definovanej rovnicou (D1.1), v časových minútach počas roka. Deň v roku je poradové číslo dňa od začiatku tohto kalendárneho roka, teda číslo 1 zodpovedá 1. 1. 2026. Zdroj dát: Stellarium. Graf bol vytvorený v OriginPro.

Rozdiel pravej a strednej anomálie ( $\nu - M$ ) je zodpovedný za „excentrický“ člen  $C$ , teda za časť časovej rovnice, ktorá je spôsobená excentricitou. Táto časť je presne rovná zápornej hodnote ( $\nu - M$ ) pre nulový sklon  $\varepsilon$ . Pre nenulový sklon  $\varepsilon$  to už platí iba približne, pričom výraznejšie sa to začne rozchádzať pre  $\varepsilon > 30^\circ$ .

Časovú rovnicu vieme takisto graficky znázorniť takzvanou *analémou*, čo je závislosť deklinácie Slnka od hodnoty  $C$  z časovej rovnice (D1.1). Analéma znázorňuje polohy Slnka na oblohe, ak by sme ho každý deň odfotili o 12:00 stredného slnečného času. Podobne ako časovú rovnicu, aj graf analémy je možné rozložiť na vplyv excentricity (zobrazený červenou) a súradnicovej transformácie (zobrazený modrou). Tieto dva vplyvy sa sčítavajú v horizontálnom smere, v ktorom je v analémach vynášaná hodnota  $C$ . Vertikálna súradnica analémy je rovná deklinácii Slnka v daný deň. Rovnako krivky vplyvu od excentricity a súradnicovej transformácie zobrazíme vo vertikálnom smere podľa deklinácie Slnka. Deklinácie Slnka vo vybraných dňoch roka sú uvedené v tabuľke D1.1.


pozorovanie	deň v roku	deklinácia	pozorovanie	deň v roku	deklinácia
1	1.	$-23,00^\circ$	19	203.	$20,25^\circ$
2	2.	$-22,92^\circ$	20	213.	$17,93^\circ$
3	9.	$-22,20^\circ$	21	224.	$14,77^\circ$
4	17.	$-20,90^\circ$	22	241.	$8,89^\circ$
5	24.	$-19,40^\circ$	23	244.	$7,76^\circ$
6	32.	$-17,50^\circ$	24	266.	$-0,96^\circ$
7	41.	$-14,89^\circ$	25	274.	$-4,16^\circ$
8	60.	$-8,28^\circ$	26	282.	$-7,29^\circ$
9	80.	$-0,40^\circ$	27	296.	$-12,39^\circ$
10	81.	$0,00^\circ$	28	305.	$-15,31^\circ$
11	91.	$4,01^\circ$	29	315.	$-17,40^\circ$
12	120.	$14,57^\circ$	30	322.	$-19,78^\circ$
13	121.	$14,89^\circ$	31	326.	$-20,60^\circ$
14	140.	$19,91^\circ$	32	335.	$-22,08^\circ$
15	160.	$22,92^\circ$	33	346.	$-23,10^\circ$
16	172.	$23,44^\circ$	34	355.	$-23,44^\circ$
17	182.	$23,12^\circ$	35	360.	$-23,35^\circ$
18	200.	$20,83^\circ$			

Tabuľka D1.1: Hodnoty deklinácie Slnka počas vybraných 35 dní kalendárneho roka 2026. Poradové číslo 1. prislúcha 1. 1. 2026.

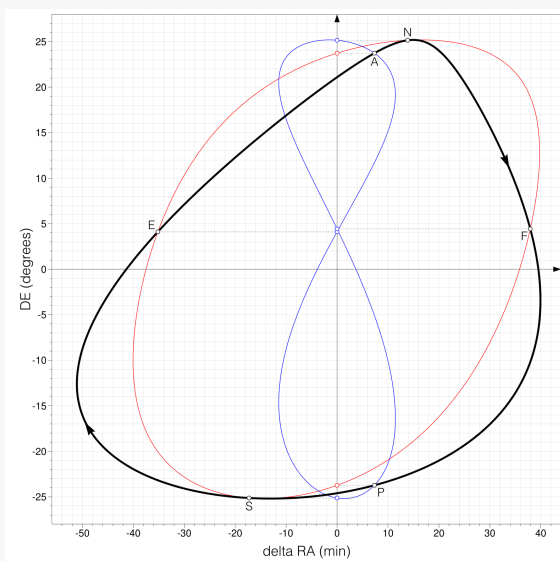
## Úlohy

- (a) [70 b] Pomocou priloženého grafu závislosti  $C$  na poradovom čísle dňa a tabuľky D1.1 vykreslite na milimetrový papier analému Slnka.
- (b) [10 b] Kedy má pravý a stredný slnečný čas najväčšiu odchýlku? Kedy sa naopak tieto časy rovnajú? Napíšte dátumy.
- (c) [10 b] Načrtnite a odôvodnite, ako vyzerá analéma vzhľadom na horizont na severnom a južnom póle Zeme.
- (d) [40 b] Najväčší rozdiel pravej a strednej anomálie ( $\nu - M$ ) očakávame okolo hodnoty  $M = \frac{\pi}{2}$ . Pomocou Keplerovej rovnice z konštantovníka numericky vypočítajte excentrickú anomáliu  $E$ , ktorá zodpovedá tejto strednej anomálii  $M$ . Následne prepočítajte  $E$  na pravú anomáliu  $\nu$  (opäť vám pomôže konštantovník) a určte hodnotu ( $\nu - M$ ). Tú porovnajte s hodnotou  $C$  podľa rovnice (D1.2) pre  $M = \frac{\pi}{2}$  a  $\varepsilon = 0$  (nulový sklon rotačnej osi voči kolmici na rovinu orbity).
- (e) [40 b] V tabuľke D1.2 nižšie nájdete excentricity ( $e$ ) a sklony rotačných osí voči kolmici na rovinu orbity ( $\varepsilon$ ) pre planéty slnečnej sústavy. Vašou úlohou je priradiť správnu planétu slnečnej sústavy pre každú priloženú analému. Tie sú vykreslené vzhľadom

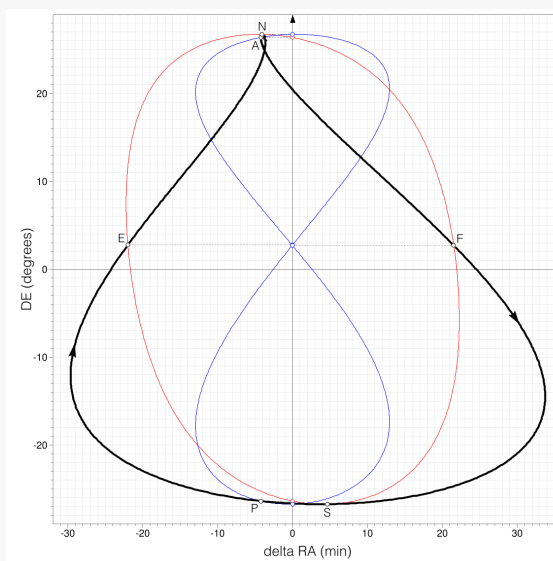
na nebeský rovník a ekliptiku, ktoré sú definované rovníkom a orbitou dráhy danej neznámej planéty.

	Merkúr	Venuša	Mars	Jupiter	Saturn	Urán	Neptún
$e$	0,2	0	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01
$\varepsilon$	$< 10^\circ$	$> 170^\circ$	$\sim 25^\circ$	$< 10^\circ$	$\sim 25^\circ$		$\sim 25^\circ$

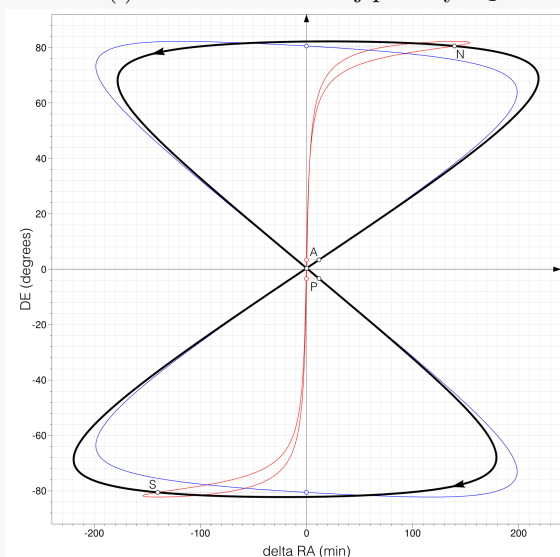
Tabuľka D1.2: Excentricity ( $e$ ) a sklony rotačných osí voči kolmiciam na roviny orbít ( $\varepsilon$ ) planét slnečnej sústavy. Údaj sklonu rotačnej osi pre Urán niekto omylom zamazal.



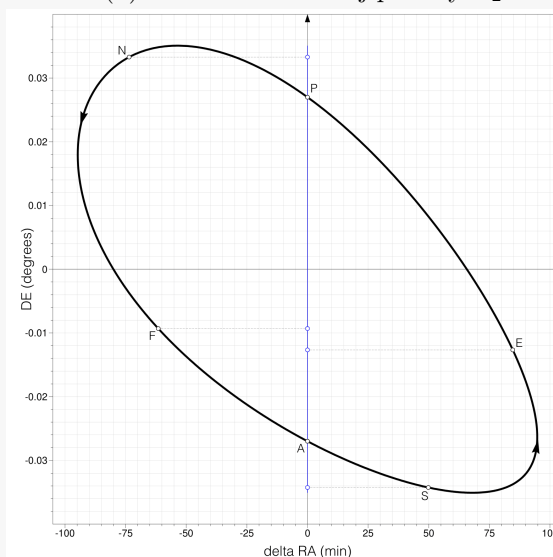
(i) Analéma neznámej planéty  $X_1$ .



(ii) Analéma neznámej planéty  $X_2$ .



(i) Analéma neznámej planéty  $X_3$ .



(ii) Analéma neznámej planéty  $X_4$ .

Obr. D1.3: Analémy štyroch neznámych planét.

- (a) Prvou úlohou je vytvoriť graf analémy, čiže graf závislosti deklinácie Slnka  $\delta_{\odot}$  od hodnoty  $C$ . V tabuľke D1.1 máme zaznamenaných 35 pozorovaní z rôznych dní počas roka a hodnoty deklinácie Slnka počas nich. Hodnoty  $C$  síce priamo zadané nemáme, ale vieme ich zistiť z grafu D1.1. Vieme ich odčítať pre všetky potrebné dni a následne vytvoriť tabuľku D1.3 hodnôt  $C$  a deklinácií Slnka a priamo z nich potom vytvoriť graf D1.4.

70b

Hodnoty na vertikálnej osi, na ktorú vynášame hodnoty deklinácie Slnka  $\delta_{\odot}$ , sú v rozmedzí od cca  $-25^{\circ}$  do  $25^{\circ}$ , čo vidíme rovno z tabuľky D1.3, čiže pre túto os si vieme zvoliť, aby začínala na hodnote  $-25^{\circ}$  a končila na  $25^{\circ}$ .

Samozrejme bolo potrebné vynášať body čo najpresnejšie napríklad pentelkou alebo zastrúhanou ceruzkou. Hodnoty  $C$  sme však, ako vidíme v tabuľke D1.3, nemohli udať presnejšie ako na 1 desatinné miesto. Chybou by bolo písať tieto čísla s príliš veľkou presnosťou, ktorú nevieme z odčítania hodnôt  $C$  z grafu D1.1 dosiahnuť.

- (b) Najväčšiu odchýlku pravého  $T_P$  a stredného slnečného  $T_S$  času môžeme vidieť z grafu D1.1. Ak sa pozrieme na čiaru rovnobežnú s vodorovnou osou vychádzajúcu z bodu nula, tak vieme odčítať, že najväčšia odchýlka sa nachádza v bode najväčšieho extrému na danom grafe. To je na hodnote 304. dňa. Konkrétny deň si vypočítame jednoducho, je to totiž presne hodnota  $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31$ , čo dáva 31. október 2026.

5b

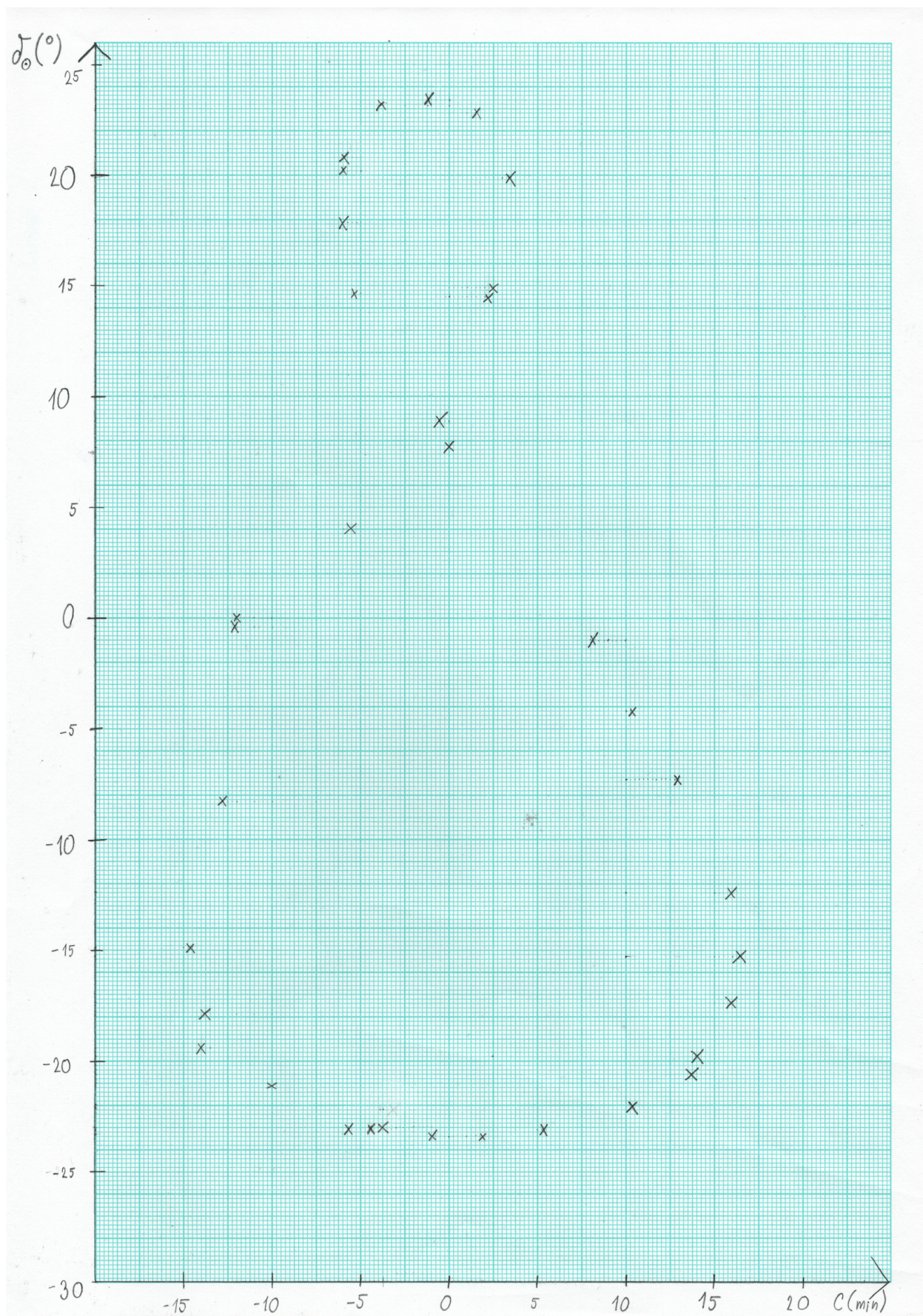
Z rovnakého grafu vieme určiť aj dátumy, kedy sa pravý slnečný a stredný slnečný čas rovnajú. Vtedy je totiž hodnota  $C$  podľa rovnice (D1.1) nulová. Stačí sa preto pozrieť na to, kedy vodorovná čiara vychádzajúca z nuly pretína zobrazený graf D1.1. Vidíme, že to sa deje na štyroch miestach a po obdobnom odčítaní zistíme, že sú to hodnoty 106., 165., 243. a 358. dňa. Čiže sú to štyri dátumy: 16. apríl, 14. jún, 31. august a 24. december.

5b

*Poznámka: K určeniu extrémov by sme teoreticky mohli použiť aj graf analémy D1.4 pomocou interpolácie, teda procesu, pri ktorom sa pomocou známych bodov grafu pokúšame odhadnúť neznáme hodnoty medzi nimi. V našom prípade by to znamenalo preložiť vnesené body na milimetrovom papieri súvislou krivkou. Odčítanie hodnôt z grafu časovej rovnice je však presnejšie. Tento graf totiž zobrazuje časovú odchýlku priamo v závislosti od dní v roku. Na grafe analémy sú dátumy rozložené pozdĺž zložitej slučky, čo sťažuje ich presné priradenie. Pri ručnej interpolácii analémy navyše vzniká subjektívna chyba pri hľadaní bodu, kde je krivka najviac „vpravo“.*

pozorovanie	deň v roku	$\delta_{\odot}$ (°)	C (min)
1	1.	-23,00	-3,8
2	2.	-22,92	-4,4
3	9.	-22,20	-6,9
4	17.	-20,90	-10,0
5	24.	-19,40	-11,6
6	32.	-17,50	-13,8
7	41.	-14,89	-14,7
8	60.	-8,28	-12,8
9	80.	-0,40	-8,1
10	81.	0,00	-8,0
11	91.	4,01	-4,5
12	120.	14,57	2,2
13	121.	14,89	2,5
14	140.	19,91	3,4
15	160.	22,92	1,6
16	172.	23,44	-0,9
17	182.	23,12	-3,1
18	200.	20,83	-5,9
19	203.	20,25	-6,1
20	213.	17,93	-6,1
21	224.	14,77	-5,3
22	241.	8,89	-0,6
23	244.	7,76	0,0
24	266.	-0,96	8,1
25	274.	-4,16	10,3
26	282.	-7,29	13,1
27	296.	-12,39	15,9
28	305.	-15,31	16,6
29	315.	-17,40	15,9
30	322.	-19,78	14,1
31	326.	-20,60	13,8
32	335.	-22,08	10,3
33	346.	-23,10	5,3
34	355.	-23,44	1,9
35	360.	-23,35	-0,9

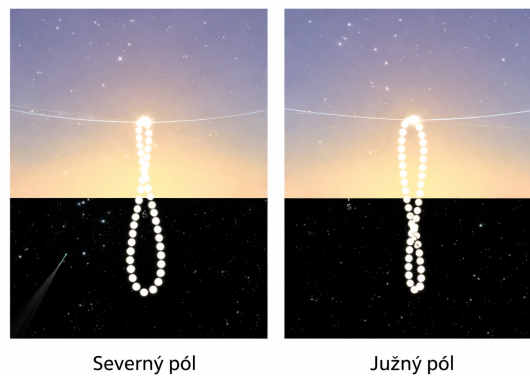
Tabuľka D1.3: Hodnoty deklinácie Slnka  $\delta_{\odot}$  a  $C$  z časovej rovnice (D1.1) počas 35 pozorovaní behom roka.



Obr. D1.4: Vynesený graf analémy.

- (c) Analéma na severnom póle vyzerá ako zvislá osmička stojaca priamo na horizonte, pričom je viditeľná len jej horná polovica. Keďže je Slnko na póle pol roka pod obzorom, tak vidíme, ako sa horná slučka osmičky postupne dvíha od horizontu k najvyššiemu bodu (letný slnovrat) a potom klesá späť. Dolná slučka osmičky zostáva skrytá pod obzorom, a preto je neúplná. 5b

Na južnom póle je situácia zrkadlovo obrátená, takže analéma vyzerá ako prevrátená osmička, ktorej viditeľná časť smeruje nadol k horizontu. Slnko je tu nad obzorom v čase, keď je na severnej pologuli zima, takže vidíme tú časť osmičky, ktorá bola na severnom póle skrytá. Opäť platí, že vďaka polohe priamo na zemskej osi stojí táto osmička kolmo na horizont a jej spodná (z nášho pohľadu južná) slučka dominuje oblohe počas leta. Znázornené to je na obrázku D1.5. 5b



Obr. D1.5: Znázornenie toho, ako vyzerá analéma na severnom a južnom póle.

- (d) Vzťah medzi pravou anomáliou  $\nu$  a strednou anomáliou  $M$  predstavuje Keplerova rovnica pre elipsu. Je daná vzťahmi

$$M = E - e \sin E, \quad (\text{D1.3})$$

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}, \quad (\text{D1.4})$$

ktoré sú uvedené v konštantovníku. Dáva do súvislosti pravú anomáliu  $\nu$ , strednú anomáliu  $M$  a excentrickú anomáliu  $E$ . Veličina  $e$  značí v týchto rovniciach excentricitu. Pre Zem je excentricita  $e_{\oplus} = 0,0167$ , ako uvádza konštantovník. Hodnotu strednej anomálie berieme ako  $M = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1,5708 \text{ rad}$ .

K vyjadreniu pravej anomálie  $\nu$  potrebujeme poznať najskôr hodnotu excentrickej anomálie  $E$ . To spravíme tak, že si z Keplerovej rovnice vyjadríme  $E$  ako

$$E = M + e \sin E. \quad (\text{D1.5}) \quad 5b$$

Tento vzťah budeme riešiť metódou iterácie, pri ktorej volíme za počiatočnú hodnotu  $E_0 = M = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ . Po iterácii v kalkulačke nám vychádza  $E = 1,5875 \text{ rad}$ , čo je o niečo viac ako hodnota  $M$ . 15b

Následne vieme tento výsledok dosadiť do druhej rovnice a vyjadriť si  $\nu$

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} = 1,0340, \quad (\text{D1.6})$$

teda  $\nu = 1,6042$  rad. Rozdiel  $\nu - M$  je potom  $0,0334$  rad, čo zodpovedá časovému rozdielu 2b  
v minútach

$$\frac{0,0334}{2\pi} \cdot 24 \cdot 60 = \boxed{7,65 \text{ min}}. \quad (\text{D1.7}) \quad 8b$$

Tento výsledok teraz porovnáme s postupom, v ktorom budeme uvažovať rovnicu D1.2. Ako je napísané v zadaní, hodnota  $(\nu - M)$  nám reprezentuje to isté ako „excentrický“ člen v tomto aproximatívnom vzťahu pre  $C$ , len s opačným znamienkom a pri nulovom sklone, t.j.  $\varepsilon = 0$ . Dostávame tak vzťah

$$C \approx \frac{720}{\pi} (2e \sin M). \quad (\text{D1.8}) \quad 8b$$

Po vyčíslení nám vychádza hodnota priamo v minútach, a to konkrétne  $C = \boxed{7,65 \text{ min}}$ . Porovnaním vidíme, že tieto dve hodnoty sa rovnajú. 2b

- (e) Jednotlivé analémy si preberieme postupne a budeme sa pritom pozerať na vplyvy excentricity  $e$  a sklonu  $\varepsilon$ .

Najskôr sa pozrime na analému neznámej planéty  $X_1$ . Z D1.2i vidíme, že táto planéta má rozsah deklinácií od cca  $25^\circ$  do  $-25^\circ$ , čiže jej sklon je  $\varepsilon \approx 25^\circ$ . Ak sa pozrieme do tabuľky D1.2 tak vidíme, že našimi kandidátmi sa stávajú Mars, Saturn a Neptún. Ak sa ďalej pozrieme na ich excentricity  $e$ , tak si hneď všimneme, že Mars má na rozdiel od Saturnu a Neptúna rádovo väčšiu excentricitu, čo sa značne prejaví v šírke jeho analémy. Mars ju má kvôli svojej vyššej excentricite najširšiu a stáva sa preto planétou  $X_1$ .

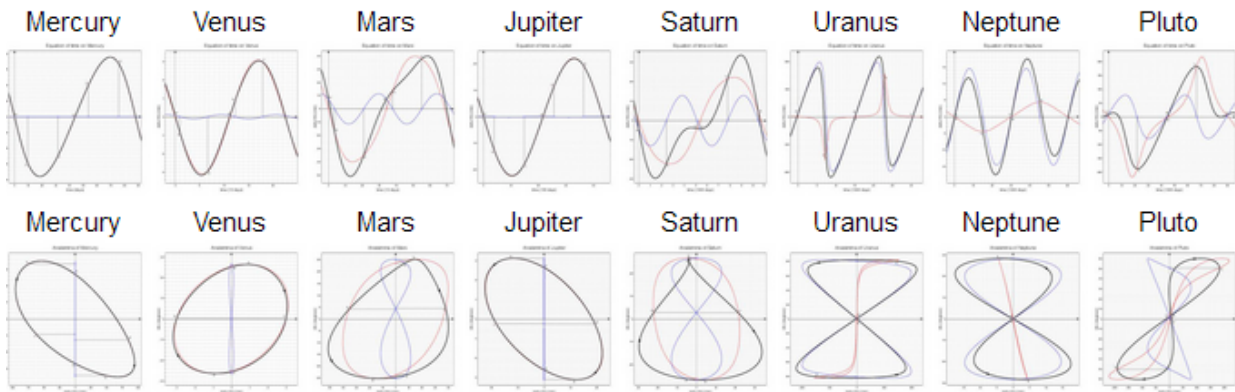
Analéma planéty  $X_2$  je podobná planéte  $X_1$ , pretože má opäť sklon  $\varepsilon \approx 25^\circ$ , no tentokrát má menšiu excentricitu, čo vidno už po prvotnom porovnaní. Mohlo by sa preto jednať buď o Saturn alebo Neptún. Neptún má ale na rozdiel od Jupitera veľmi neexcentrickú dráhu podobnú takmer kružnici. Preto analéma znázornená na obrázku D1.2ii nemôže byť analémou Neptúna, ale naopak Saturnu.

Špeciálnejším prípadom je analéma planéty  $X_3$  na obrázku D1.3i. Môžeme si všimnúť, že hodnoty na vertikálnej osi dosahujú veľké hodnoty - až vyše  $\pm 80^\circ$ . To znamená, že sklon  $\varepsilon$  bude dosahovať pri planéte  $X_3$  túto extrémnu hodnotu. V praxi to znamená to, že rotačná os tejto planéty je voči kolmici na rovinu jej orbity sklopená o takmer pravý uhol, čiže sa dá v podstate povedať, že táto planéta rotuje „poležiačky“. To je známy fakt pre planétu Urán.

Poslednou analémou je analéma planéty  $X_4$ , pri ktorej už na prvý pohľad vidíme, že na vertikálnej osi sú rádovo menšie hodnoty ako v predchádzajúcich analémach. Sklon  $\varepsilon$  preto

musí byť rozhodne veľmi malý, menší ako  $10^\circ$ , z čoho berieme do úvahy Merkúr alebo Jupiter. Rozdiel medzi týmito dvoma planétami je to, že Merkúr má rádovo väčšiu excentricitu - najväčšiu zo všetkých planét slnečnej sústavy. To spôsobuje to, že jeho analéma bude značne natiahnutá, čo sa presne deje na grafe D1.3ii analémy planéty  $X_4$ . Našou poslednou planétou je preto Merkúr.

Obdobným spôsobom by sme vedeli určiť analému akejkoľvek planéty, ak poznáme hodnoty jej excentricity  $e$  a sklonu  $\varepsilon$ . Na obrázku D1.6 sú uvedené všetky analémy planét slnečnej sústavy aj s ich grafmi slnečnej rovnice.



Obr. D1.6: Analémy a hodnoty veličiny  $C$  z časovej rovnice pre planéty slnečnej sústavy a trpasličiu planétu Pluto.

## D2 Netrpezlivý astrofyzik

(330b, autor: J. Švrčková, V. Slanina)

Astrofyzik pozoruje obch (exo)planéty okolo hviezdy pomocou nového interferometra, ktorý má veľmi detailné rozlíšenie. Ako to už pri astronomických pozorovaniach býva, trvajú celú večnosť. Keďže sa mu ale nechce tak dlho čakať, tak si povedal, že si zvyšok merania dopočíta a rozhodne sa preskúmať parametre pozorovaného systému na základe dát v tabuľke D2.1, ktoré doposiaľ namerá.

V celej tejto úlohe nie je potrebné odhadovať neistoty (chyby) veličín, s výnimkou prípadov, kedy je to explicitne napísané v zadaní.

- (a) [50b] Vyneste dáta separácií  $E$  a  $N$  z tabuľky D2.1 na milimetrový papier a preložte ich častou elipsy. Pre obidve osi si zvolte rovnakú škálu, inak by sa vám výrazne skomplikovalo riešenie nasledujúcich úloh.
- (b) [10b] Počas pozorovania prešla planéta cez nejaký významný bod svojej trajektórie. Určte, o ktorý bod ide a označte ho na grafe, ktorý ste kreslili v predchádzajúcej podúlohe.
- (c) [30b] Vypočítajte veľkú polos  $\alpha$  v uhlových jednotkách mas (*milli arc second*, teda

tisíciny uhlovej sekundy) a excentricitu trajektórie planéty  $e$ . Využite na to vlastnosti bodu, ktorý ste našli v predchádzajúcej podúlohe a ešte nejakého ďalšieho vhodného bodu na trajektórii planéty. Svoj postup v riešení detailne opíšte. Pre jednoduchosť môžete predpokladať, že sklon dráhy voči nebeskej sfére je rovný presne  $0^\circ$ . Nesnažte sa dokreslovať zvyšnú časť eliptickej dráhy, vyšiel by vám veľmi nepresný výsledok.

(d) [25 b] S pomocou vášho grafu vypočítajte periódu  $P$  obehu planéty.

Tabuľka D2.1: Namerané polohy planéty vzhľadom na hviezdu. Veličina  $E$  označuje separáciu v rektascenzii (kladná smerom na východ) a  $N$  separáciu v deklinácii (kladná smerom na sever). Obidve sú udané v tisícinách uhlovej sekundy (mas).

Čas (roky)	$E$ (mas)	$N$ (mas)	Čas (roky)	$E$ (mas)	$N$ (mas)
0.12	1.85	-0.81	3.94	0.84	1.82
0.38	1.93	-0.55	4.51	0.34	1.93
0.64	1.95	-0.33	4.61	0.26	2.03
0.88	2.07	-0.12	5.09	-0.22	2.21
1.50	1.94	0.39	5.12	-0.26	2.11
1.66	1.93	0.50	5.30	-0.44	2.24
2.09	1.83	0.82	6.09	-1.43	2.12
2.12	1.85	0.81	6.14	-1.43	2.09
2.56	1.60	1.15	6.55	-2.03	2.03
2.88	1.52	1.28	6.98	-2.66	1.82
3.14	1.37	1.46	7.67	-3.65	1.37
3.71	0.98	1.67	8.07	-4.34	0.99
3.77	0.96	1.78			

Na to, aby astrofyzik dokázal určiť z uhlových rozmerov aj skutočné rozmery dráhy, potrebuje získať jej vzdialenosť. Pozrel sa teda do rôznych archívov dát a našiel v nich dva užitočné záznamy o materskej hviezde systému - jedno meranie paralaxy a jedno spektrum. Paralaxa sa rovná  $\Pi = (0.610 \pm 0.02)$  mas. Podľa spektra určil, že ide o hviezdu spektrálneho typu A3 V s efektívnou teplotou  $T_{\text{eff}} = 8500$  K, povrchovým tiažovým zrýchlením  $g = 152 \text{ m/s}^2$  a radiálnou rýchlosťou  $v_r = 30 \text{ km/s}$ . Zároveň si uvedomil, že hviezda sa na oblohe nachádza na rovnakom mieste ako malá hviezdokopa, pričom všetky hviezdy v nej majú podobnú radiálnu rýchlosť. Je teda pravdepodobné, že jeho pozorovaná hviezda je zároveň súčasťou tejto hviezdokopy. To mu umožnilo určiť vzdialenosť hviezdy na základe vlastností hviezdokopy.

Vzdialenosť hviezdokopy sa dá určiť z farebného, resp. HR diagramu, kedy do grafu zakreslíme  $V$  magnitúdu hviezd v hviezdokope v závislosti od farebného indexu  $B - V$ . Do rovnakého grafu zároveň zakreslíme absolútnu magnitúdu  $M_V$  dobre preskúmaných štandardných hviezd, taktiež v závislosti od indexu  $B - V$ , pričom veličiny  $V$  a  $M_V$  budú mať spoločnú stupnicu. Budeme tak mať zakreslené dve hlavné postupnosti - jednu pre hviezdokopu a druhú pre štandardné hviezdy. Za predpokladu, že nedochádza k medzihviezdnej absorpcii, platí, že vertikálna vzdialenosť týchto dvoch hlavných postupností sa rovná modulu vzdialenosti objektov v hviezdokope, teda veličine  $\mu = V - M_V$ .

Tabuľka D2.2: Štandardné hodnoty absolútnej  $V$  magnitúdy a farebného indexu  $B - V$  pre rôzne spektrálne typy hviezd na hlavnej postupnosti.

$M_V$	$B - V$	Sp. typ
-5.8	-0.35	O5
-4.1	-0.31	B0
-1.1	-0.16	B5
0.7	0.00	A0
2.0	0.13	A5
2.6	0.27	F0
3.4	0.42	F5
4.4	0.58	G0
5.1	0.70	G5
5.5	0.73	G8
5.9	0.89	K0
7.3	1.18	K5
9.0	1.45	M0
11.8	1.63	M5
16.0	1.80	M8

Tabuľka D2.3: Namerané hodnoty  $V$  magnitúdy a farebného indexu  $B - V$  pre niekoľko hviezd nachádzajúcich sa v hviezdokope.

$V$	$B - V$
9.49	-0.11
10.639	-0.069
12.01	0.019
12.748	0.083
12.599	0.112
13.777	0.344
14.668	0.485
15.096	0.54
15.748	0.678
16.12	0.716
16.521	0.81
16.547	0.853
17.246	1.029
17.802	1.194
18.87	1.284

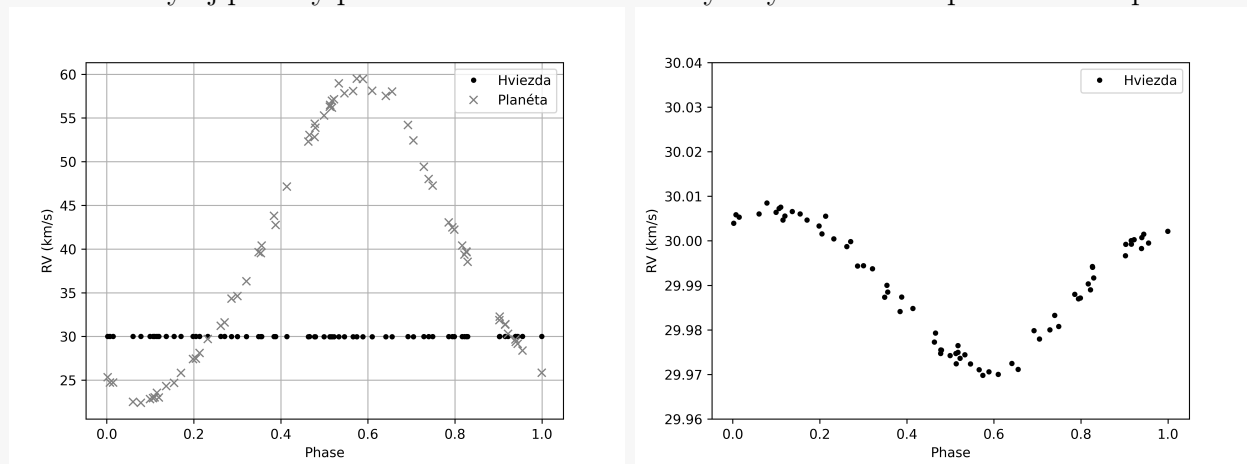
- (e) [10 b] Typická svietivosť hviezdy spektrálneho typu A3V je okolo  $L = 17 L_{\odot}$ . Vypočítajte, aký by mala mať táto hviezda polomer a hmotnosť.
- (f) [10 b] Určte vzdialenosť hviezdy na základe jej paralaxy, vrátane neistoty.
- (g) [60 b] Do spoločného HR diagramu zakreslite dáta z tabuliek D2.2 a D2.3. Cez obidva sety dát nakreslite voľnou rukou čiaru, ktorá zhruba znázorňuje priebeh hlavnej postupnosti.
- (h) [25 b] Z grafu odhadnite modul vzdialenosti hviezdokopy  $\mu$  a odhadnite jeho neistotu. Určte podľa neho vzdialenosť hviezdokopy a vypočítajte aj jej neistotu.
- (i) [2 b] Zistite, či sa vzdialenosti, ktoré ste určili v predchádzajúcich dvoch podúlohách, zhodujú v rámci neistôt. Na základe toho rozhodnite, či je hviezda súčasťou hviezdokopy. Ak áno, ďalej používajte vzdialenosť určenú z HR diagramu. Ak nie, používajte vzdialenosť určenú z paralaxy.

Keďže teraz astronóm už pozná vzdialenosť hviezdy, môže sa pustiť do zisťovania jej ďalších parametrov.

- (j) [10 b] Vypočítajte dĺžku veľkej polosi v au a následne aj hmotnosť hviezdy v hmotnostiach Slnka  $M_{\odot}$  (nateraz môžete predpokladať, že hmotnosť planéty je zanedbateľná).

To je ale rádovo nižšia hmotnosť, než vyšla v podúlohe (e)! Niečo v doterajšej analýze je teda nesprávne. Astrofyzik preto musel nakoniec získať viac pozorovaní. O pár rokov neskôr sa vďaka novému spektrografu ukázalo, že je možné namerať krivku radiálnych rýchlostí nielen hviezdy, ale aj samotnej planéty. To ale znamená, že sklon dráhy voči nebeskej sfére nie je  $0^\circ$ , tak ako ste predpokladali v úlohe (c), inak by radiálne rýchlosti museli byť nulové.

- (k) [25 b] Z priloženého grafu nameraných radiálnych rýchlostí určte radiálnu rýchlosť  $v_\gamma$  ťažiska sústavy a maximálnu a minimálnu radiálnu rýchlosť hviezdy aj planéty vzhľadom na ťažisko.
- (l) [20 b] Z nameraných rýchlostí vypočítajte novú hodnotu excentricity. Pomôže vám fakt, že dráha je vhodne orientovaná, a preto sú maximálne a minimálne radiálne rýchlosti hviezdy aj planéty priamo úmerné ich skutočným rýchlostiam v pericentre a apocentre.



Obr. D2.1: Krivka radiálnych rýchlostí v závislosti od orbitálnej fázy systému. Vpravo je rovnaký graf so zmenenou škálou, aby bolo možné dobre odmerať radiálne rýchlosti hviezdy.

Astrofyzik zistil, že šťastnou zhodou okolností je dráha sklopená okolo jej veľkej osi. Teda v dôsledku sklonu dráhy sa nám javia kratšie iba vzdialenosti kolmé na veľkú polos, vzdialenosti rovnobežné s veľkou polosou je na oblohe vidno pod skutočným uhlovým rozmerom.

- (m) [25 b] Využite novú hodnotu excentricity a vypočítajte správne hodnoty veľkej polosi dráhy v mas aj au a obežnej periódy v rokoch.
- (n) [5 b] Vypočítajte správnu hmotnosť hviezdy.
- (o) [15 b] Na základe radiálnych rýchlostí určte pomer hmotností planéty a hviezdy a dokážte tým, že hmotnosť planéty je naozaj v prvom priblížení zanedbateľná v porovnaní s hmotnosťou hviezdy.
- (p) [8 b] Rozhodnite, o aký typ exoplanéty by mohlo ísť – horúci Jupiter, chladný Jupiter, mini Neptún alebo Superzem? Svoju voľbu zdôvodnite.

- (a) Ak chceme nakresliť graf, ktorý by odpovedal polohám planéty tak, ako by sme ich videli na oblohe, kladný smer osi  $E$ , teda smer na východ, musí smerovať doľava. Za správny graf je ale v tejto úlohe uznaný aj taký, ktorý má kladnú časť osi  $E$  smerujúcu vpravo, viď obr. D2.2. 50b
- (b) Planéta prechádza pericentrom svojej dráhy, teda najbližším bodom k svojej materskej hviezde. V grafe ho nájdeme ako bod elipsy, ktorý je najbližší k počiatku súradnicovej sústavy, v ktorom je umiestnená hviezda. Na obr. D2.2 je pericentrum spojené s ohniskom elipsy červenou čiarou, ktorá predstavuje časť veľkej polosi. 10b
- (c) Elipsa má jednu nepríjemnú vlastnosť – ak máme bodmi pokrytý len nejaký jej menší úsek, je veľmi ťažké odhadnúť veľkosť a tvar celej elipsy. Naše dáta v grafe môžeme preložiť veľmi odlišnými elipsami, pričom všetky sa nám budú zdať v podstate rovnako dobré. Preto v tejto úlohe musíme zvoliť iný postup. Využijeme fakt, že planéta prechádza pericentrom, pre ktorého vzdialenosť od dráhy platí jednoduchý vzťah  $r_{\text{per}} = \alpha(1 - e)$ . Ďalej využijeme polárnu rovnicu elipsy z konštantovníka, podľa ktorej pre vzdialenosť ľubovoľného bodu elipsy od daného ohniska platí vzťah 5b

$$r = \frac{\alpha(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (\text{D2.1})$$

pričom pravú anomáliu  $\vartheta$  si vieme odmerať priamo z grafu. Aj keď teoreticky je možné na tento účel použiť ľubovoľný bod elipsy, ako veľmi vhodný sa ponúka koncový bod tzv. latus rectum, teda úsečky, ktorá je kolmá na hlavnú os a prechádza cez ohnisko (na obr. D2.2 označená modrou farbou). Tento bod má pravú anomáliu  $\nu = 90^\circ$ , vďaka čomu sa nám vzťah D2.1 zjednoduší na

$$r_{\text{LR}} = \frac{\alpha(1 - e^2)}{1 + e \cos 90^\circ} = \alpha(1 - e^2) = \alpha(1 - e)(1 + e). \quad (\text{D2.2}) \quad 5b$$

Vydelením  $r_{\text{LR}}$  a  $r_{\text{per}}$  dostaneme

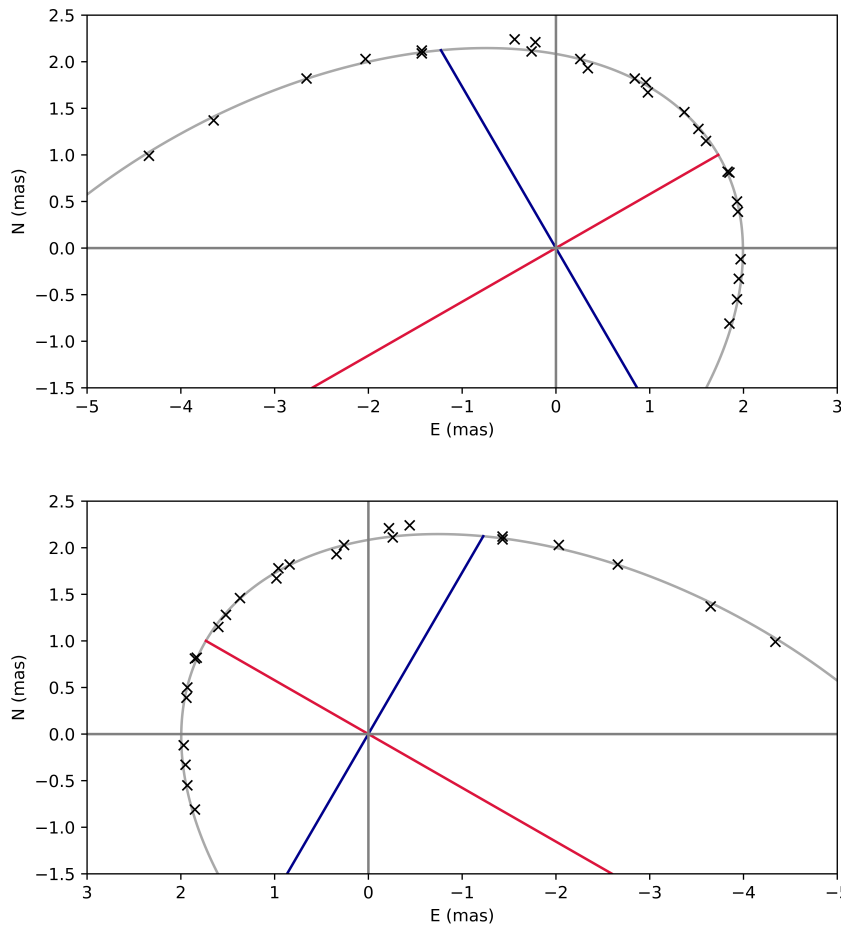
$$\frac{r_{\text{LR}}}{r_{\text{per}}} = \frac{\alpha(1 - e)(1 + e)}{\alpha(1 - e)} = (1 + e). \quad (\text{D2.3}) \quad 5b$$

Dĺžky úsečiek odmeriame v grafe, dostaneme hodnoty  $r_{\text{per}} = 1,97 \text{ mas}$  a  $r_{\text{LR}} = 2,73 \text{ mas}$ . Orientácia a tým pádom aj dĺžka  $r_{\text{LR}}$  závisí najmä na presnosti určenia pericentra dráhy. Teraz už vieme vypočítať excentricitu 5b

$$e = \frac{r_{\text{LR}}}{r_{\text{per}}} - 1 = \boxed{0,386}, \quad (\text{D2.4}) \quad 5b$$

a následne aj veľkú polos dráhy planéty

$$\alpha = \frac{r_{\text{per}}}{(1 - e)} = \boxed{3,21 \text{ mas}}. \quad (\text{D2.5}) \quad 5b$$



Obr. D2.2: Astrometrická dráha planéty okolo hviezdy. Vrchný graf je nakreslený s kladným smerom vodorovnej osi klasicky vpravo, zatiaľ čo spodný graf zobrazuje dráhu tak, ako by ju videl pozorovateľ na oblohe.

- (d) Keďže vieme iba uhlový rozmer veľkej polosi a vôbec nepoznáme hmotnosť hviezdy ani planéty, periódu nemôžeme vypočítať z 3. Kepleroveho zákona. Musíme si preto poradiť inak. Využijeme vzorce pre anomálie z konštantovníka a časy z tabuľky D2.1. Na základe údajov z tabuľky odhadneme, že planéta prešla pericentrom svojej dráhy zhruba v čase  $t_0 = 2,9$  rokov a bodom s pravou anomáliou  $\nu = 90^\circ$  prešla v čase  $t_{90} = 6,3$  rokov. Vieme, že v pericentre sú všetky tri anomálie, pravá, excentrická aj stredná, rovné nule. Pre bod s  $\nu = 90^\circ$  vypočítame najskôr excentrickú a potom strednú anomáliu. 5b

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}. \quad (\text{D2.6}) \quad 5b$$

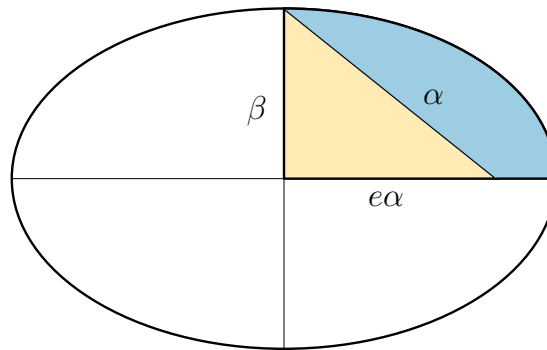
Excentrická anomália vyjde  $E = 67,3^\circ = 1,175$  rad. Strednú anomáliu vypočítame z Keplerovej rovnice, pričom je potrebné si dávať pozor na to, že uhly treba dosadiť v radiánoch;

$$M = E - e \sin E = 0,819 \text{ rad}. \quad (\text{D2.7}) \quad 5b$$

Obežnú dobu teraz vieme vypočítať vďaka definícii strednej anomálie (opäť dosadíme anomáliu  $M$  v radiánoch)

$$P = 2\pi \frac{t - t_0}{M} = \boxed{26 \text{ rokov}}. \quad (\text{D2.8}) \quad 5b$$

Druhá možnosť ako vypočítať periódu, je cez 2. Keplerov zákon. Zo znalosti  $\alpha$  a  $e$  vieme zistiť polohu stredu elipsy. Do grafu z časti a) nakreslíme čiaru kolmú na hlavnú polos, ktorá prechádza stredom elipsy. Táto čiara pretne dráhu planéty vo vedľajšom vrchole elipsy. Vzďialenosť vedľajšieho vrcholu od stredu elipsy sa nazýva malá polos elipsy, jej uhlový rozmer označíme  $\beta$ . 2. Keplerov zákon nám hovorí, že sprievodič planéty opíše za rovnaký čas vždy rovnakú plochu. Z toho tiež vyplýva, že pomer časových intervalov sa rovná pomeru plôch opísaných sprievodičom. Za periódu  $P$  opíše sprievodič plochu celej elipsy, ktorá sa rovná  $S_e = \pi\alpha\beta$ . Plocha, ktorú opíše sprievodič planéty pri prechode z pericentra do vedľajšieho vrcholu elipsy sa dá vypočítať podľa obr. D2.3. Alt.5b



Obr. D2.3: Nákres elipsy potrebnej na výpočet obežnej doby pomocou 2. Keplerovho zákona.

Plocha modrej oblasti  $S$  sa rovná rozdielu štvrtiny plochy elipsy a plochy žltého pravouhlého trojuholníka ohnisko-stred-vedľajší vrchol elipsy, pričom plochu trojuholníka vypočítame ako  $S_t = \frac{e\alpha\beta}{2}$ . Pre vyšrafovanú oblasť máme

$$S = \frac{\pi\alpha\beta}{4} - \frac{e\alpha\beta}{2}. \quad (\text{D2.9}) \quad 5b$$

Pre pomer plôch platí

$$\frac{S}{S_e} = \frac{t_b - t_0}{P} = \frac{\pi\alpha\beta}{4\pi\alpha\beta} - \frac{e\alpha\beta}{2\pi\alpha\beta} = \frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}. \quad (\text{D2.10})$$

Čas prechodu pericentrom sme už určili ako  $t_0 = 2,9$  rokov. Čas, kedy planéta prechádza vedľajším vrcholom dráhy môžeme na základe údajov v tabuľke D2.1 určiť ako  $t_b = 7,3$  rokov. Teraz už len z rovnice D2.10 vyjadríme periódu a dostaneme

$$\frac{t_b - t_0}{P} = \frac{\pi - 2e}{4\pi}, \quad (\text{D2.11}) \quad 10b$$

$$P = \frac{4\pi}{\pi - 2e}(t_b - t_o) = \boxed{23,3 \text{ rokov}}. \quad (\text{D2.12}) \quad 5b$$

Rozdielny výsledok oproti predchádzajúcej metóde je spôsobený najmä tým, že hodnota excentricity, ktorú sme použili na výpočet nie je správna, ako uvidíme v neskorších častiach tejto úlohy.

- (e) Najskôr vypočítame polomer hviezdy zo Stefanovho-Boltzmannovho zákona. Hmotnosť potom získame vďaka známej hodnote gravitačného zrýchlenia na povrchu.

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{eff}}^4}} = 1,32 \cdot 10^9 \text{ m} = \boxed{1,9 R_{\odot}}. \quad (\text{D2.13}) \quad 5b$$

$$M = \frac{gR^2}{G} = 3,97 \cdot 10^{30} \text{ kg} = \boxed{2 M_{\odot}}. \quad (\text{D2.14}) \quad 5b$$

- (f) Vzdialenosť v parsekoch vypočítame jednoducho ako prevrátenú hodnotu paralaxy v uhlových sekundách.

$$d_1 = \frac{1}{\Pi} = \frac{1000}{0,61} = 1639 \text{ pc}. \quad (\text{D2.15}) \quad 5b$$

Relatívna chyba vzdialenosti sa rovná relatívnej chybe paralaxy, dostaneme teda

$$\sigma_{d_1} = \frac{d_1}{\Pi} \sigma_{\Pi} = 54 \text{ pc}. \quad (\text{D2.16}) \quad 5b$$

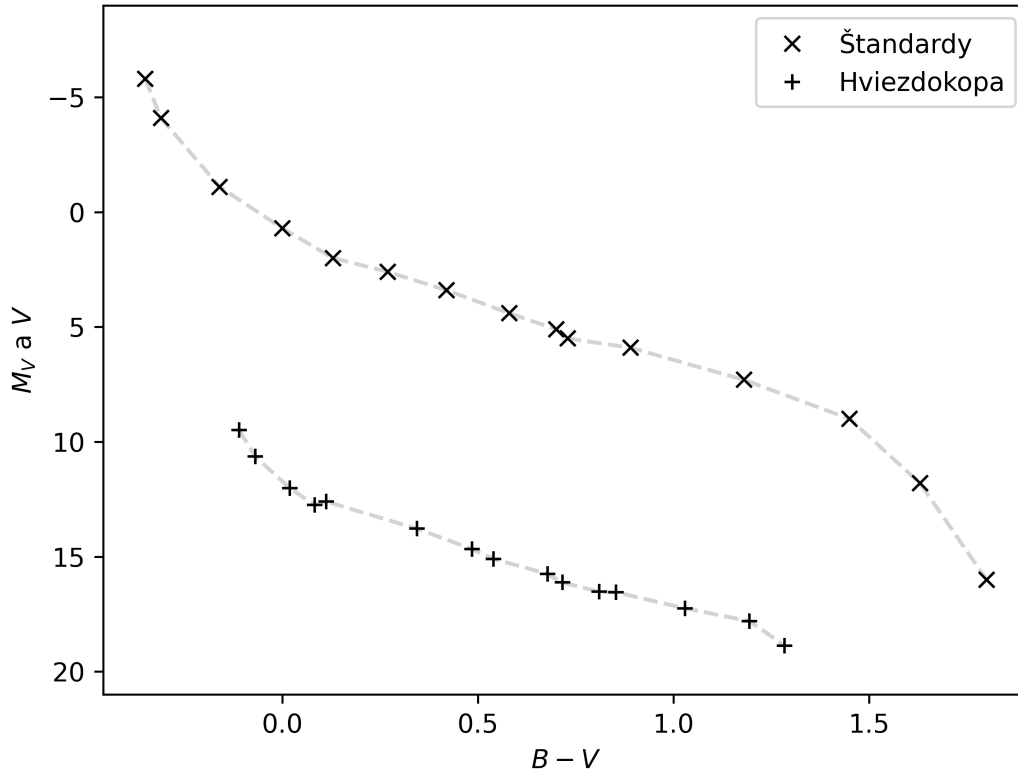
Vzdialenosť hviezdy určená z jej paralaxy je  $\boxed{d_1 = (1639 \pm 54) \text{ pc}}$ .

- (g) Graf je nakreslený na obr. D2.4. 60b

- (h) Modul vzdialenosti sa dá odhadnúť premeraním vertikálnej vzdialenosti hlavných postupností na viacerých miestach na grafe. Z týchto hodnôt potom dopočítame priemer a štandardnú odchýlku. Výsledok je  $\boxed{\mu = (11,0 \pm 0,1) \text{ mag}}$ . Vzdialenosť hviezdy je 10b

$$\mu = 5 \log d_2 - 5, \quad (\text{D2.17})$$

$$d_2 = 10^{\frac{\mu+5}{5}} = 10^{\frac{11+5}{5}} = 1585 \text{ pc}. \quad (\text{D2.18}) \quad 5b$$



Obr. D2.4: HR diagram na určenie vzdialenosti.

Odvedenie vzorca na výpočet chyby vzdialenosti je pomerne ťažké, pretože si vyžaduje znalosť derivácií. Chybu je možné ale odhadnúť aj jednoduchšie, stačí do rovnice D2.18 dosadiť maximálnu a minimálnu možnú hodnotu modulu vzdialenosti, tým dostaneme hraničné hodnoty

$$d_{2,\max} = 10^{\frac{11,1+5}{5}} = 1660 \text{ pc}, \quad (\text{D2.19}) \quad 2,5\text{b}$$

$$d_{2,\min} = 10^{\frac{10,9+5}{5}} = 1514 \text{ pc}. \quad (\text{D2.20}) \quad 2,5\text{b}$$

Odchýlku vzdialenosti  $d_2$  môžeme odhadnúť z rozdielu  $d_{2,\max}$  a  $d_{2,\min}$  ako  $\sigma_{d_2} = 73 \text{ pc}$ . Vzdialenosť hviezdy určená z HR diagramu je teda  $d_2 = (1585 \pm 73) \text{ pc}$ . 5b

(i) Vzdialenosť  $d_2$  sa v rámci odchýlky zhoduje so vzdialenosťou  $d_1$  určenou z paralaxy hviezdy. Ďalej preto budeme používať hodnotu  $d_2$ . 2b

(j) Na rýchly výpočet veľkej polosi v au je možné využiť definíciu parseku a do nasledujúceho vzorca dosadiť  $\alpha$  v uhlových sekundách a  $d_2$  v pc

$$a = \alpha d_2 = \frac{3,21}{1000} \cdot 1600 = \boxed{5,14 \text{ au}}. \quad (\text{D2.21}) \quad 5\text{b}$$

Hmotnosť vypočítame z 3. Keplerovho zákona, pričom ak veľkú polos dosadíme v au a obežnú periódu v rokoch, výsledok nám vyjde rovno v jednotkách hmotnosti Slnka

$$M = \frac{a^3}{P^2} = \frac{5,14^3}{26^2} = \boxed{0,2 m_{\odot}}. \quad (\text{D2.22}) \quad 5b$$

To je až 10-krát menšia hmotnosť, než sme pre daný spektrálny typ vypočítali v rovnici D2.14.

- (k) Radiálnu rýchlosť ťažiska odčítame z grafu D2.1 ako hodnotu, v ktorej sa pretínajú krivky RV planéty a hviezdy. V tomto momente sú totiž planéta a hviezda z pohľadu pozorovateľa v konjunkcii, ich radiálna rýchlosť spôsobená orbitálnym pohybom je nulová a pozorujeme tak iba radiálnu rýchlosť ťažiska sústavy, ktorá sa rovná zhruba  $\boxed{v_{\gamma} = 30 \text{ km s}^{-1}}$ . 5b

Z grafu teraz ešte určíme minimálne a maximálne radiálne rýchlosti hviezdy aj planéty a vypočítame ich rozdiel voči  $v_{\gamma}$ . Dostaneme nasledujúce hodnoty:

$$\bullet v_{*,\max} = |29,97 - 30| = \boxed{0,03 \text{ km s}^{-1}}, \quad 5b$$

$$\bullet v_{*,\min} = 30,008 - 30 = \boxed{0,008 \text{ km s}^{-1}}, \quad 5b$$

$$\bullet v_{p,\max} = 58,5 - 30 = \boxed{28,5 \text{ km s}^{-1}}, \quad 5b$$

$$\bullet v_{p,\min} = |22,5 - 30| = \boxed{7,5 \text{ km s}^{-1}}. \quad 5b$$

- (l) Podľa zákona zachovania momentu hybnosti platí pre hviezdu aj planétu

$$L_{\text{per}} = L_{\text{apo}} \implies mv_{\text{per}}r_{\text{per}} = mv_{\text{apo}}r_{\text{apo}}. \quad (\text{D2.23}) \quad 5b$$

Ďalej využijeme, že pre pericentrum a apocentrum dráhy platí  $r_{\text{per}} = a(1-e)$  a  $r_{\text{apo}} = a(1+e)$ . Zo zadania vieme, že namerané maximálne a minimálne radiálne rýchlosti sú priamo úmerné skutočným rýchlostiam v pericentre a apocentre, platí teda  $v_{\max} = Kv_{\text{per}}$  a  $v_{\min} = Kv_{\text{apo}}$ , kde  $K$  je nejaká konštanta úmernosti. Po dosadení do rovnice D2.23 sa  $K$  aj  $a$  vykrátia a môžeme si vyjadriť excentricitu. Z hodnôt radiálnej rýchlosti planéty dostaneme 2,5b

$$\frac{v_{p,\max}}{v_{p,\min}} = \frac{1+e}{1-e}, \quad (\text{D2.24}) \quad 5b$$

$$(1-e)\frac{v_{p,\max}}{v_{p,\min}} = 1+e, \quad (\text{D2.25})$$

$$\frac{v_{p,\max}}{v_{p,\min}} - 1 = e\left(1 + \frac{v_{p,\max}}{v_{p,\min}}\right), \quad (\text{D2.26})$$

$$e = \frac{v_{p,\max} - v_{p,\min}}{v_{p,\max} + v_{p,\min}} = \frac{28,5 - 7,5}{28,5 + 7,5} = \boxed{0,58}. \quad (\text{D2.27}) \quad 5b$$

Rovnaký výsledok dostaneme aj po dosadení hodnôt pre hviezdu.

- (m) Vďaka vhodnej orientácii dráhy je uhlová veľkosť pericentra dráhy odmeraná z grafu D2.2 správne. Na výpočet správnej uhlovej veľkosti veľkej polosi preto len potrebujeme zmeniť excentricitu za hodnotu vypočítanú v predchádzajúcej podúlohe

$$\alpha = \frac{r_p}{1 - e} = \boxed{4,7 \text{ mas}}. \quad (\text{D2.28}) \quad 5b$$

Veľká polos dráhy v astronomických jednotkách je

$$a = \alpha d_2 = \frac{4,7}{1000} \cdot 1600 = \boxed{7,5 \text{ au}}. \quad (\text{D2.29}) \quad 5b$$

Zostáva nám vypočítať už len obežnú periódu, Použijeme na to rovnaký postup ako v časti (d), len tentoraz dosadíme správnu hodnotu excentricity. Pre bod s pravou anomáliou  $\nu = 90^\circ$  dostaneme excentrickú anomáliu  $E = 1,90 \text{ rad}$  a strednú anomáliu  $M = 1,43 \text{ rad}$ . Perióda je 5 + 5b

$$P = \frac{2\pi}{M}(t - t_0) = \frac{2\pi}{1,43} \cdot (6,3 - 2,9) = \boxed{14,9 \text{ rokov}}. \quad (\text{D2.30}) \quad 5b$$

Tentoraz sa už nedá použiť 2. Keplerov zákon, pretože pri novej hodnote veľkej polosi vychádza umiestnenie vedľajšieho vrcholu elipsy až niekde na/za okraj grafu (závisí na použitej mierke), ktorý sme kreslili v časti a). V každom prípade už nie je možné získať rozumný odhad času, kedy planéty vedľajším vrcholom prešla.

- (n) Hmotnosť vypočítame z 3. Kepleroveho zákona

$$M = \frac{a^3}{P^2} = \boxed{1,9 M_\odot}. \quad (\text{D2.31}) \quad 5b$$

- (o) Pomer hmotností sa rovná prevrátenému pomeru radiálnych rýchlostí. Na toto sa dá prísť na základe nasledujúcej úvahy: pomer vzdialeností hviezdy a planéty od ťažiska sústavy sa rovná prevrátenému pomeru ich hmotností (ako na hojdačke)

$$\frac{r_*}{r_p} = \frac{M_p}{M_*}. \quad (\text{D2.32}) \quad 5b$$

Obidva objekty musia obehnúť okolo ťažiska za rovnakú periódu, dokonca musia mať v každom okamihu navzájom rovnakú uhlovú rýchlosť. Platí teda

$$\frac{v_p}{r_p} = \omega_p = \omega_* = \frac{v_*}{r_*}, \quad (\text{D2.33})$$

$$\frac{r_*}{r_p} = \frac{v_*}{v_p}. \quad (\text{D2.34}) \quad 5b$$

Skombinovaním rovníc D2.32 a D2.34 dostaneme

$$q = \frac{M_p}{M_*} = \frac{v_{*,\max}}{v_{p,\max}} = \frac{0,03}{28,5} \doteq \boxed{0.001} \ll 1. \quad (\text{D2.35}) \quad 5b$$

Pre väčšiu presnosť výsledku sme dosadili maximálne hodnoty radiálnych rýchlostí. Vidíme, že planéta je zhruba 1000-krát ľahšia ako jej materská hviezda, pri našej presnosti výpočtov ju teda naozaj môžeme zanedbať.

- (p) Hmotnosť planéty je zhruba dvojnásobkom hmotnosti Jupitera a jej veľká polos je o niečo väčšia ako veľká polos Jupitera, ide preto o *chladný Jupiter*. 8b

# Praktická časť

## P1 Mliečna cesta

(125 b, autor: Samuel Buranský)

Na priložených mapách je v takzvanej *fish-eye* projekcii zobrazená severná obloha (obr. P1.1) a južná obloha (obr. P1.2). Mapy boli vytvorené ako snímky celej oblohy zo severného, respektíve južného pólu.

*Poznámka k projekcii: Fish-eye projekcia je azimutálna projekcia so stredom v zenite. Vzdialenosť každého objektu od stredu mapy je priamo úmerná jeho zenitovej vzdialenosti.*

V prvej časti úlohy sa pozrieme na galaktický rovník, ktorý je hlavnou kružnicou na oblohe reprezentujúcou priemet roviny našej galaxie na nebeskú sféru.

- (a) [15 b] Zakreslite približnú polohu galaktického rovníka na severnej oblohe (obr. P1.1).
- (b) [15 b] Zakreslite približnú polohu galaktického rovníka na južnej oblohe (obr. P1.2).
- (c) [15 b] Na základe riešenia úloh (a) a (b) odhadnite približný rozsah deklinácií galaktického rovníka s presnosťou  $\pm 8^\circ$ .
- (d) [15 b] Na základe výsledku úlohy (c) určte rozsah zemepisných šírok, odkiaľ je možné vidieť v priebehu roka celú Mliečnu cestu, reprezentovanú galaktickým rovníkom.

V ďalšej časti sa pozrieme na niektoré špecifické body v sústave galaktických súradníc.

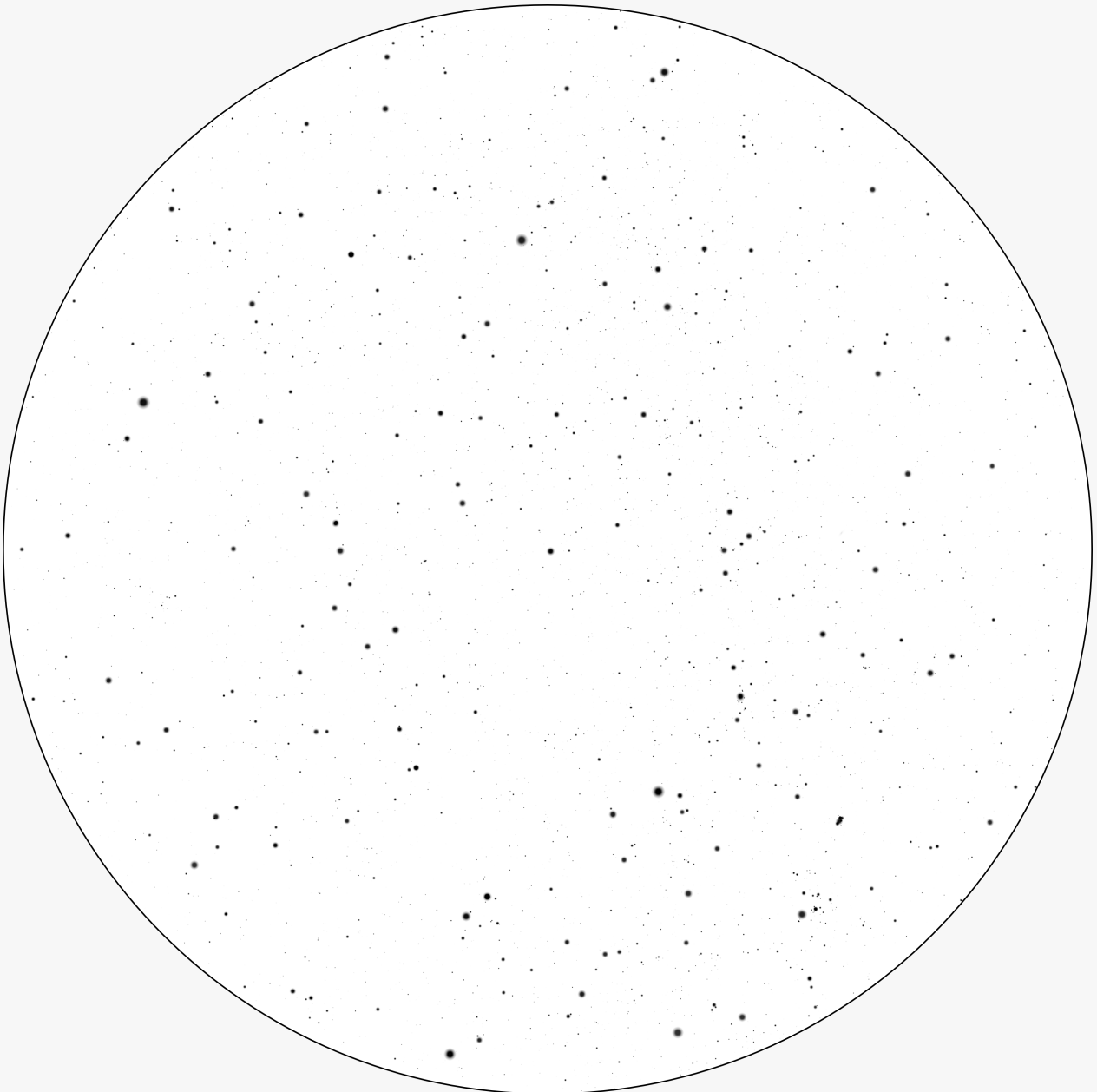
- (e) [10 b] Vyznačte do príslušných máp približnú polohu severného a južného galaktického pólu. Zároveň napíšte latinské názvy súhvezdí, v ktorých sa nachádzajú.
- (f) [10 b] Kde sa nachádza bod, ktorý určuje počiatok galaktických súradníc? Napíšte latinský názov súhvezdia, v ktorom sa nachádza, názov objektu, ktorý ho reprezentuje, a vyznačte približnú polohu v príslušnej mape.

Na oblohe poznáme ešte ďalšie dve významné kružnice, a to nebeský rovník a ekliptiku.

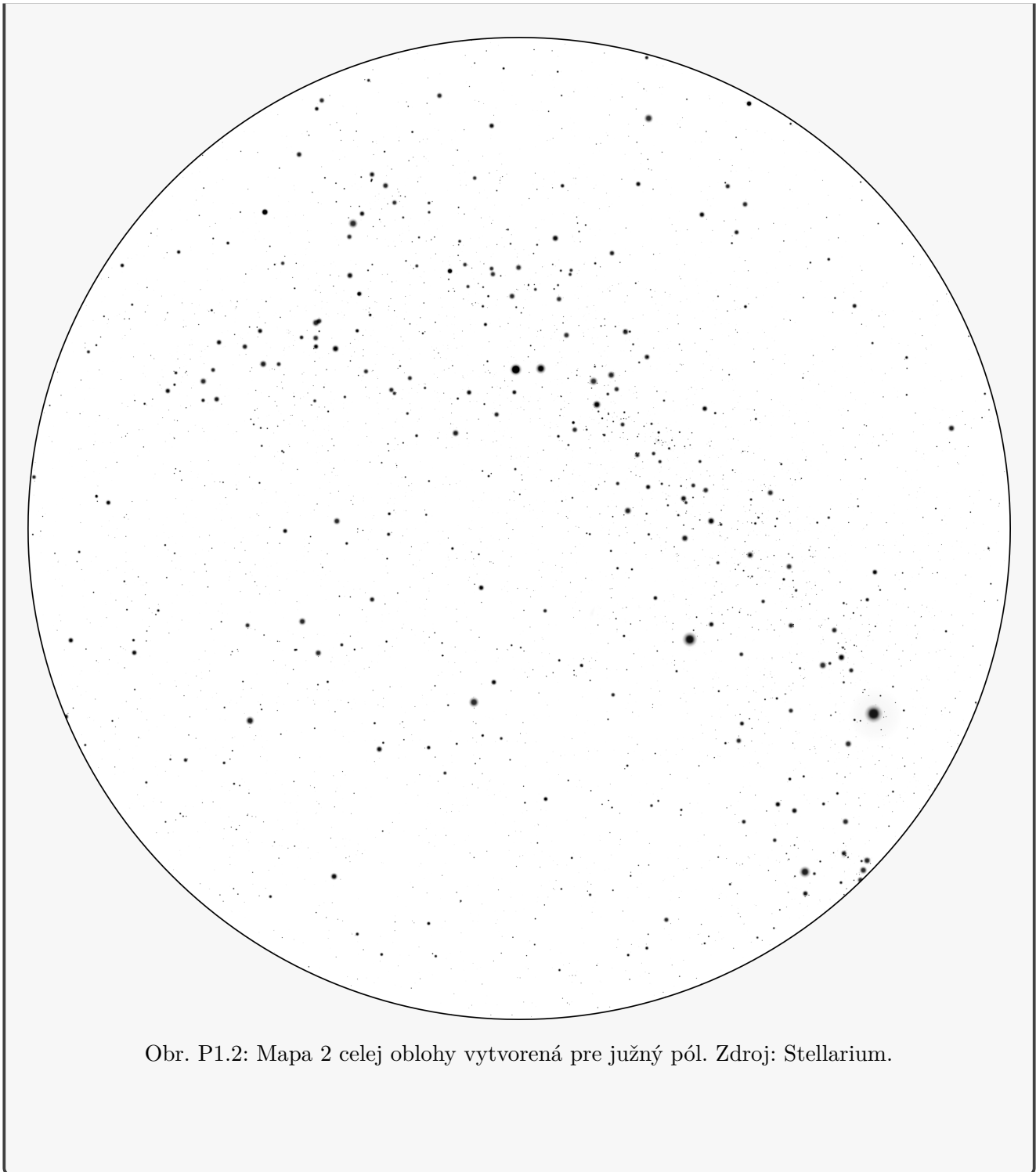
- (g) [10 b] Existujú súhvezdia, v ktorých sa pretína galaktický a nebeský rovník? Napíšte latinský názov aspoň jedného z nich.
- (h) [15 b] Bolo by možné na oblohe pozorovať nejakú planétu na pozadí Mliečnej cesty? Ak áno, v akom súhvezdí? Napíšte jeho latinský názov.

V poslednej časti úlohy sa pozrieme na ostatné hviezdy a objekty vzdialeného vesmíru.

- (i) [10 b] Kde na oblohe sa najviac vyskytujú guľové hviezdokopy a kde otvorené hviezdokopy? Vypíšte aspoň dve guľové hviezdokopy, ktoré toto rozdelenie porušujú.
- (j) [10 b] V úlohe sme sa zameriavali na našu galaxiu, na záver sa pozrieme na tie ostatné. V ktorom ročnom období ich pozorovateľ na severnej/južnej pologuli môže pozorovať najviac? Vysvetlite prečo a napíšte aspoň tri zoskupenia galaxií, ktoré to potvrdzujú.



Obr. P1.1: Mapa 1 celej oblohy vytvorená pre severný pól. Zdroj: Stellarium.



- (a) Poloha galaktického rovníka na severnej oblohe je zakreslená na mape na obrázku P1.4.
- (b) Poloha galaktického rovníka na južnej oblohe je zakreslená na mape na obrázku P1.5.
- (c) V deklinácii je galaktický rovník symetrický a jeho rozsah je približne od  $-62,5^\circ$  do  $62,5^\circ$ . Ak si túto hodnotu nepamätáme ani približne, je možné ju odhadnúť podľa nášho nákresu.

Využijeme vlastnosť fish-eye projekcie, a to vlastnosť, že vzdialenosť od stredu je daná zenitovou vzdialenosťou. Stačí nájsť najbližší bod galaktického rovníka k zenitu, čo je v súhvezdí Kasiopeja, ktorá sa nachádza zhruba v tretine ( $30^\circ$ ) vzdialenosti zenitu a horizontu. To znamená, že maximálna deklinácia je približne  $60^\circ$ .

- (d) Vzhľadom na symetriu nám stačí nájsť najsevernejší bod, z ktorého je ešte vidieť najjužnejší bod galaktického rovníka. Výška hviezdy s deklináciou  $\delta$  na zemepisnej šírke  $\varphi$  pri kulminácii je (pre odvodenie viď. obrázok P1.3) 3b

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta. \quad (\text{P1.1}) \quad 4b$$

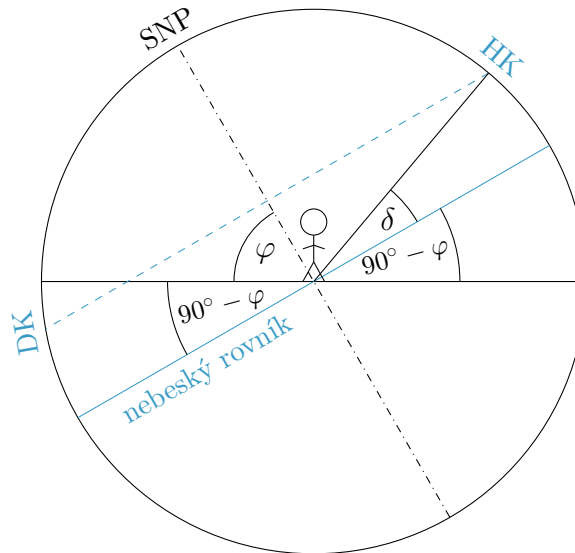
Keďže hľadáme limit, tak hľadáme miesto, kde je galaktický rovník presne na horizonte, teda ho limitne vidíme. Dosadíme do rovnice  $h = 0^\circ$  2b

$$0^\circ = 90^\circ - \varphi + \delta, \quad (\text{P1.2})$$

odkiaľ vyjadríme zemepisnú šírku

$$\varphi = 90^\circ + \delta. \quad (\text{P1.3}) \quad 3b$$

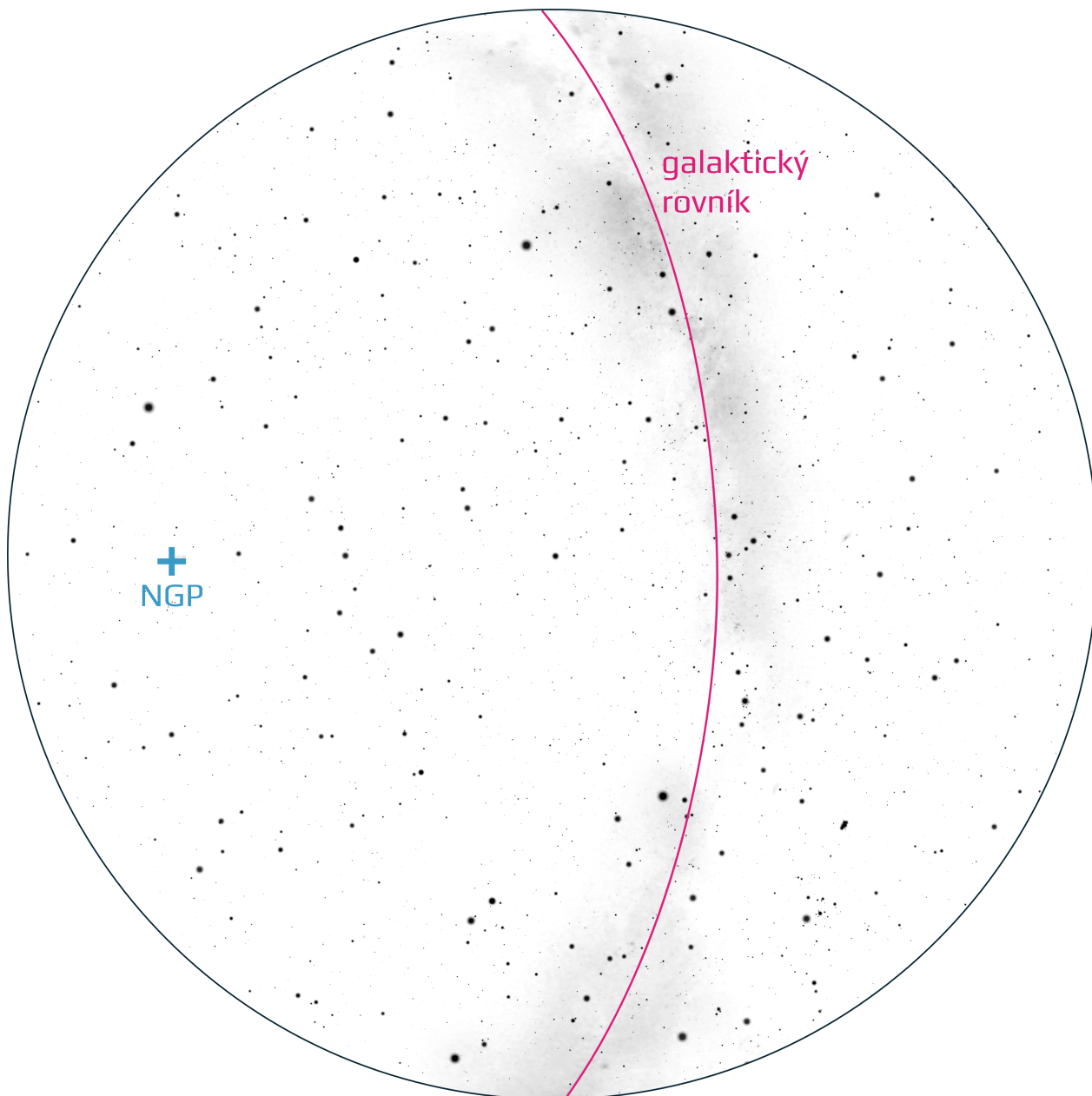
Pri hľadaní najsevernejšieho bodu, kde vidíme ešte najjužnejšiu časť galaktického rovníka, dosadíme  $\delta = -62,5^\circ$ , teda dostaneme  $\varphi = 27,5^\circ$ . Rozsah zemepisných šírok, odkiaľ je vidieť celý galaktický rovník, je od  $-27,5^\circ$  do  $27,5^\circ$ . 3b



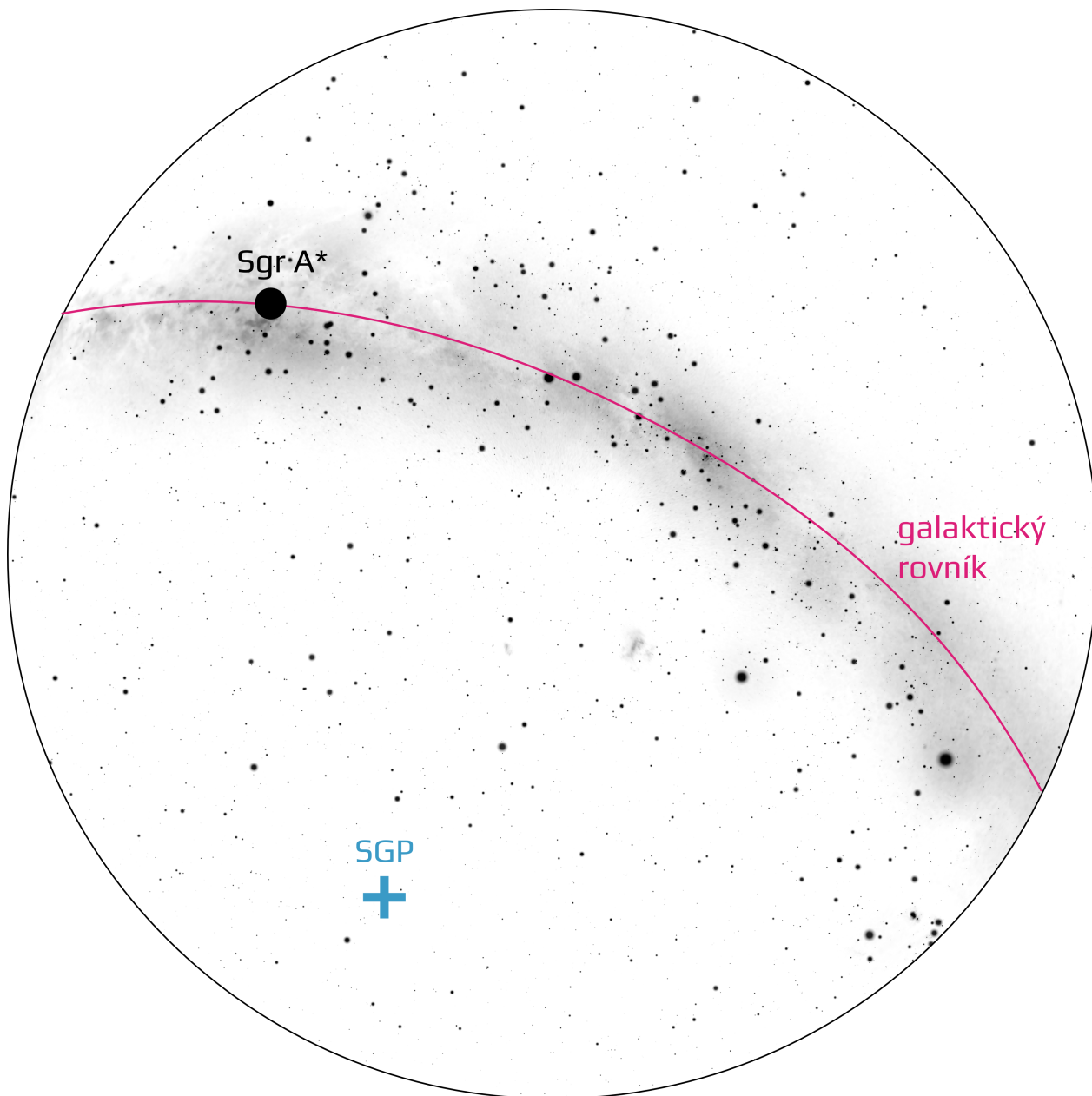
Obr. P1.3: Schéma na výpočet výšky hviezdy pri hornej kulminácii. Použité skratky: HK/DK - horná/dolná kulminácia, SNP - severný nebeský pól.

- (e) Severný galaktický pól sa nachádza v súhvezdí Coma Berenices (Vlasy Bereniky) a je vyznačený krížikom v mape na obrázku P1.4. Južný galaktický pól sa nachádza v súhvezdí Sculptor (Sochár) a je vyznačený krížikom na mape na obrázku P1.5.

- (f) Centrum Galaxie predstavuje čierna diera s označením Sgr A\* v súhvezdí Sagittarius (Strelec) a je vyznačené na mape na obrázku P1.5.
- (g) Keďže sú mapy vytvorené presne pre svetové póly tak horizont máp je zhodný s nebeským rovníkom. Stačí teda nájsť miesta, kde sa galaktický rovník pretína s horizontom, a to je súhvezdie Monoceros (Jednorožec) a na druhej strane súhvezdie Aquila (Orol).
- (h) Galaktický rovník má s ekliptikou dva priesečníky. Keďže ale hľadáme planéty na pozadí Mliečnej dráhy, tak berieme širšie okolie galaktického rovníka. Jeden priesečník je blízko hranice súhvezdí Gemini (Blíženci) a Taurus (Býk) a na druhej strane je priesečník blízko hraníc súhvezdí Scorpius (Škorpión), Sagittarius (Strelec) a Ophiuchus (Hadonos).
- (i) Guľové hviezdokopy sa štandardne v Galaxii vyskytujú v galaktickom hale a galaktickej výduti, čo na oblohe predstavuje predovšetkým oblasť mimo galaktického disku. Otvorené hviezdokopy obsahujú hlavne mladé hviezdy a vznikajú a existujú v galaktickom disku. Tomuto rozdeleniu nezodpovedajú guľové hviezdokopy v blízkosti galaktického disku ako napríklad M71 (Sge), M56 (Lyr), M28 (Sgr), M22 (Sgr), M69 (Sgr), M70 (Sgr), M28 (Sgr) ...
- (j) Najviac galaxií je možné pozorovať predovšetkým na jar, keďže jarnou oblohou Mliečna cesta skoro vôbec neprechádza (na jarnej oblohe sa nachádza severný galaktický pól) a nebráni pozorovaniu vzdialených galaxií. Dôkazom sú výrazné kopy galaxií na jarnej oblohe ako Kopa galaxií v Panne, Kopa galaxií vo Vlasoch Bereniky a trojica galaxií *Leo triplet*. Pre pozorovateľov na južnej pologuli je rovnaká situácia pre ich jarnú oblohu (z nášho pohľadu jesenná) a v blízkosti južného galaktického pólu sa nachádza Skupina galaxií v Sochárovi.



Obr. P1.4: Mapa celej oblohy vytvorená pre severný pól. Ružovou farbou je vyznačený galaktický rovník, krížikom je vyznačený severný galaktický pól. Zdroj: Stellarium.



Obr. P1.5: Mapa celej oblohy vytvorenej pre južný pól. Ružovou farbou je vyznačený galaktický rovník, krížikom južný galaktický pól a čiernym krúžkom objekt Sgr A\* (čierna diera). Zdroj: Stellarium.

**P2 Dobrodruh**

(125 b, autor: Jana Švrčková)

Dobrodruh počas roka 2026 cestuje po svete a zakresľuje si mapy hviezdnej oblohy tak, ako ju vidí na niektorých zaujímavých miestach, ktoré sú vypísané v priloženej tabuľke. Všetky tieto mapy máte k dispozícii. Každá mapa bola zakreslená o polnoci pásmového času na danom mieste, pričom pásmový čas sa na žiadnom z miest výrazne nelíši od miestneho času. V každej mape je tiež vyznačený meridián a cirkumpolárna kružnica.

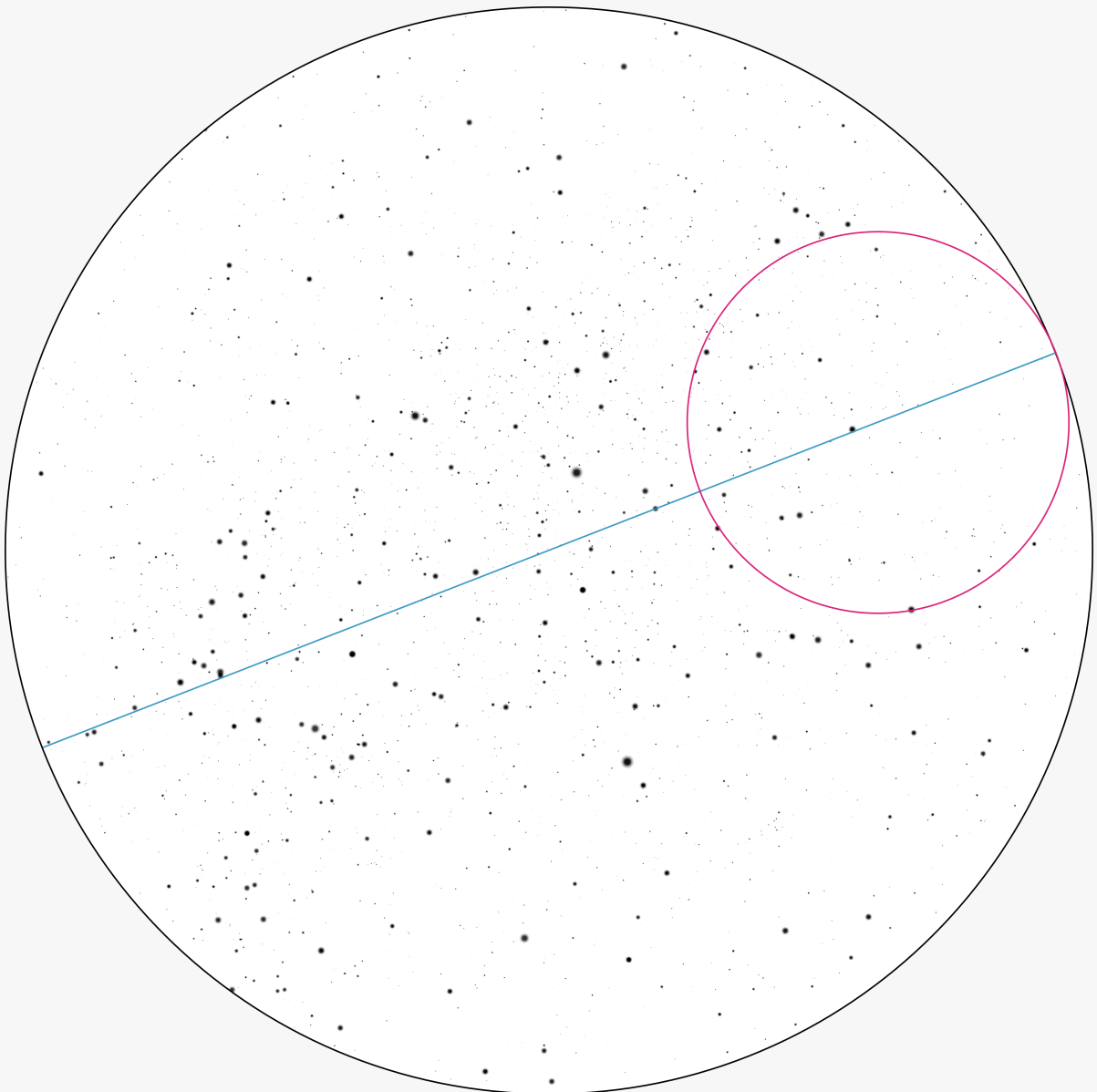
- (a) [20 b] Priradte každú hviezdnu mapu ku geografickému miestu, ktorého oblohu ukazuje. Vašu odpoveď stručne zdôvodnite.
- (b) [25 b] Ku každej hviezdnej mape napíšte aj dátum, pre ktorý bola vytvorená. Na výber máte z nasledujúcich možností:
- 10. 2. 2026,
  - 15. 4. 2026,
  - 1. 7. 2026,
  - 9. 9. 2026,
  - 24. 12. 2026.
- (c) [25 b] Ku každej hviezdnej mape doplňte aj jej miestny hviezdny čas. Na výber máte z nasledujúcich hodnôt:
- $4^{\text{h}} 16^{\text{min}}$ ,
  - $9^{\text{h}} 29^{\text{min}}$ ,
  - $13^{\text{h}} 5^{\text{min}}$ ,
  - $17^{\text{h}} 31^{\text{min}}$ ,
  - $21^{\text{h}} 29^{\text{min}}$ .
- (d) [20 b] Do všetkých piatich máp vyznačte kardinálne body (hlavné svetové strany).
- (e) [20 b] V mape B je vyznačených 10 hviezd – vašou úlohou je napísať do tabuľky ich názov alebo Bayerovo označenie a latinský názov súhvezdia, v ktorom sa nachádzajú. Rozhodnite, ktoré z nich patria medzi 10 najjasnejších hviezd nočnej oblohy (podľa zdanlivej vizuálnej magnitúdy).
- (f) [15 b] Dobrodruh si obľúbil pozorovanie deep-sky objektov, pričom na každom mieste pozoruje nejaké iné. Vašou úlohou je vytvoriť návrh takéhoto pozorovania – do každej mapy zakreslite polohy 3 ľubovoľných Messierových alebo iných deep-sky objektov podľa vášho výberu a pripíšte k nim názov alebo katalógové označenie. Dajte pozor na to, aby boli v každej mape zakreslené iné objekty.

Tabuľka P2.1: Tabuľka s mapami, ktoré zakresľoval dobrodruh na cestách.

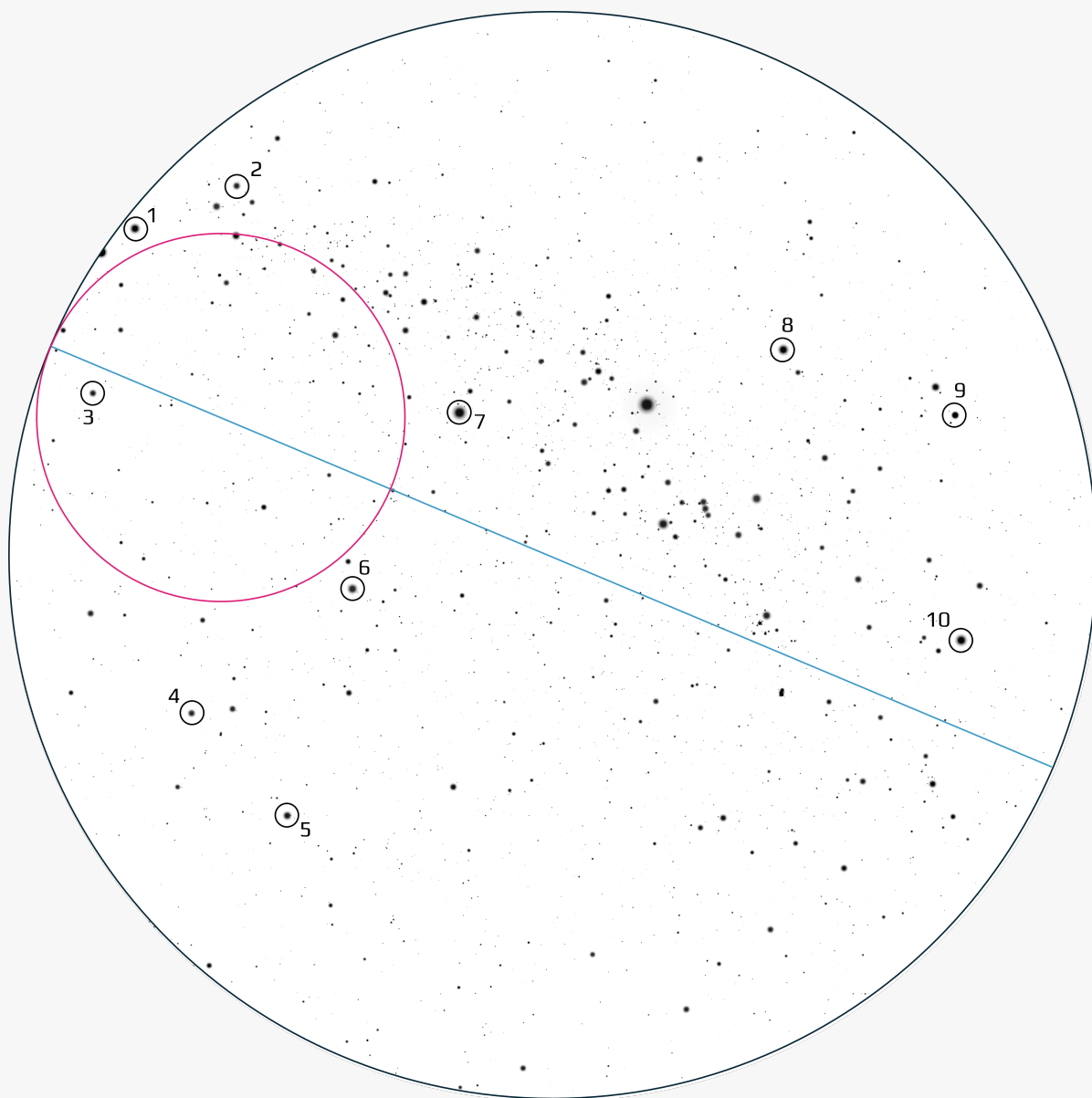
Miesto	Zem. šírka	Zem. dĺžka	Dátum	Hviezdny čas	Mapa
Hanga Roa	27° 8' S	109° 25' W			
Phuket	7° 53' N	98° 24' E			
Punta Arenas	53° 9' S	70° 55' W			
St. Cruz de Tenerife	28° 28' N	16° 15' W			
Sobotište	48° 44' N	17° 24' E			

Tabuľka P2.2: Tabuľka s hviezdami zakrúžkovanými na mape B.

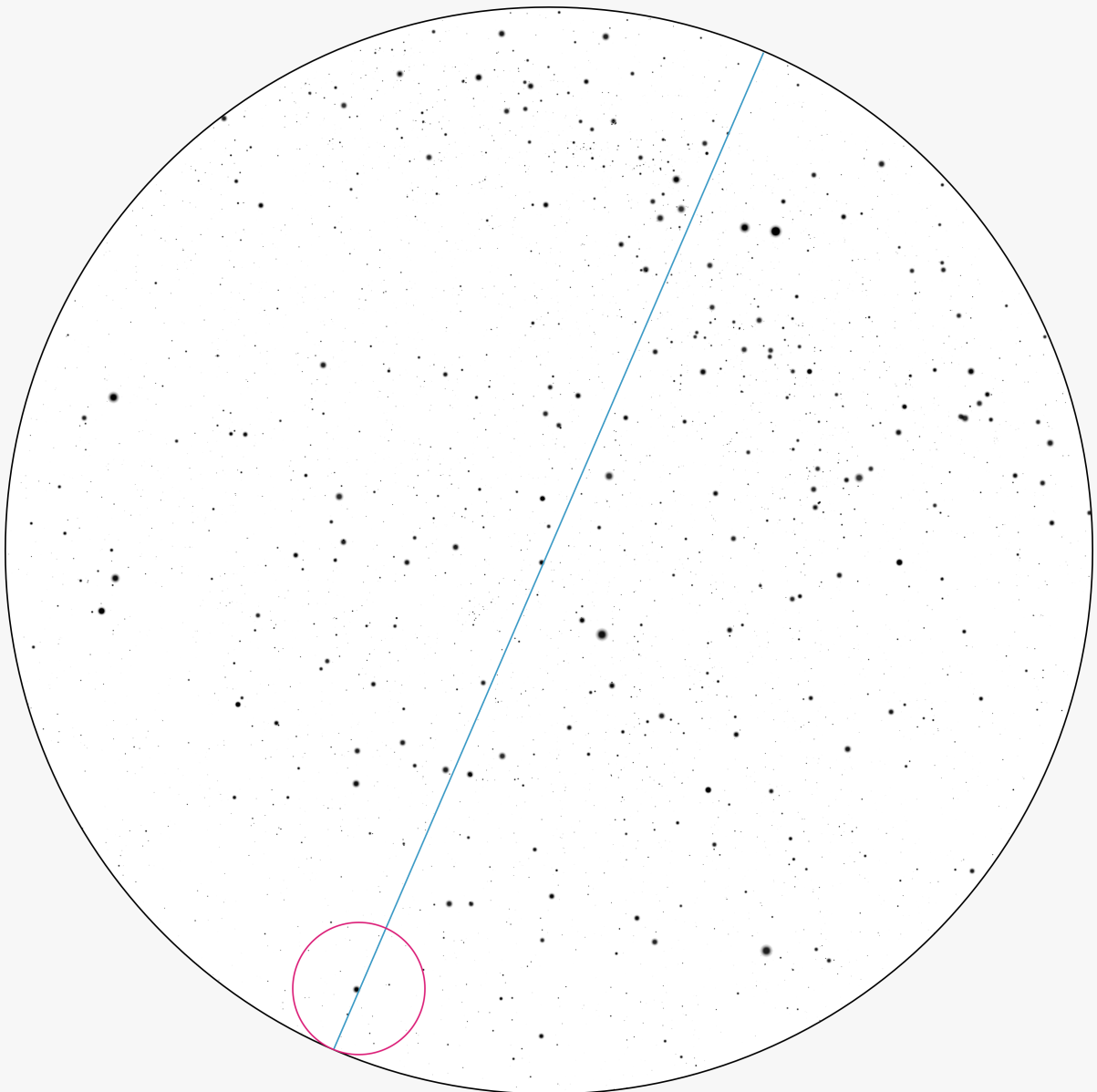
Hviezda	Názov/označenie	Súhvezdie	Top 10 (áno/nie)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			



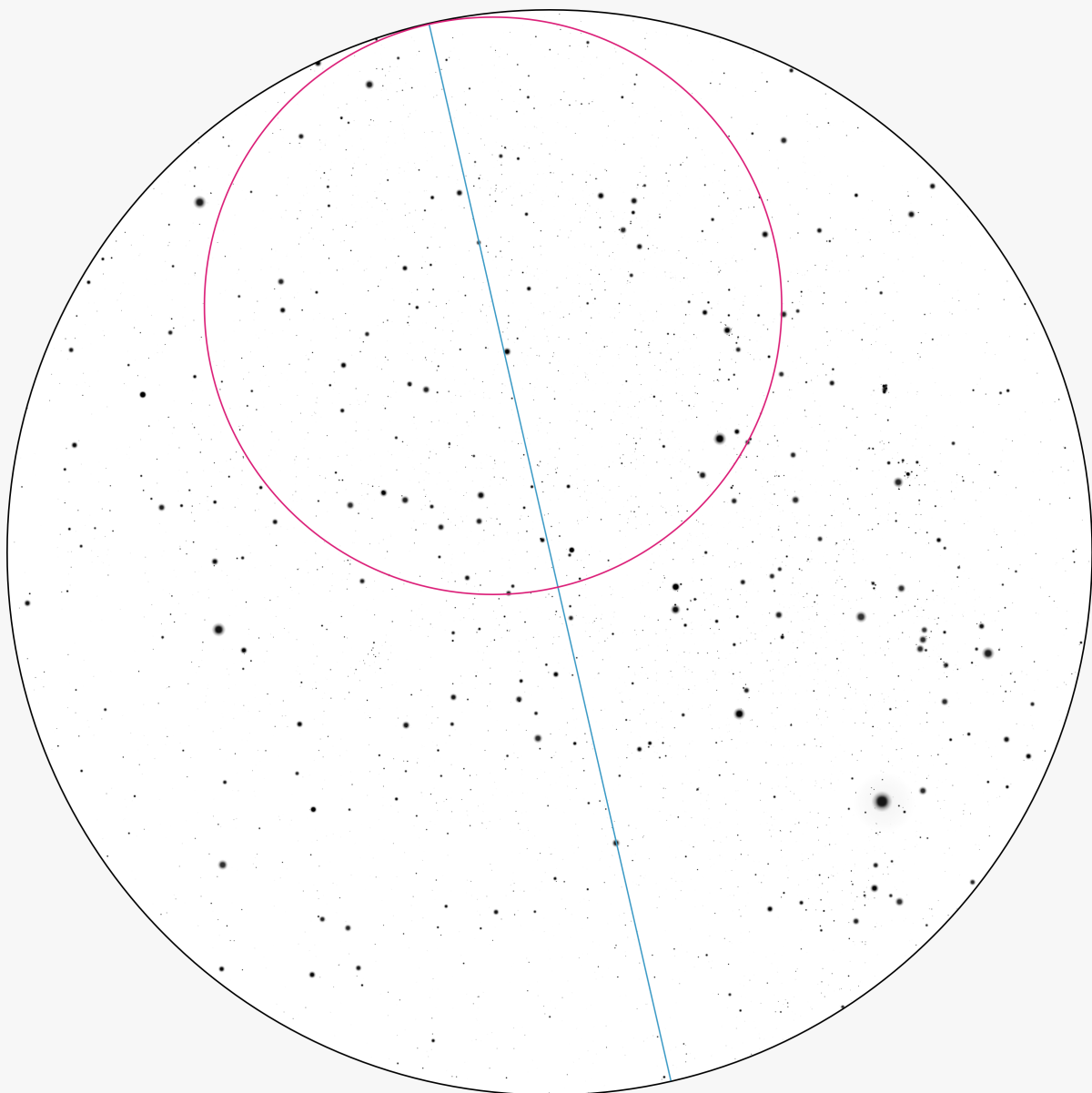
Obr. P2.1: Mapa A. Zdroj: Stellarium.



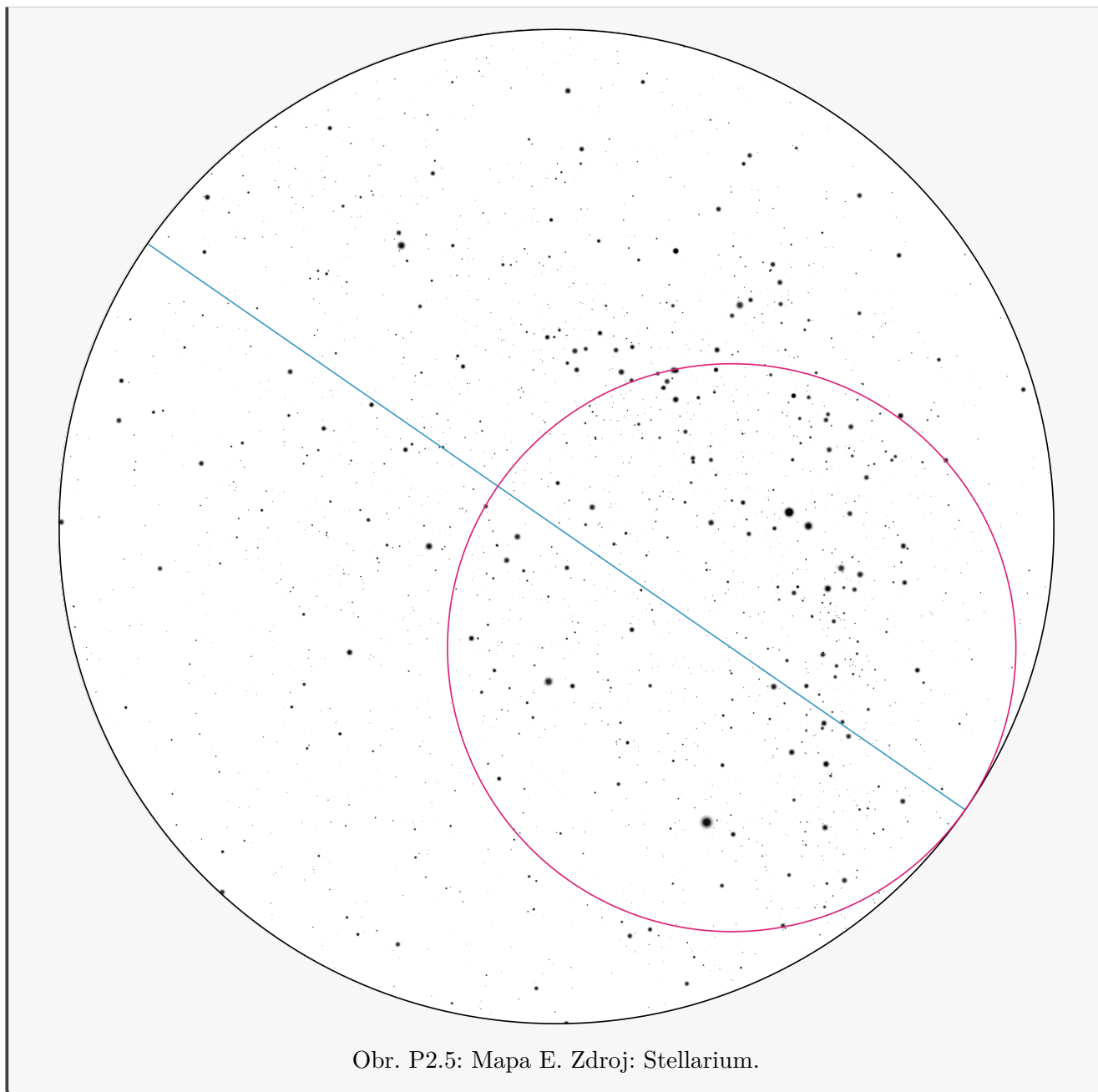
Obr. P2.2: Mapa B. Zdroj: Stellarium.



Obr. P2.3: Mapa C. Zdroj: Stellarium.



Obr. P2.4: Mapa D. Zdroj: Stellarium.



- (a) Zemepisnú šírku pozorovacieho miesta nám napovedajú cirkumpolárne kružnice – čím sú väčšie, tým bližšie sa nachádza k pólom. Severnú/južnú pologuľu určíme podľa toho, ktorý svetový pól je vidno nad obzorom. Napríklad mapy D a E majú najväčšie cirkumpolárne kružnice, musia preto zodpovedať aj najväčším zemepisným šírkam. Na mape D je vidno severný pól, musela byť preto vyrobená pre Sobotište, zatiaľ čo mapa E bola určite vyrobená pre Punta Arenas, pretože je na nej vidno južný pól. Všetky správne odpovede sú uvedené v tabuľke P2.3.
- (b) Riešenie tejto a nasledujúcej úlohy nám uľahčí fakt, že všetky mapy boli zakreslené o polnoci. To znamená, že dátumy a hviezdne časy na sebe navzájom závisia – mapa s neskorším dátumom zodpovedá zároveň aj neskoršiemu hviezdnomu času. Dátum môžeme odhadnúť

podľa polohy bodov rovnodennosti a slnovratných bodov alebo tiež podľa polohy súhvezdí typických pre určité ročné obdobie. Napríklad na mape C vidíme v okolí meridiánu typické súhvezdia jarnej oblohy, pričom jarný bod je kúsok západne od meridiánu – to naznačuje, že mapa zodpovedá obdobiu krátko po jarnej rovnodennosti. Z dátumov, ktoré máme na výber, tomu najlepšie zodpovedá 15. 4. 2026. Podobným spôsobom určíme dátumy pre všetky mapy, správne odpovede sú v tabuľke P2.3.

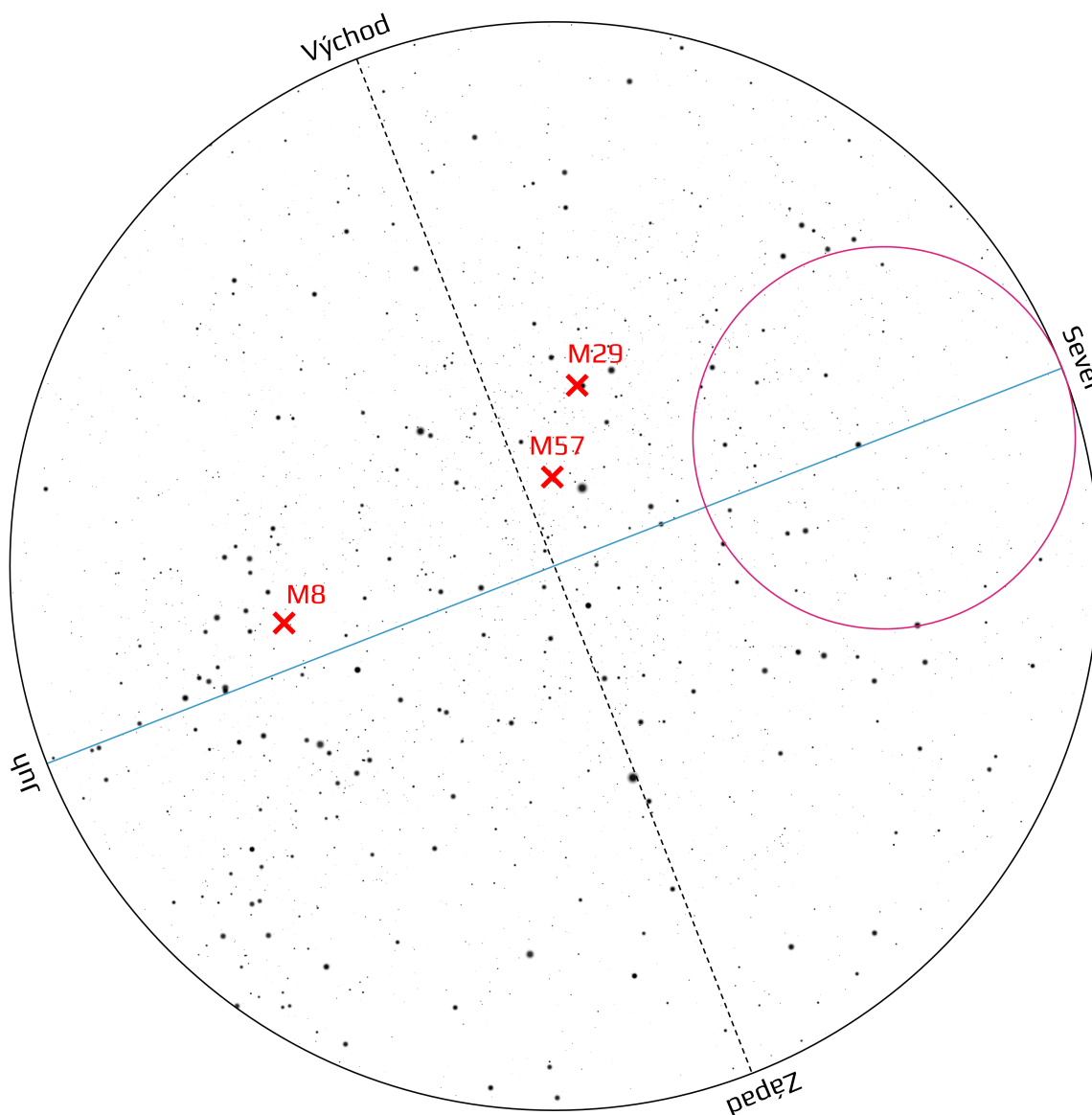
- (c) Hviezdny čas vieme tiež odhadnúť z polohy súhvezdí a významných bodov na oblohe. Napríklad v mape B je vidno, že súhvezdie Orión sa nachádza východne od meridiánu. Ak si pamätáme, že sa Orión tesne zmestí medzi hodnoty rektascenzie  $5^{\text{h}}$  a  $6^{\text{h}}$ , môžeme zhruba odhadnúť, že na meridiáne sa v tom momente nachádzajú hviezdy s rektascenziou  $4^{\text{h}}$ , čo sa zároveň rovná aj hviezdному času. V ponúkaných možnostiach máme veľmi blízku hodnotu  $4^{\text{h}} 16^{\text{min}}$ . Ostatné správne hodnoty sú uvedené v tabuľke P2.3.
- (d) Sever a juh nájdeme v mieste, kde sa meridián pretína s horizontom, pričom ich rozlíšime podľa viditeľného svetového pólu. Teda ak vidíme Polárku nad obzorom, smer na sever vyznačíme v jej blízkosti, ak vidíme súhvezdie Oktant, bude pri ňom smer na juh. Kolmo na meridián nakreslíme priamku tak, aby prechádzala cez zenit v strede mapy – teda prvý vertikál, pomocou ktorého určíme smery na východ a západ. Pritom si môžeme uvedomiť, že keď sa pozeráme na skutočnú oblohu smerom na juh, po ľavej ruke máme východ a po pravej západ. Ak si teda mapu natočíme tak, aby juh bol na jej dolnom okraji, východ bude v ľavej časti mapy a západ v pravej časti mapy.
- (e) Správne odpovede sú v tabuľke P2.4.
- (f) V mapách P2.6 až P2.10 je zakreslená jedna z mnohých možných kombinácií deep-sky objektov.

Tabuľka P2.3: Tabuľka s doplnenými údajmi o mapách, ktoré zakresloval dobrodruh.

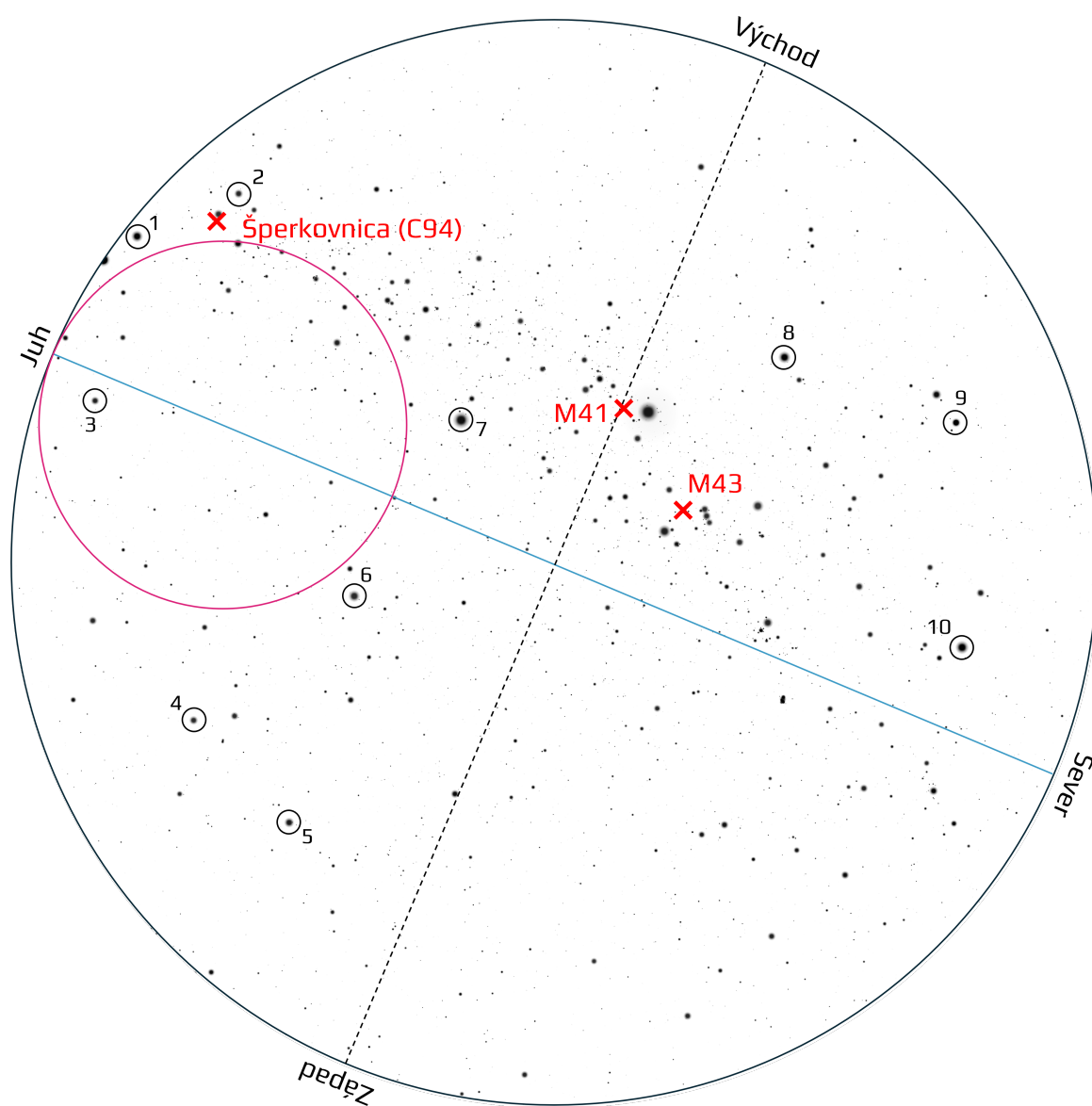
Miesto	Zem. šírka	Zem. dĺžka	Dátum	Hviezdny čas	Mapa
Hanga Roa	$27^{\circ} 8' \text{ S}$	$109^{\circ} 25' \text{ W}$	24. 12. 2026	$4^{\text{h}} 16^{\text{min}}$	B
Phuket	$7^{\circ} 53' \text{ N}$	$98^{\circ} 24' \text{ E}$	15. 4. 2026	$13^{\text{h}} 5^{\text{min}}$	C
Punta Arenas	$53^{\circ} 9' \text{ S}$	$70^{\circ} 55' \text{ W}$	9. 9. 2026	$21^{\text{h}} 29^{\text{min}}$	E
Santa Cruz de Tenerife	$28^{\circ} 28' \text{ N}$	$16^{\circ} 15' \text{ W}$	1. 7. 2026	$17^{\text{h}} 31^{\text{min}}$	A
Sobotište	$48^{\circ} 44' \text{ N}$	$17^{\circ} 24' \text{ E}$	10. 2. 2026	$9^{\text{h}} 29^{\text{min}}$	D

Tabuľka P2.4: Tabuľka s hviezdami zakrúžkovanými na mape B.

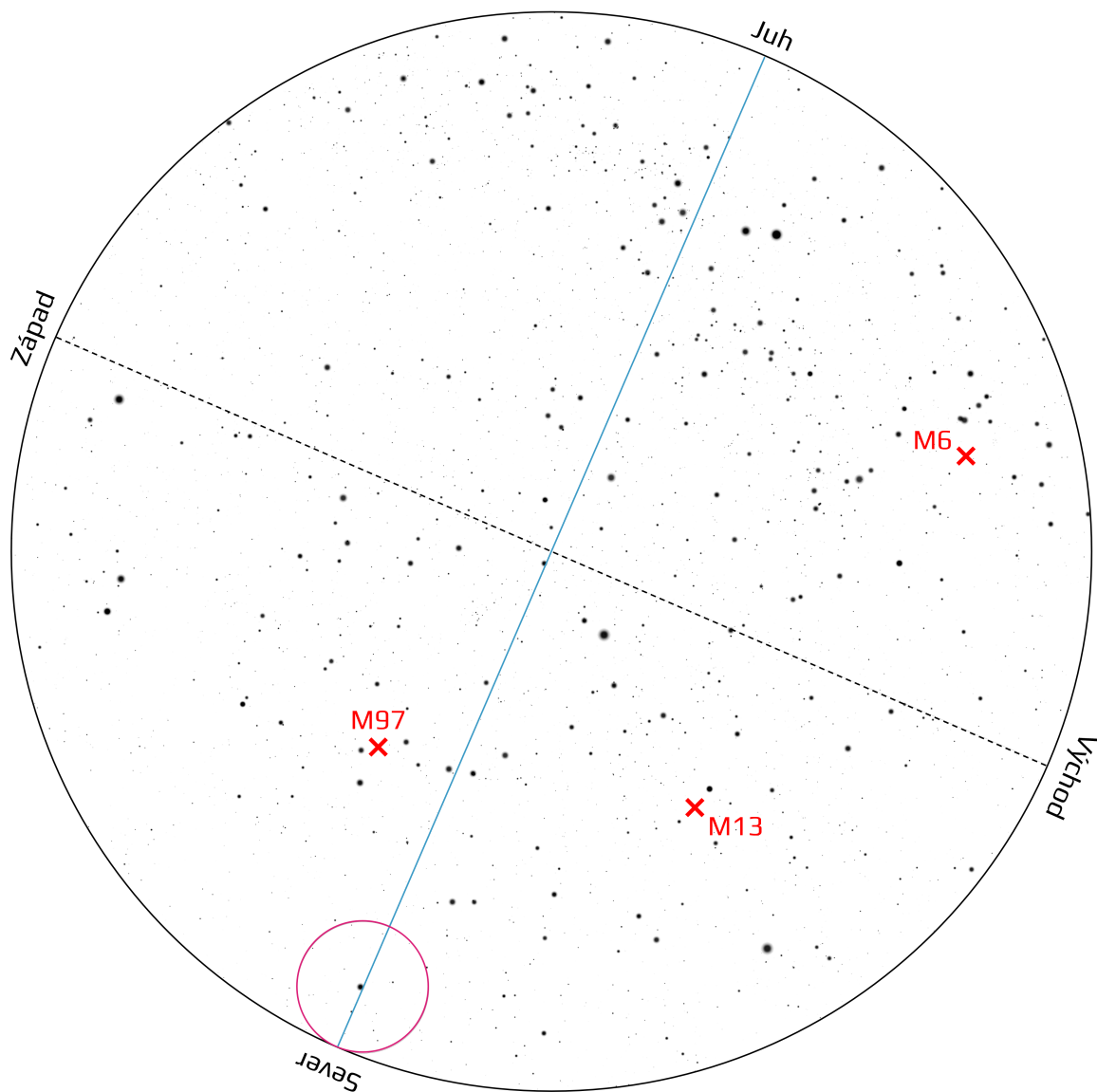
Hviezda	Názov/označenie	Súhvezdie	Top 10 (áno/nie)
1	Hadar/Agēna/ $\beta$ Cen	Centaurus	NIE
2	Gacrux/ $\gamma$ Cru	Crux	NIE
3	Atria/ $\alpha$ TrA	Triangulum Australe	NIE
4	Alnair/ $\alpha$ Gru	Grus	NIE
5	Fomalhaut/ $\alpha$ PsA	Piscis Austrinus	NIE
6	Achernar/ $\alpha$ Eri	Eridanus	ÁNO
7	Canopus/ $\alpha$ Car	Carina	ÁNO
8	Prokyón/ $\alpha$ CMi	Canis Minor	ÁNO
9	Castor/ $\alpha$ Gem	Gemini	NIE
10	Capella/ $\alpha$ Aur	Auriga	ÁNO



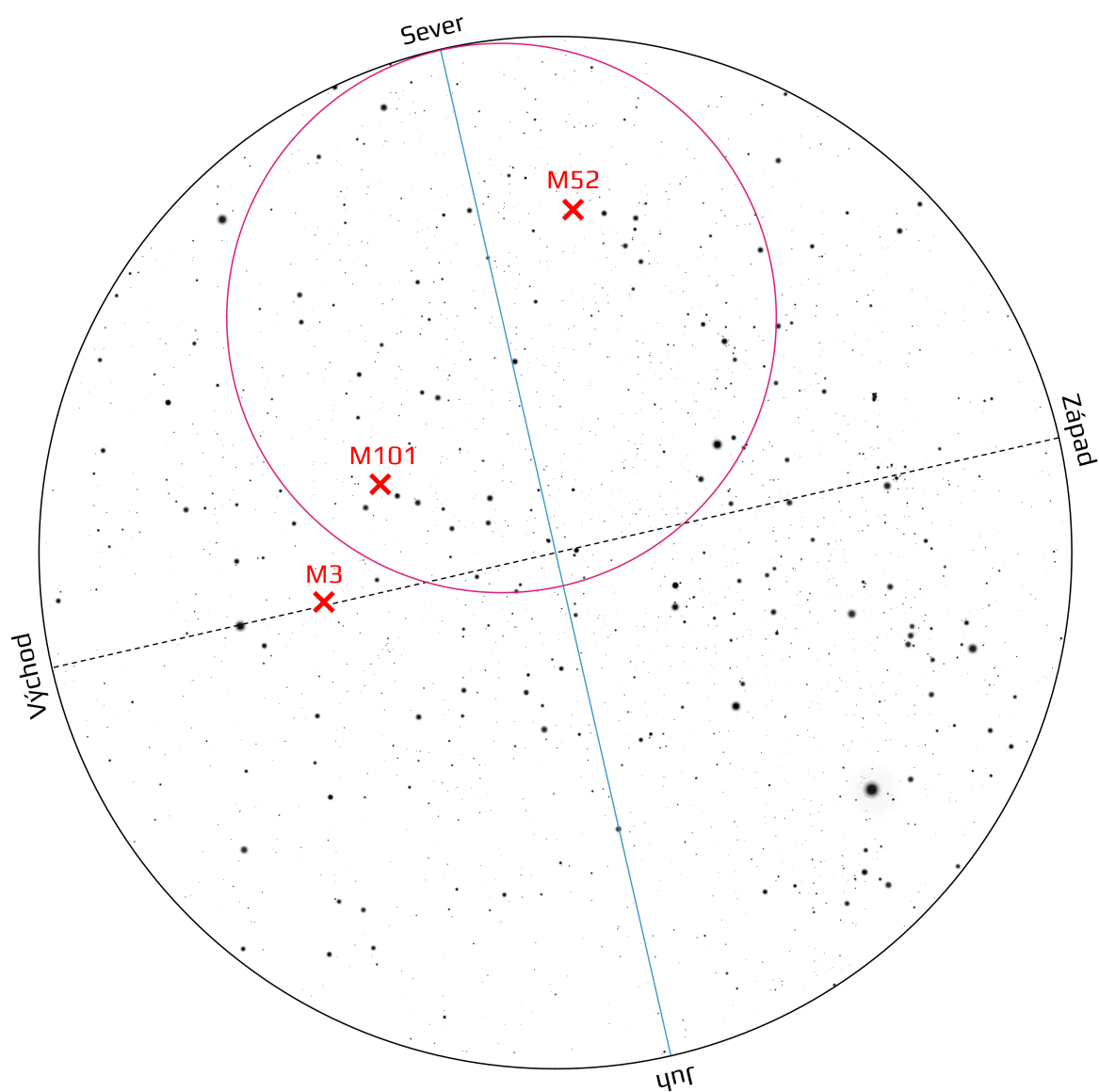
Obr. P2.6: Mapa A s označenými kardinálnymi bodmi a tromi deep-sky objektmi.



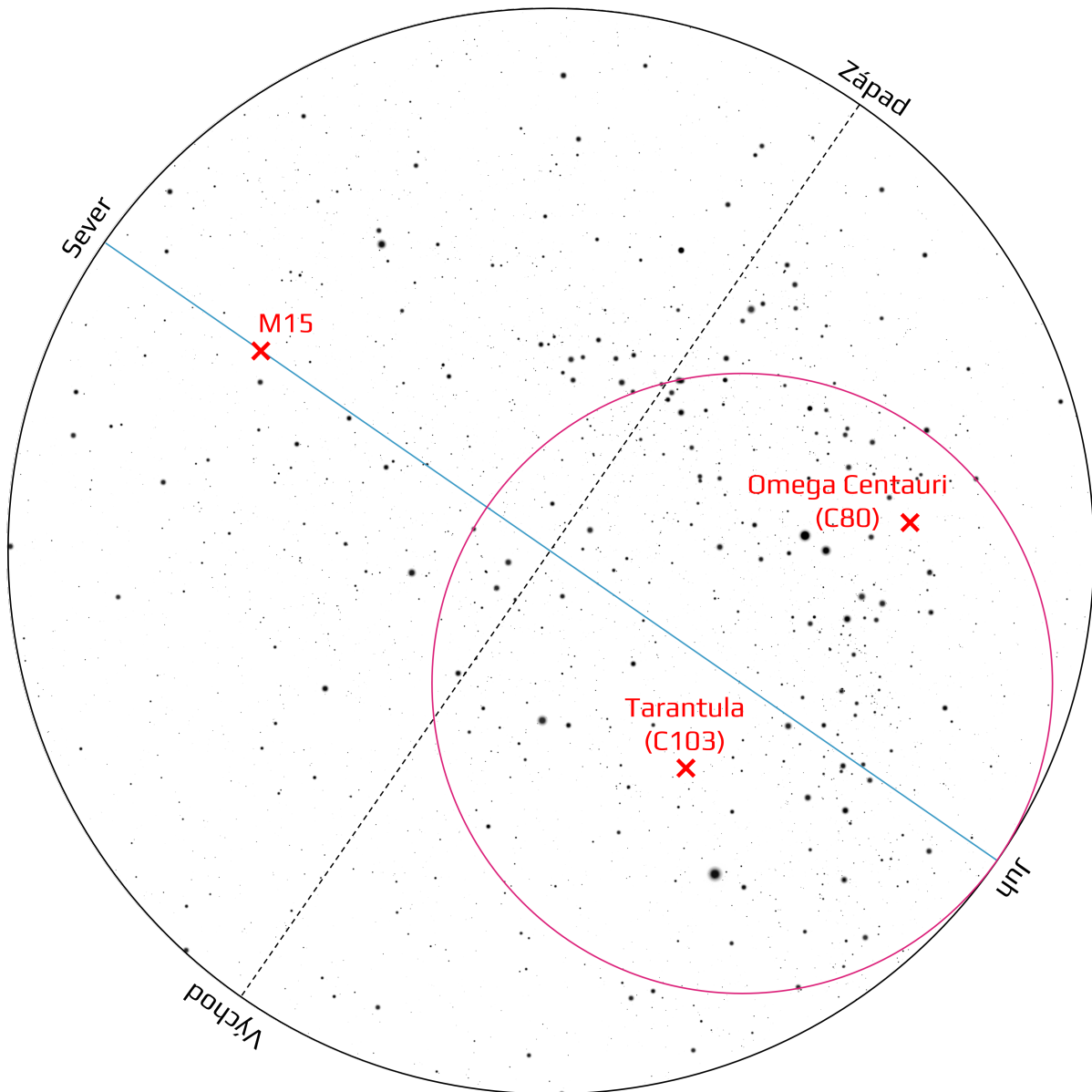
Obr. P2.7: Mapa B s označenými kardinálnymi bodmi a tromi deep-sky objektmi.



Obr. P2.8: Mapa C s označenými kardinálnymi bodmi a tromi deep-sky objektmi.



Obr. P2.9: Mapa D s označenými kardinálnymi bodmi a tromi deep-sky objektmi.



Obr. P2.10: Mapa E s označenými kardinálnymi bodmi a tromi deep-sky objektmi.

### P3 Meteory

(45b, autor: Radovan Lascsák & Samuel Buranský)

Zobrazená bude statická nočná obloha. Počas prvej minúty sa nebude nič diať, je to čas určený na zorientovanie sa medzi hviezdami. Následne budú na oblohe zobrazované prelety meteorov postupne pre 3 rôzne roje. Každý roj bude zobrazovaný po dobu jednej minúty. Vašou úlohou je určiť hodinovú frekvenciu a radiant každého meteorického roja. Polohy radiantov zakreslite do priloženej mapy a označte ich poradovým číslom roja. Po skončení tretieho roja budete mať ešte 1 minútu na dopísanie riešenia.

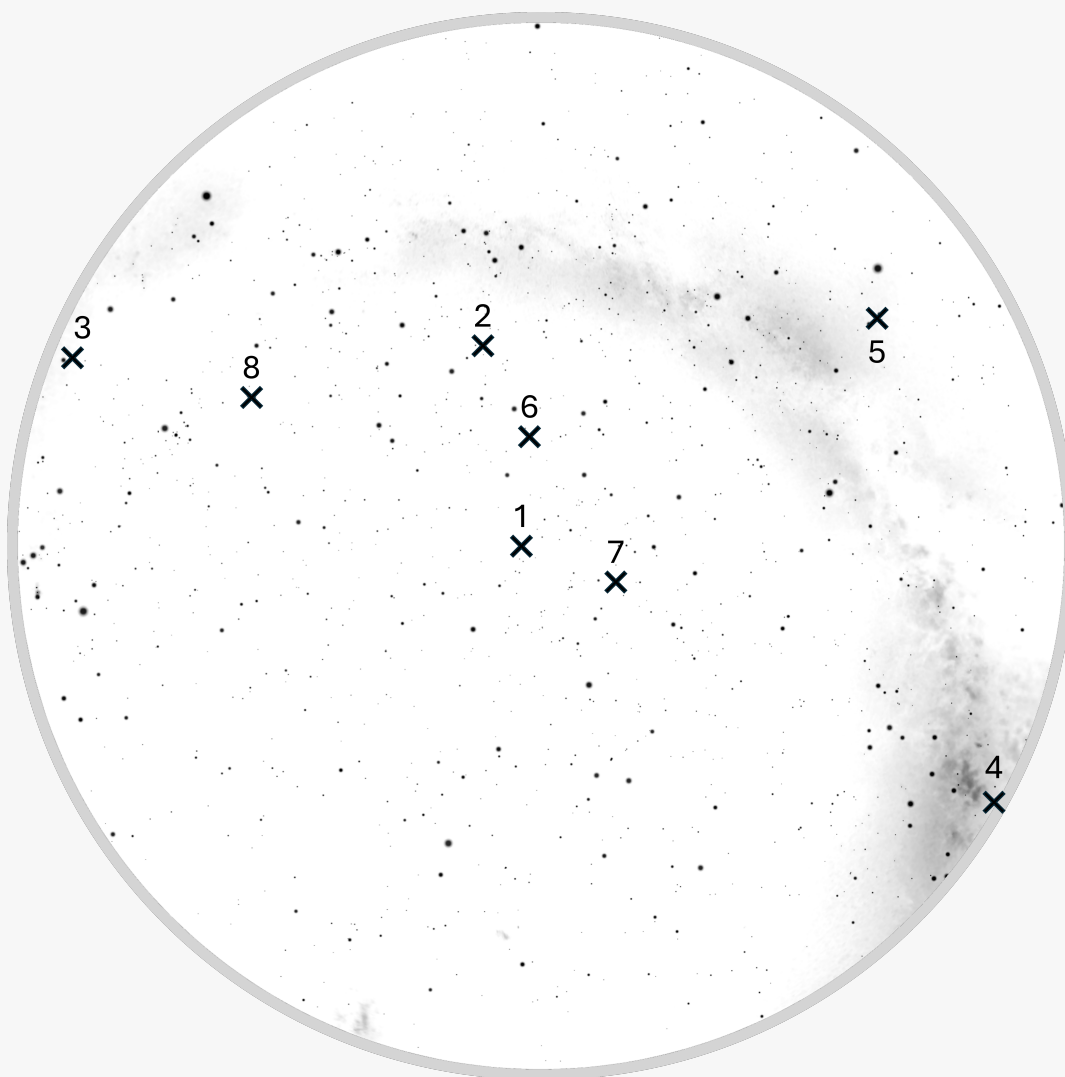
**P4** Poznávačka

(105 b, autor: Radovan Lascsák &amp; Samuel Buranský)




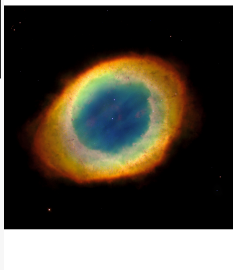


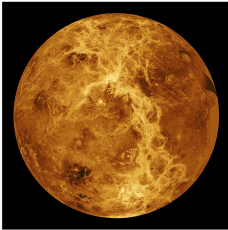
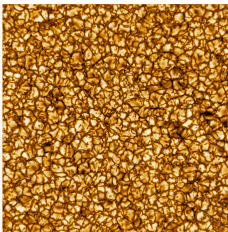

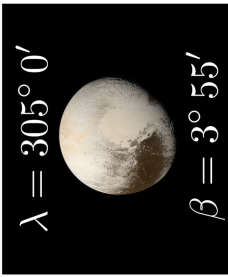
Planetárium zobrazí oblohu na nejakom mieste na Zemi v čase jarnej rovnodennosti o 14:00 UTC, 15 minút pred pravým poludním. Objekty slnečnej sústavy planetárium nezobrazuje.

Na priložených obrázkoch sú fotografie 10 rôznych objektov, z ktorých sa 8 nachádza nad horizontom a 2 pod ním. Vašou úlohou je tieto objekty správne identifikovať a priradiť ku krížikom vyznačeným na oblohe. Ku každému objektu napíšte číslo krížika, kde sa tento objekt nachádza (3 body za správne priradenie), zakrúžkujte, či je POD/NAD horizontom (6 bodov celkovo), a napíšte názov alebo označenie tohto objektu (2 body za objekt). Pozor, za nesprávne priradené objekty sa vám body odčítajú (mínus 1 bod za objekt). Za nesprávne určený názov objektu sa body nestrhávajú. Za túto časť úlohy viete získať 50 bodov.

Na základe premietnutej oblohy takisto vyriešte ďalšie priložené úlohy (a) až (h) za 55 bodov.



Obr. P4.1: Premietnutá obloha s vyznačenými krížikmi. Zdroj: Stellarium.

<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika:  $\alpha = 5 \text{ h } 56 \text{ m}$ $\delta = 7^\circ 25'$	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika: 	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie
<input type="text"/> číslo krížika:  $\lambda = 305^\circ 0'$ $\beta = 3^\circ 55'$	<input type="text"/> NAD / POD obzorom názov alebo označenie

(a) [10b] Odhadnite zemepisnú šírku, na ktorej sa nachádzame:

(b) [6b] Z nasledujúcich hlavných kružníc zakrúžkujte dvojicu, ktorá je na zobrazenej oblohe zhodná:

nebeský rovník    ekliptika    meridián    horizont    prvý vertikál    galaktický rovník

(c) [10b] K súhvezdiam napíšte ich skratku a zakrúžkujte tie, ktoré sú aspoň čiastočne nad obzorom:

i. Páv

vi. Rys

ii. Eridanus

vii. Južný kríž

iii. Vodný had

viii. Oktant

iv. Južný trojuholník

ix. Mucha

v. Jašterica

x. Južná koruna


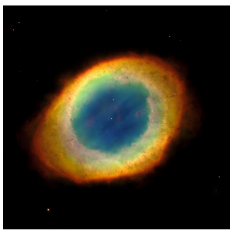



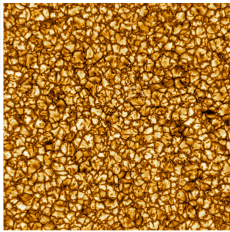

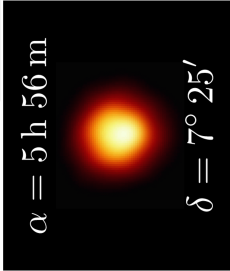


(d) [5b] Napíšte 5 súhvezdí, ktoré sú aspoň sčasti nad obzorom a prechádza cez ne nebeský rovník.

(e) [6b] Napíšte, koľko súhvezdí je na tejto oblohe plne cirkumpolárnych, a vypíšte ich.

(f) [6b] Odhadnite hviezdny čas:

(g) [6b] Odhadnite čas v UTC, kedy zapadne hviezda Mintaka:

(h) [6b] Odhadnite rektascenziu Veľkého Magellanovho mračna:

<p>číslo krížika: <input type="text" value="2"/></p>  <p>NAD / POD obzorom M31/ M32/ M110</p>	<p>číslo krížika: <input type="text" value="5"/></p>  <p>NAD / POD obzorom M57/ Prstenec</p>	<p>číslo krížika: <input type="text" value="3"/></p>  <p>NAD / POD obzorom M16/ Oriľa hmlovina</p>	<p>číslo krížika: <input type="text"/></p>  <p>NAD / POD obzorom M104/ Sombbrero</p>	<p>číslo krížika: <input type="text" value="8"/></p>  <p>NAD / POD obzorom M45/ Plejády</p>
<p>číslo krížika: <input type="text" value="1"/></p>  <p>NAD / POD obzorom Slnko</p>	<p>číslo krížika: <input type="text" value="7"/></p>  <p>NAD / POD obzorom Venuša</p>	<p>číslo krížika: <input type="text"/></p> <p><math>\alpha = 5 \text{ h } 56 \text{ m}</math> <math>\delta = 7^\circ 25'</math></p>  <p>NAD / POD obzorom <math>\beta</math> Ori/ Betelgeuse</p>	<p>číslo krížika: <input type="text" value="4"/></p> <p><math>\lambda = 305^\circ 0'</math> <math>\beta = 3^\circ 55'</math></p>  <p>NAD / POD obzorom Pluto</p>	<p>číslo krížika: <input type="text" value="6"/></p>  <p>NAD / POD obzorom 'Oumuamua</p>

- (a) [10b] Odhadnite zemepisnú šírku, na ktorej sa nachádzame:
- (b) [6b] Z nasledujúcich hlavných kružníc zakrúžkujte dvojicu, ktorá je na zobrazenej oblohe zhodná:  
 ekliptika    meridián    horizont     galaktický rovník
- (c) [10b] K súhvezdiam napíšte ich skratku a zakrúžkujte tie, ktoré sú aspoň čiastočne nad obzorom:
- |  |   |
|--|---|
| <input type="text" value="i."/> Páv <input type="text" value="Pav"/>         | vi. Rys <input type="text" value="Lyn"/>                                      |
| <input type="text" value="ii."/> Eridanus <input type="text" value="Eri"/>   | vii. Južný kríž <input type="text" value="Cru"/>                              |
| <input type="text" value="iii."/> Vodný had <input type="text" value="Hyi"/> | <input type="text" value="viii."/> Oktant <input type="text" value="Oct"/>    |
| iv. Južný trojuholník <input type="text" value="TrA"/>                       | ix. Mucha <input type="text" value="Mus"/>                                    |
| <input type="text" value="v."/> Jašterica <input type="text" value="Lac"/>   | <input type="text" value="x."/> Južná koruna <input type="text" value="CrA"/> |
- (d) [5b] Napíšte 5 súhvezdí, ktoré sú aspoň sčasti nad obzorom a prechádza cez ne nebeský rovník.
- (e) [6b] Napíšte, koľko súhvezdí je na tejto oblohe plne cirkumpolárnych, a vypíšte ich.
- (f) [6b] Odhadnite hviezdny čas:
- (g) [6b] Odhadnite čas v UTC, kedy zapadne hviezda Mintaka:
- (h) [6b] Odhadnite rektascenziu Veľkého Magellanovho mračna:

## P5 Zorné pole ďalekohľadu

(75 b, autor: Jana Švrčková)

- (a) [35 b] Namierte ďalekohľad na ľubovoľný z objektov uvedených v tabuľkách nižšie. Na výber máte z dvoch kategórií - ľahšie a ťažšie, pričom za nájdenie ľahkého objektu dostanete iba 20 bodov a za nájdenie ťažkého hviezdy dostanete 35 bodov. Keď budete hotoví, zavolajte organizátora, aby skontroloval, či ste ďalekohľad namierili správne. V prípade, že sa vám to nepodarilo, môžete v hľadaní pokračovať, pričom za každý neúspešný pokus stratíte 4 body. V hociktorej chvíli sa môžete rozhodnúť, že budete hľadať iný objekt z tabuľky. Ak žiadny objekt neviete v ďalekohľade nájsť, požiadajte organizátora o nájdenie hviezdy podľa vášho výberu. Stratíte kvôli tomu ale všetky body za túto časť úlohy.
- (b) [40 b] Odmerajte čas, za ktorý kvôli rotácii Zeme prejde objekt nájdený v časti a) krížom cez celé zorné pole ďalekohľadu. Na základe vášho merania vypočítajte veľkosť zorného poľa. Váš výpočet stručne vysvetlite a nezabudnite uviesť meno hviezdy/planéty, ktorú ste pozorovali.

Tabuľka P5.1: Tabuľka s hviezdami 1. kategórie, ktoré môžete použiť na meranie zorného poľa ďalekohľadu. Za nájdenie hociktorej z nich dostanete 35 bodov.

Názov	Deklinácia
Denebola ( $\beta$ Leo)	14° 25'
Vindemiatrix ( $\epsilon$ Vir)	10° 49'
Gemma (Alphecca, $\alpha$ CrB)	26° 37'
Izar ( $\epsilon$ Boo)	26° 58'
Sheliak ( $\beta$ Lyr)	33° 23'
Unukalhai ( $\alpha$ Ser)	6° 21'
Alphard ( $\alpha$ Hya)	-8° 47'

Tabuľka P5.2: Tabuľka s objektmi 2. kategórie, ktoré môžete použiť na meranie zorného poľa ďalekohľadu. Za nájdenie hociktoreho z nich dostanete 20 bodov.

Názov	Deklinácia
Regulus ( $\alpha$ Leo)	11° 50'
Dubhe ( $\alpha$ UMa)	61° 37'
Jupiter	22° 26'
Polárka ( $\alpha$ UMi)	89° 22'
Arktúr ( $\alpha$ Boo)	19° 3'
Vega ( $\alpha$ Lyr)	38° 48'
Spika ( $\alpha$ Vir)	-11° 18'

- (b) Podľa zadania zmeriame čas, ktorý trvá objektu prejsť celým zorným poľom. Pre čo najpresnejší výsledok je nutné aby objekt prešiel stredom, resp. čo najbližšie k stredu zorného poľa. Pre veľkosť zorného poľa platí vzťah

$$\alpha = \omega \cdot t, \quad (\text{P5.1})$$

kde  $\alpha$  je uhlová veľkosť zorného poľa,  $\omega$  je uhlová rýchlosť objektu a  $t$  je čas za ktorý objekt prejde cez celé zorné pole. Uhlová rýchlosť objektu  $\omega$  je daná ako dĺžka kružnice po ktorej sa hviezda pohybuje podelená siderickým dňom nakoľko sa jedná o hviezdy. Hviezdy sa pohybujú po kružniciach ktoré sú rovnobežné s nebeským rovníkom a ich dĺžka sa postupne smerom k pólom skracuje. Tieto dĺžky sú škálované kosínusom deklinácie, čo nám zabezpečí maximum ( $360^\circ$ ) pre rovník a minimum ( $0^\circ$ ) pre oba póly. Rovnicu pre veľkosť zorného poľa prepíšeme ako

$$\alpha = \frac{360^\circ}{t_\oplus} t \cos \delta. \quad (\text{P5.2})$$

## **P6** Nastavenie montáže

(25 b, autor: Jana Švrčková)

Vašou úlohou je nastaviť paralaktickú montáž ďalekohľadu, teda s pomocou Polárky ju správne orientovať na sever a nastaviť správnu zemepisnú šírku. Pri správnom nastavení montáže by mala byť Polárka zhruba v strede „polárneho hľadáča“ pripevneného na ďalekohľade.

# Zoznam konštánt (SŠ)

## Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
gravitačná konštanta	$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
elementárny elektrický náboj	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Coulombova konštanta	$k_e = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-2} \text{ C}^{-2}$
Planckova konštanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
univerzálna plynová konštanta	$\bar{R} = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Wienova posunovacia konštanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Hubbleova konštanta	$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

## Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň = 24 h
siderický (hviezdny) deň	$t_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,1 \text{ s}$
juliánsky rok	rok = 365,25 dní
siderický rok	$P_{\oplus} = 365,2564 \text{ dní}$
tropický rok	$P_{\oplus}^{\text{trop}} = 365,2422 \text{ dní}$
anomalistický rok	$P_{\oplus}^{\text{anom}} = 365,2596 \text{ dní}$
astronomická jednotka	au = $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
svetelný rok	ly = $9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$
parsek	pc = $3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$
Jansky	Jy = $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$

## Slnko

hmotnosť Slnka	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
polomer Slnka	$R_{\odot} = 6,957 \cdot 10^8 \text{ m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_{\odot} = 5772 \text{ K}$
farebná teplota Slnka	$T_{\odot}^{\text{color}} = 5900 \text{ K}$
zdanlivá vizuálna magnitúda Slnka	$m_{\odot} = -26,74 \text{ mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda Slnka	$m_{\odot}^{\text{bol}} = -26,83 \text{ mag}$
absolútna vizuálna magnitúda Slnka	$M_{\odot} = 4,83 \text{ mag}$
absolútna bolometrická magnitúda Slnka	$M_{\odot}^{\text{bol}} = 4,74 \text{ mag}$

## Planéty

excentricita dráhy Zeme	$e_{\oplus} = 0,0167$
inklinácia rotačnej osi Zeme	$\varepsilon = 23^{\circ} 26'$
Tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme	$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$

planéta	polomer	hmotnosť	veľká polos dráhy
Merkúr ☿	$R_{\text{☿}} = 2440 \text{ km}$	$m_{\text{☿}} = 3,302 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$a_{\text{☿}} = 0,387 \text{ au}$
Venuša ♀	$R_{\text{♀}} = 6052 \text{ km}$	$m_{\text{♀}} = 4,867 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$a_{\text{♀}} = 0,723 \text{ au}$
Zem ⊕	$R_{\text{⊕}} = 6378 \text{ km}$	$m_{\text{⊕}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$a_{\text{⊕}} = 1 \text{ au}$
Mars ♂	$R_{\text{♂}} = 3393 \text{ km}$	$m_{\text{♂}} = 6,417 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$a_{\text{♂}} = 1,524 \text{ au}$
Jupiter ♃	$R_{\text{♃}} = 69\,911 \text{ km}$	$m_{\text{♃}} = 1,898 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	$a_{\text{♃}} = 5,204 \text{ au}$
Saturn ♄	$R_{\text{♄}} = 58\,232 \text{ km}$	$m_{\text{♄}} = 5,683 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$a_{\text{♄}} = 9,583 \text{ au}$
Urán ♅	$R_{\text{♅}} = 25\,362 \text{ km}$	$m_{\text{♅}} = 8,681 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$a_{\text{♅}} = 19,191 \text{ au}$
Neptún ♆	$R_{\text{♆}} = 24\,764 \text{ km}$	$m_{\text{♆}} = 1,024 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$a_{\text{♆}} = 30,069 \text{ au}$

## Mesiac

polomer Mesiaca	$R_{\text{☾}} = 1737 \text{ km}$
hmotnosť Mesiaca	$m_{\text{☾}} = 7,346 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
veľká polos dráhy Mesiaca	$a_{\text{☾}} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
siderická obežná doba Mesiaca	$P_{\text{☾}} = 27,32 \text{ dní}$
synodická obežná doba Mesiaca	$S_{\text{☾}} = 29,53 \text{ dní}$
inklinácia dráhy Mesiaca voči ekliptike	$i_{\text{☾}} = 5^\circ 8'$
excentricita dráhy Mesiaca	$e_{\text{☾}} = 0,0549$
zdanlivá vizuálna magnitúda Mesiaca v splne	$m_{\text{☾}} = -12,74 \text{ mag}$

## Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

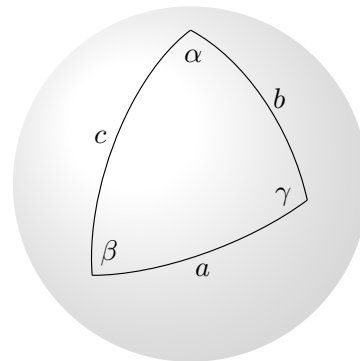
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Sférický exces (v radiánoch):

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

= plocha trojuholníka na jednotkovej sfére.



## Vzťahy pre elementy dráhy

polárna rovnica kuželosečky:  $r = \frac{p}{1+e \cos \nu}$  ,  $p = \frac{L^2}{GMm^2} = a(1-e^2)$

stredná anomália:  $M = (t - t_0) \sqrt{\frac{GM}{p^3} (1 - e^2)^3} = 2\pi \frac{t - t_0}{P}$

Keplerova rovnica pre elipsu:  $M = E - e \sin E$  ,  $\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}$

Barkerova rovnica pre parabolu:  $t - t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \left( \tan \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu}{2} \right)$

Keplerova rovnica pre hyperbolu:  $M = e \sinh F - F$  ,  $\tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\nu}{2}$