

VZOROVÉ RIEŠENIA

Astronomickej olympiády 2026

Kolo: regionálne kolo

Kategória: stredná škola

Teoretické úlohy

T1. Milkdroméda II (80b)	2
T2. Nočný snack (80b).	4
T3. Oslava pristátia na Marse (110b) . .	7
T4. 17. listopad (130b).	12

Dátová analýza

D1. Slnečná (200b).	18
-----------------------------	----

Praktická časť

P1. Prvý vertikál (100b).	24
P2. Meteorický roj (100b)	28

Zoznam konštánt.	32
-----------------------------------	-----------

Dokopy bolo možné získať **800b**

Zverejnené 24. 03. 2026

Tento dokument je možné voľne distribuovať
nekomerčným spôsobom pre vzdelávacie účely s uvedením zdroja.



Slovenská ústredná hviezdáreň
v Hurbanove



Súťaž vyhlasuje Slovenská ústredná hviezdáreň Hurbanovo v spolupráci so SAS pri SAV, s hviezdárňami a planetáriami, astronomickými kabinetmi, osvetovými strediskami, centrami voľného času a regionálnymi kultúrnymi centrami.

Teoretické úlohy

T1 Milkdroméda II (80b, autor: Radovan Lascsák & Terézia Hanáková)

V tejto úlohe nadviažeme na domáce kolo a budeme sa ďalej zaoberať jedným z najvzdialenejších objektov viditeľných voľným okom. Galaxia v Androméde (M 31) sa v súčasnosti nachádza vo vzdialenosti $d_0 = 2,537$ Mly od Zeme a má celkovú zdanlivú magnitúdu $m_0 = 3,44$ mag. Na oblohe sa však javí ako menej jasná, keďže ide o plošný zdroj svetla. Jej jadro má plošnú magnitúdu $\mu_0 = 17$ mag/arcsec².

- (a) [40b] Galaxia M 31 sa postupne približuje k Mliečnej ceste a o približne 3 miliardy rokov sa bude nachádzať vo vzdialenosti $d = 200$ kpc. Akú budeme pozorovať jej zdanlivú magnitúdu m a plošnú magnitúdu jadra μ v tejto dobe?

V domácom kole ste zistili, že pozorovaná vlnová dĺžka spektrálnej čiary H α galaxie M 31 je v súčasnosti $\lambda_0 = 655,62$ nm, pričom laboratórna vlnová dĺžka tejto čiary je $\lambda_{\text{lab}} = 656,28$ nm. Posun spektra je výsledkom kombinácie vlastnej rýchlosti M 31 a rozpínania vesmíru.

- (b) [40b] Na akej vlnovej dĺžke λ budeme pozorovať spektrálnu čiaru H α galaxie M 31 v budúcnosti v čase, keď bude vo vzdialenosti $d = 200$ kpc? V tejto dobe bude na základe štandardného kozmologického modelu hodnota Hubblovej konštanty rovná 90 % dnešnej hodnoty. Zanedbajte gravitačnú interakciu galaxie M 31 a Mliečnej cesty.

V celej úlohe sa budeme držať klasického kozmologického značenia, v ktorom budeme dolným indexom 0 označovať veličiny vzťahnuté na súčasnosť a bez indexu budeme označovať veličiny vzťahnuté na budúcnosť.

- (a) Tok f , ktorý zachytíme z celej galaxie M 31, je nepriamo úmerný druhej mocnine vzdialenosti, teda $f \propto d^{-2}$. Magnitúdu m prepočítame z toku f pomocou Pogsonovej rovnice 7b

$$m - m_0 = -2,5 \log\left(\frac{f}{f_0}\right). \quad (\text{T1.1}) \quad 7b$$

Dosadením nepriamej úmery toku a vzdialenosti máme

$$m - m_0 = -2,5 \log\left(\frac{d_0^2}{d^2}\right) = -5 \log\left(\frac{d_0}{d}\right), \quad (\text{T1.2}) \quad 1b$$

čiže po prepočte d_0 na kpc (1 Mly = 306,6 kpc) a dosadení známych veličín dostávame

$$m = m_0 - 5 \log\left(\frac{d_0}{d}\right) = 3,44 \text{ mag} - 5 \log\left(\frac{777,8 \text{ kpc}}{200 \text{ kpc}}\right) \doteq \boxed{0,49 \text{ mag}}. \quad (\text{T1.3}) \quad 5b$$

Pod plošnou magnitúdou μ v jednotke mag/arcsec^2 rozumieme magnitúdu, ktorá do našich očí prichádza z oblasti oblohy s uhlovými rozmermi 1×1 uhlovej sekundy (angl. *arc second*). Takýto štvorček oblohy pokryje iba malú časť galaxie M 31, a preto je plošná magnitúda μ výrazne väčšia ako celková magnitúda m . Označme S_0 reálnu plochu M 31, ktorá v súčasnosti zodpovedá uhlovej ploche 1 arcsec^2 . V budúcnosti, keď bude M 31 bližšie k nám, tak bude rovnakej uhlovej ploche zodpovedať menšia reálna plocha S , nakoľko sa M 31 na oblohe zdanlivo natiahne. Konkrétne platí

$$\frac{S}{S_0} = \frac{d^2}{d_0^2}, \quad (\text{T1.4}) \quad 3b$$

teda $S \propto d^2$. Tok f_1 pripadajúci na 1 arcsec^2 je priamo úmerný ploche S , a zároveň nepriamo úmerný druhej mocnine vzdialenosti d podobne ako celkový tok f . Čiže

$$f_1 \propto \frac{S}{d^2} \propto \frac{d^2}{d^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad f_1 = \text{konštanta}. \quad (\text{T1.5}) \quad 6b$$

Dospeli sme k záveru, že plošný tok, a tým pádom aj plošná magnitúda, sú konštantné. Preto

$$\boxed{\mu = \mu_0 = 17 \text{ mag/arcsec}^2}. \quad (\text{T1.6}) \quad 1b$$

Tento záver sa môže zdať zvláštny. Prečo potom nevidíme všetky galaxie, keď ich plošná jasnosť je konštantná? Problémom je, že vzdialené galaxie majú príliš malý celkový tok a do našich očí dopadne od nich príliš málo fotónov. Dá sa na to pozrieť aj z druhej strany. Keď sa zamyslíte nad tým, aká jasná je na oblohe Mliečna cesta, tak to nie je až tak rozdielne voči galaxii M 31. Avšak Mliečna cesta je výrazne bližšie k nám ako M 31.

- (b) Pozorovaný posun vlnovej dĺžky spektrálnej čiary $\text{H}\alpha$ je spôsobený kombináciou Hubblovej rýchlosti rozpínania vesmíru v_H smerom od nás a vlastnej rýchlosti v galaxie M 31 smerom k nám. V súčasnosti (index 0) platí

$$\frac{v_{H,0} - v_0}{c} = z_0 = \frac{\lambda_0 - \lambda_{\text{lab}}}{\lambda_{\text{lab}}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \quad (\text{T1.7}) \quad 5b$$

a v budúcnosti (bez indexu) bude platiť

$$\frac{v_H - v}{c} = z = \frac{\lambda - \lambda_{\text{lab}}}{\lambda_{\text{lab}}} = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{lab}}} - 1. \quad (\text{T1.8}) \quad 5b$$

Túto sústavu rovníc chceme vyriešiť pre vlnovú dĺžku λ . Začneme doplnením ďalších dvoch rovníc pre Hubblove rýchlosti, ktoré vychádzajú z definície Hubblovej konštanty H .

$$v_{H,0} = H_0 d_0, \quad (\text{T1.9}) \quad 4b$$

$$v_H = H d. \quad (\text{T1.10}) \quad 4b$$

Dostali sme sústavu štyroch rovníc s piatimi neznámymi ($v_0, v, v_{H,0}, v_H, \lambda$), čo nie je riešiteľný systém. Na skompletizovanie potrebujeme využiť informáciu zo zadania o tom, že máme

zanechať gravitačnú interakciu medzi M 31 a Mliečnou cestou. To znamená, že sa vlastná rýchlosť M 31 nemení, teda sa galaxia hýbe rovnomerným pohybom (podľa prvého Newtonovho zákona). Jej rýchlosť sa bude meniť iba zdanlivo, kvôli tomu, že čím bližšie k nám bude, tým menšia bude jej Hubblova rýchlosť, a zároveň bude klesať Hubblova konštanta na základe kozmologického vývoja. Preto

$$v_0 = v, \quad (\text{T1.11}) \quad 10b$$

čím sme skompletizovali sústavu piatich rovníc s piatimi neznámymi. Jej riešenie začneme vyjadrením v_0 a v z (T1.7) a (T1.8), kam dosadíme z (T1.9) a (T1.10).

$$v_0 = v_{H,0} - c \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \right) = H_0 d_0 - c \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \right), \quad (\text{T1.12})$$

$$v = v_H - c \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \right) = H d - c \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \right). \quad (\text{T1.13})$$

Finálnym dosadením do (T1.11), využitím $H = 0,9H_0$ zo zadania a úpravou dostávame 2b

$$H_0 d_0 - c \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \right) = 0,9H_0 d - c \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 \right), \quad (\text{T1.14})$$

$$\frac{H_0}{c} (d_0 - 0,9 d) = \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{lab}}} - 1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\text{lab}}} + 1, \quad (\text{T1.15})$$

$$\lambda = \lambda_0 - \lambda_{\text{lab}} \frac{H_0}{c} (d_0 - 0,9 d), \quad (\text{T1.16})$$

$$\boxed{\lambda = 655,53 \text{ nm}}. \quad (\text{T1.17}) \quad 10b$$

T2 Nočný snack

(80b, autor: Jana Švrčková)

Je možné uvariť hrniec ryže v ohnisku Nordic Optical Telescope (NOT), ak ho namierime na Mesiac v splne? Aj nad takýmito filozofickými otázkami sa zamýšľala estónska astronómka Anni počas dlhých nocí na observatóriu. V tomto príklade z tejto filozofickej otázky spravíte fyzikálnu a pokúsite sa zistiť, či si astronómovia naozaj v prípade núdze môžu v ďalekohľade pripraviť večeru.

Vyriešte nasledujúcu sériu podúloh, ktorá vás privedie k vytúženej odpovedi:

- (a) [15b] Vypočítajte, aký tok dopadá z Mesiaca v splne na vrchol zemskej atmosféry vo V filtri. Jasnosti objektov v tomto filtri môžete považovať za rovnaké, aké zodpovedajú vizuálnej jasnosti. Zo Slnka dopadá na zemskú atmosféru vo V filtri tok $F_{\odot} = 1240 \text{ W/m}^2$.

(b) [20 b] Kvôli prechodu svetla zemskou atmosférou sa zoslabuje svetlo objektov. Čím hrubšou vrstvou atmosféry svetlo prechádza, tým viac sa zoslabí. Z toho dôvodu si na varenie ryže vyberieme noc, kedy sa Mesiac nachádza v najbližšej možnej polohe k zenitu. Vypočítajte minimálnu možnú zenitovú vzdialenosť Mesiaca z pohľadu pozorovateľa nachádzajúceho sa v budove NOT.

(c) [15 b] Magnitúda objektu na oblohe sa kvôli prechodu cez atmosféru zvýši o

$$\Delta m = \frac{k}{\cos z}, \quad (\text{T2.1})$$

kde $k = 0,2$ je koeficient extinkcie a z je zenitová vzdialenosť. Vypočítajte tok žiarenia Mesiaca, ktorý po prechode atmosférou dopadá na povrch ďalekohľadu.

(d) [15 b] Vypočítajte, aký výkon dokáže Nordic Optical Telescope sústrediť do svojho ohniska za predpokladu, že sa 12 % svetla stratí pri odrazoch. Predpokladajte, že ďalekohľad pracuje vo V filtri a svetlo iných vlnových dĺžok sa do ohniska nedostane.

(e) [10 b] Ryžu skúsime uvariť v jednom litri vody s počiatočnou teplotou 20°C . Určte energiu potrebnú na zohriatie vody na teplotu varu, ktorá je v nadmorskej výške NOT asi 92°C . Hmotnostná tepelná kapacita vody je $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

(f) [5 b] Zistite, za akú dobu sa voda v ohnisku zohreje dostatočne na to, aby začala vriieť. Rozhodnite, či je realistické stihnúť vodu zohriať na požadovanú teplotu v priebehu jednej noci. Pre jednoduchosť môžete zanedbať pohyb Mesiaca po oblohe a predpokladajte, že zostane celú dobu v blízkosti zenitu (je to síce veľmi odvážny predpoklad, ale pre náš jednoduchý odhad nám bohate stačí).

Pri výpočte môžu byť užitočné nasledujúce informácie o NOT:

- priemer primárneho zrkadla: $D = 2,56 \text{ m}$,
- zemepisná šírka: $\varphi = 28^\circ 45' \text{N}$,
- ohnisková vzdialenosť primárneho zrkadla: $f = 28,160 \text{ m}$,
- zemepisná dĺžka: $\lambda = 17^\circ 53' \text{W}$,
- nadmorská výška: $H = 2382 \text{ m}$.

(a) Využijeme Pogsonovu rovnicu, v ktorej porovnáme žiarenie vo viditeľnom svetle pochádzajúce priamo zo Slnka a žiarenie odrazené od Mesiaca. Z rovnice si vyjadríme tok mesačného svetla

$$m_\odot - m_\zeta = 2,5 \log\left(\frac{F_\zeta}{F_\odot}\right), \quad (\text{T2.2})$$

$$\frac{F_\zeta}{F_\odot} = 10^{0,4(m_\odot - m_\zeta)}, \quad (\text{T2.3})$$

$$F_\zeta = F_\odot \cdot 10^{0,4(m_\odot - m_\zeta)}, \quad (\text{T2.4}) \quad 13b$$

po dosadení

$$F_\zeta = 1240 \text{ W m}^{-2} \cdot 10^{0,4 \cdot (-26,74 + 12,74)} \doteq \boxed{3,11 \text{ mW m}^{-2}}. \quad (\text{T2.5}) \quad 2b$$

- (b) Najskôr určíme, do akej maximálnej výšky nad južným horizontom sa Mesiac môže dostať. Ak by sa pohyboval po rovníku, bolo by to maximálne $90^\circ - \varphi$. V prípade, že by bol vždy na ekliptike (ako Slnko), mohol by sa dostať ešte o $\varepsilon = 23^\circ 26'$ vyššie (kvôli vzájomnému sklonu rovín ekliptiky a rovníka). Rovina dráhy Mesiaca je ale voči ekliptike naklonená ešte o ďalších $i_{\zeta} = 5,14^\circ$, čiže Mesiac sa dokáže dostať ešte o niečo vyššie. Sčítaním týchto uhlov dostaneme maximálnu možnú výšku Mesiaca nad horizontom

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \varepsilon + i_{\zeta}, \quad (\text{T2.6}) \quad 15\text{b}$$

$$h_{\max} = 90^\circ - 28^\circ 45' + 23^\circ 26' + 5^\circ 8' = 89^\circ 49'. \quad (\text{T2.7}) \quad 2\text{b}$$

Minimálna zenitová vzdialenosť Mesiaca je doplnkom do 90° , teda $z_{\min} = 0^\circ 11'$. 3b

- (c) Pretože uhol z_{\min} je veľmi blízky nule, môžeme použiť aproximáciu $\cos z_{\min} \approx 1$. Tok mesačného svetla, ktorý dopadne na zemský povrch, je v tom prípade

$$F'_{\zeta} = F_{\zeta} \cdot 10^{-0,4\Delta m} = F_{\zeta} \cdot 10^{-0,4k}, \quad (\text{T2.8}) \quad 13\text{b}$$

$$F'_{\zeta} = 3,11 \text{ mW m}^{-2} \cdot 10^{-0,4 \cdot 0,2} \doteq \boxed{2,59 \text{ mW m}^{-2}}. \quad (\text{T2.9}) \quad 2\text{b}$$

- (d) Ďalekohľad zachytáva svetlo celou plochou svojho primárneho zrkadla, pričom efektivita prenosu energie až do ohniska je $\eta = 1 - 0,12 = 0,88$. Do ohniska sa tak dostane výkon

$$P = \eta \frac{\pi D^2}{4} F'_{\zeta}, \quad (\text{T2.10}) \quad 13\text{b}$$

$$P = 0,88 \cdot \frac{\pi \cdot (2,56 \text{ m})^2}{4} \cdot 2,59 \text{ mW m}^{-2} \doteq \boxed{11,7 \text{ mW}}. \quad (\text{T2.11}) \quad 2\text{b}$$

- (e) Energiu vypočítame zo vzorca

$$E = c_{\text{H}_2\text{O}} m \Delta T, \quad (\text{T2.12}) \quad 8\text{b}$$

pričom využijeme fakt, že 1 liter vody váži zhruba 1 kg. Číselný výsledok je

$$E = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (92 - 20) \text{ K} \doteq \boxed{3,01 \cdot 10^5 \text{ J}}. \quad (\text{T2.13}) \quad 2\text{b}$$

- (f) Čas potrebný na zohriatie vody vypočítame jednoducho ako

$$t = \frac{E}{P} = \frac{3,01 \cdot 10^5 \text{ J}}{11,7 \cdot 10^{-3} \text{ W}} \doteq \boxed{2,57 \cdot 10^7 \text{ s}}. \quad (\text{T2.14}) \quad 4\text{b}$$

Po prepočte na dni nám vyjde až $t = 298$ dní, je teda jasné, že za jednu noc je $\boxed{\text{nemožné}}$ vodu zohriať na bod varu. Astronómovia preto musia používať bežnejšie metódy varenia večere. 1b

T3 Oslava pristátia na Marse

(110b, autor: Vladimír Slanina)

Píše sa rok 2230. Ludstvo úspešne osídlilo Mars a oslavuje dvojsté výročie pristátia prvého človeka na jeho povrchu. Na oslavu tohto úžasného vedeckého mílnika sa politici na Zemi rozhodli pripraviť pre obyvateľov Marsu prekvapenie – špeciálny dar, ktorý im doručí raketa vyslaná zo Zeme. V celej úlohe uvažujte iba gravitačný vplyv Slnka (teda zanedbajte gravitačný vplyv planét) a takisto uvažujte kruhové trajektórie Zeme a Marsu.

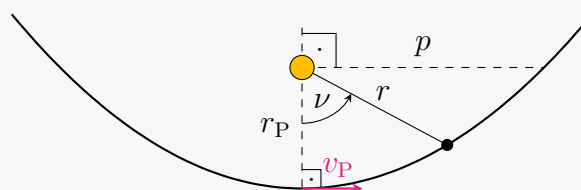
- (a) [14b] Ako často sa zo Zeme naskytá výhodná príležitosť letu na Mars? Inými slovami, vypočítajte synodickú obežnú dobu medzi dvomi po sebe idúcimi opozíciami Marsu.
- (b) [12b] Aká je najkratšia τ_{\min} a aká je najdlhšia τ_{\max} doba odozvy (tzv. *latencia*, ľudovo nazývaná „ping“) pri prenose informácie medzi Zemou a Marsom? Definujeme ju ako čas, za ktorý sa nám po odoslaní správy vráti odpoveď. Predpokladajte, že sa informácia prenáša prostredníctvom elektromagnetických vln vo vákuu rýchlosťou svetla.

Aby však akcia zostala v tajnosti, oficiálne sa raketa tvári ako „obyčajná“ vedecká misia určená na prieskum hlbokého vesmíru. V skutočnosti však pri Marse vypustí pamätný balík.

- (c) [10b] Vypočítajte najmenšiu rýchlosť rakety v_p potrebnú na to, aby sa dostala zo vzdialenosti $r_p = 1$ au od Slnka do nekonečna.
- (d) [12b] Určte obežnú rýchlosť Zeme v_{\oplus} . O akú rýchlosť v_{Δ} musí raketa zrýchliť, ak úplne využije obežnú rýchlosť Zeme? Pripomíname zanedbanie gravitačného vplyvu Zeme.

Raketa sa bude pohybovať po parabolickej trajektórii, pre ktorú platí Barkerova rovnica v *konštantovníku*. Ide o závislosť času t od pravej anomálie ν , pričom t_0 predstavuje čas prechodu pericentrom. Parameter p je takzvaný *semi-latus rectum*, ktorý viete určiť pomocou jeho geometrického významu na obrázku T3.1 alebo pomocou jeho vyjadrenia cez moment hybnosti L , ktoré takisto nájdete v *konštantovníku*. Takisto sa vám môže hodiť všeobecná rovnica kuželosečky v polárnych súradniciach (vzdialenosť r , pravá anomália ν).

- (e) [40b] Upravte polárnu rovnicu kuželosečky z *konštantovníka* tak, aby bola vzdialenosť r vyjadrená iba pomocou r_p , ν a základných fyzikálnych konštánt. Obdobne upravte Barkerovu rovnicu pre parabolu tak, aby bol čas $t - t_0$ vyjadrený iba pomocou ν , siderickej periódy Zeme P_{\oplus} a základných fyzikálnych konštánt.
- (f) [22b] Vypočítajte, za koľko dní od štartu na Zemi pretne raketa orbitu Marsu.



Obr. T3.1: Schéma parabolickej dráhy s ohniskom v Slnku a pericentrom $r_p = 1$ au. Čiernou bodkou je znázornená raketa vo vzdialenosti r od Slnka s pravou anomáliou ν .

- (a) Zem a Mars obiehajú v tom istom smere okolo spoločného stredu – Slnka. Synodická doba je preto čas, za ktorý vo vzťažnej sústave rotujúcej obehovou uhlovou rýchlosťou Zeme Ω_{\oplus} a stredom rotácie v Slnku urobí Mars jeden obeh po svojej orbite (obr. T3.2). Z toho pre uhlovú rýchlosť Marsu vo vzťažnej sústave I' platí

$$\Omega'_{\delta} = \Omega_{\delta} - \Omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{P_{\delta}} - \frac{2\pi}{P_{\oplus}}, \quad (\text{T3.1}) \quad 7b$$

kde P_{\oplus} je siderická perióda Zeme a P_{δ} je siderická perióda Marsu. Tú vypočítame podľa 3. Keplerovho zákona pre veľkú polos v astronomických jednotkách a periódu v rokoch

$$\frac{a_{\delta}^3}{P_{\delta}^2} = \frac{a_{\oplus}^3}{P_{\oplus}^2} \Rightarrow P_{\delta} = P_{\oplus} \left(\frac{a_{\delta}}{a_{\oplus}} \right)^{\frac{3}{2}} \doteq 687,2 \text{ dní}. \quad (\text{T3.2}) \quad 4b$$

Mars urobí jeden obeh, teda uhol 2π , za čas

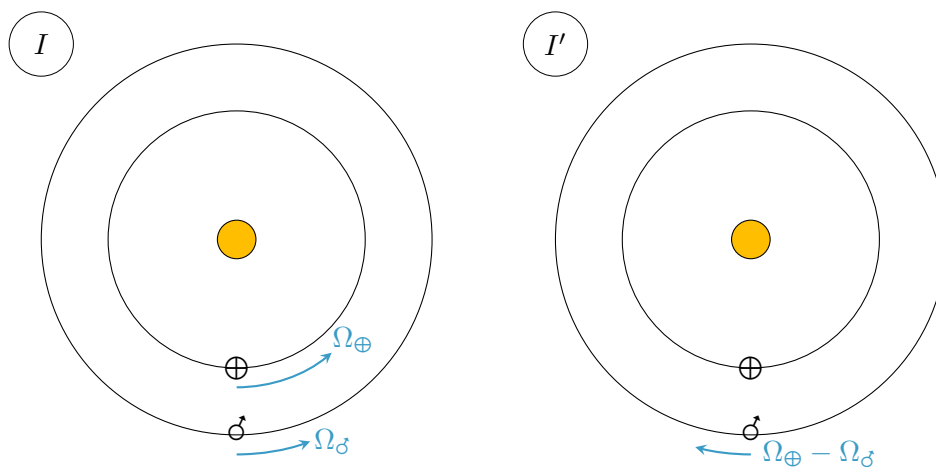
$$P_{\text{syn}} = \frac{2\pi}{\Omega'_{\delta}} = \frac{1}{\frac{1}{P_{\delta}} - \frac{1}{P_{\oplus}}} \doteq \boxed{-779,7 \text{ dní}}. \quad (\text{T3.3}) \quad 3b$$

Záporné znamienko hovorí o tom, že Zem má vyššiu uhlovú rýchlosť ako Mars, a teda pohyb vo vzťažnej sústave I' bude v opačnom smere, tak ako sme to zakreslili.

Alternatívne sa na to vieme pozeráť tak, že hľadáme čas P_{syn} , za ktorý Zem (keďže má vyššiu uhlovú rýchlosť) urobí o jeden celý obeh 2π viac ako Mars v bežne uvažovanej vzťažnej sústave I . To vedie ku vzťahu

$$\Omega_{\delta} P_{\text{syn}} + 2\pi = \Omega_{\oplus} P_{\text{syn}}, \quad (\text{T3.4})$$

z ktorého dostaneme po úpravách ten istý výsledok.



Obr. T3.2: Vzťažná sústava I a I' . Veľkosť uhlovej rýchlosti Marsu je menšia ako veľkosť uhlovej rýchlosti Zeme, preto bude Mars vo vzťažnej sústave I' obieháť okolo Slnka v opačnom smere ako vo vzťažnej sústave I .

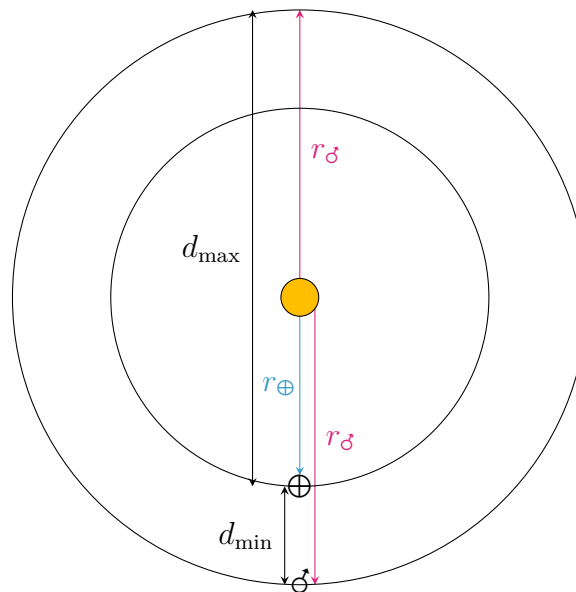
- (b) Čím väčšiu dráhu potrebuje elektromagnetické žiarenie prejsť, tým dlhšie to bude trvať. Najdlhšia a najkratšia dĺžka latencie je preto daná najväčšou a najmenšou vzdialenosťou Zeme a Marsu (obr. T3.3). Treba si dať ale pozor na to, že keďže je latencia čas, za ktorý sa vráti odpoveď, tak dráha, ktorú svetlo prejde, bude dvojnásobkom vzdialenosti Marsu a Zeme v uvažovanom prípade. V celej úlohe uvažujeme kruhové orbity s polormi $r_{\oplus} = a_{\oplus}$, $r_{\delta} = a_{\delta}$. Najmenšia vzdialenosť je počas opozície, teda

$$\tau_{\min} = 2 \frac{d_{\min}}{c} = 2 \frac{r_{\delta} - r_{\oplus}}{c} \doteq \boxed{8,72 \text{ min}}. \quad (\text{T3.5}) \quad 6b$$

Pre najväčšiu vzdialenosť Zeme a Marsu v čase konjunkcie bude obdobne platiť

$$\tau_{\max} = 2 \frac{d_{\max}}{c} = 2 \frac{r_{\delta} + r_{\oplus}}{c} \doteq \boxed{42,0 \text{ min}}. \quad (\text{T3.6}) \quad 6b$$

Poznámka: S „pingom“ ste sa mohli stretnúť hlavne pri hraní hier. Pre profesionálnych hráčov je akceptovateľný ping do približne 30 ms, pre bežných hráčov je to okolo 100 ms, teda organizovanie medziplanetárnych herných turnajov by možné nebolo.



Obr. T3.3: Znáznornenie hľadaných vzdialeností d_{\max} a d_{\min} .

- (c) Na orbite bude platiť zákon zachovania mechanickej energie, ktorá sa skladá z kinetickej a potenciálnej. Najmenšia rýchlosť, ktorá je potrebná na únik do nekonečna, je taká, že v nekonečne bude mať raketa rýchlosť $v_{\infty} = 0$ vo vzťažnej sústave Slnka, čiže jej kinetická energia bude nulová. Potenciálna energia je v nekonečne ($r_{\infty} \rightarrow \infty$) takisto nulová. Preto zákon zachovania energie hovorí

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 - \frac{GMm}{r_{\infty}} = 0, \quad (\text{T3.7}) \quad 6b$$

z čoho

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}} \doteq \boxed{42,1 \text{ km s}^{-1}}, \quad (\text{T3.8}) \quad 4b$$

kde m je hmotnosť rakety. Táto rýchlosť sa takisto nazýva 2. úniková rýchlosť.

(d) Pre obežnú rýchlosť Zeme platí

$$v_{\oplus} = \Omega_{\oplus} r_{\oplus} = \frac{2\pi r_{\oplus}}{P_{\oplus}} \doteq \boxed{29,8 \text{ km s}^{-1}}. \quad (\text{T3.9}) \quad 6b$$

Vo vzťažnej sústave Slnka bude mať raketa pred štartom rýchlosť Zeme v_{\oplus} . Na to, aby raketa úplne využila obežnú rýchlosť Zeme, musí byť jej vektor rýchlosti po urýchlení v_p rovnobežný s vektorom rýchlosti Zeme v_{\oplus} . Keďže zanedbávame gravitáciu Zeme, tak pre zmenu rýchlostí potom platí jednoduchý rozdiel

$$\Delta v = v_p - v_{\oplus} \doteq \boxed{12,3 \text{ km s}^{-1}}. \quad (\text{T3.10}) \quad 6b$$

(e) Parabolická trajektória má excentricitu $e = 1$. Na určenie hodnoty *semi-latus rectum* p vieme šikovne do všeobecnej rovnice paraboly dosadiť $\nu = 0^\circ$, kedy je vzdialenosť $r = r_p$. Dostávame

$$r_p = \frac{p}{1 + \cos 0^\circ} = \frac{p}{1 + 1} = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad p = 2r_p. \quad (\text{T3.11})$$

K rovnakému výsledku sa vieme dopracovať aj cez vyjadrenie pomocou momentu hybnosti $L = mv_p r_p$, keďže je vektor rýchlosti v pericentre kolmý na spojnicu so Slnkom. Potom platí (podľa vzťahu z konštantovníka)

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{v_p^2 r_p^2}{GM} = 2r_p. \quad (\text{T3.12}) \quad 12b$$

Z obidvoch prístupov teda dostávame

$$r = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu}. \quad (\text{T3.13}) \quad 2b$$

Poznámka: V konštantovníku je uvedené takisto $p = a(1 - e^2)$. Tento vzťah ale platí len pre elipsu a hyperbolu. Pre parabolu je dĺžka hlavnej polosi $a = \infty$ a $1 - e^2 = 0$, teda ich súčin je matematicky nedefinovaný. Takisto si všimnite, že pre hyperbolu je $1 - e^2 < 0$, ale hlavná polos je pre hyperbolu záporná. Inými slovami, parameter p je vždy kladné číslo (ako takisto vyplýva z rovnice (T3.12)).

Pozrime sa ďalej na Barkerovu rovnicu. Výraz $\tan \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu}{2}$ nevieme vo všeobecnosti ďalej zjednodušiť, preto sa zamerajme ďalej len na koeficient tohto výrazu. Aby rovnica rozmerovo

sedela, musí mať tento výraz rozmer času. Dosadme doň hodnotu $p = 2r_p$.

4b

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{GM}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8r_p^3}{GM}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi^2} \frac{4\pi^2 a_\oplus^3}{GM}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi^2} P_\oplus^2} = \frac{P_\oplus \sqrt{2}}{2\pi}, \quad (\text{T3.14}) \quad 15b$$

kde sme pri úpravách využili 3. Keplerov zákon

$$\frac{a_\oplus^3}{P_\oplus^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (\text{T3.15}) \quad 4b$$

Barkerova rovnica tak nadobúda tvar

$$t - t_0 = \frac{P_\oplus \sqrt{2}}{2\pi} \left(\tan \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu}{2} \right). \quad (\text{T3.16}) \quad 3b$$

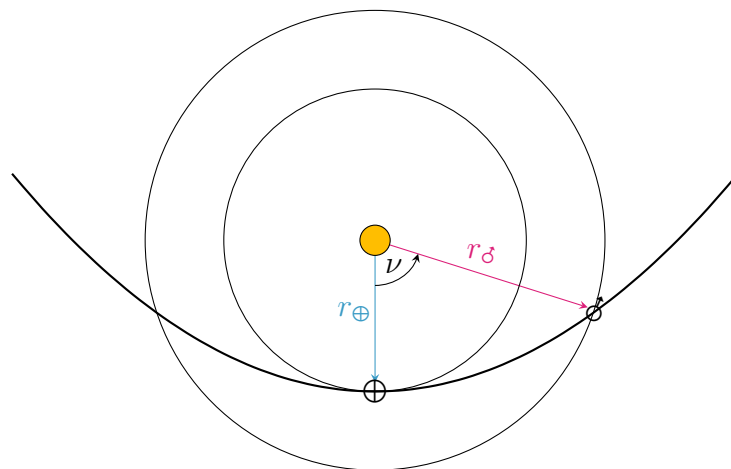
- (f) Na výpočet času potrebujeme Barkerovu rovnicu, na ktorej použitie potrebujeme najprv určiť pravú anomáliu ν_δ . Tú určíme z rovnice (T3.13), pretože vieme, že keď bude raketa pretínať orbitu Marsu, tak bude vo vzdialenosti a_δ od Slnka (obr. T3.4).

$$a_\delta = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu_\delta}, \quad (\text{T3.17})$$

$$\cos \nu_\delta = \frac{2r_p}{a_\delta} - 1 \Rightarrow \nu_\delta \doteq 71,8^\circ. \quad (\text{T3.18}) \quad 12b$$

Zaujímá nás čas, za ktorý sa raketa dostane od Zeme k Marsu, preto je výhodné zvoliť čas, v ktorom raketa štartovala, ako $t_0 = 0$. Potom pre hľadaný čas platí

$$t = \frac{P_\oplus \sqrt{2}}{2\pi} \left(\tan \frac{\nu_\delta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu_\delta}{2} \right) \doteq \boxed{69,9 \text{ dní}}. \quad (\text{T3.19}) \quad 10b$$



Obr. T3.4: Znáznornenie prieniku paraboly a orbity Marsu a geometrický význam ν_δ .

T4 17. listopad

(130b, autor: Radovan Lascsák)

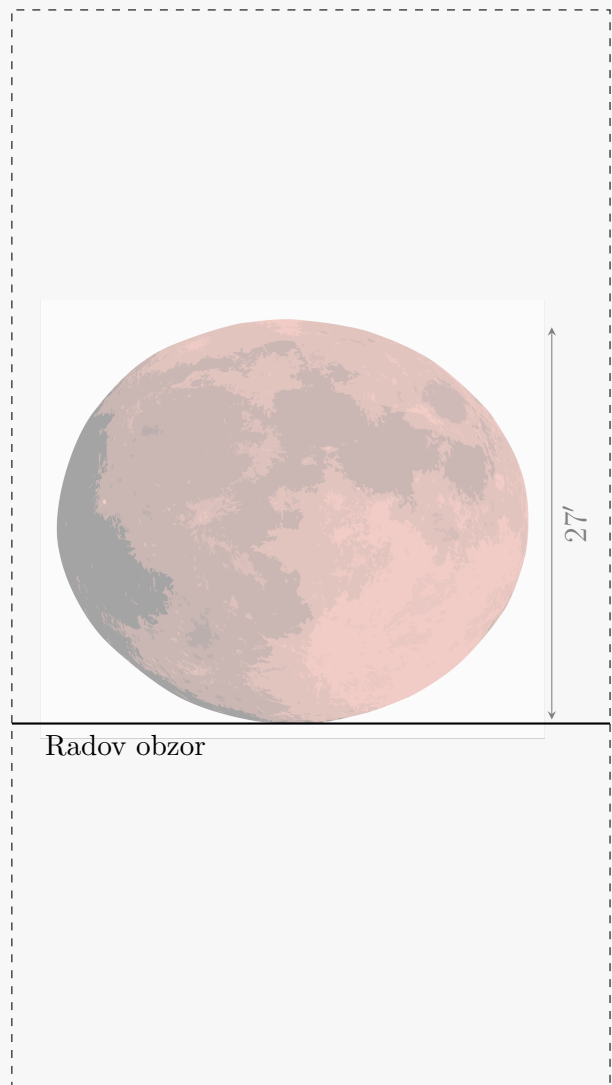
Rado a Terka súčasne pozorujú spln Mesiaca z okien internátu, *Koleje 17. listopadu*. Ide o 22. najvyššiu budovu v Prahe, s výškou až 69 m. Má 22 podlaží vrátane prízemnia a tajného mýtického poschodia. Všetky podlažia sú rovnako vysoké a nad tým najvyšším je hneď strecha. Mesiac vychádza presne na svetovej strane východ nad neďaleký kopec *Bílá skála* v horizontálnej vzdialenosti 900 m od *Koleje 17. listopadu*.

Rado býva na najvyššom podlaží, jeho oči sa nachádzajú v rovnakej nadmorskej výške ako vrchol *Bílej skály* a vidia, ako sa spodný okraj Mesiaca práve dotýka tohto vrcholu. Mesiac je kvôli rozdielnej atmosférickej refrakcii (v rôznych výškach nad horizontom) sploštený o $5'$ vo vertikálnom smere, vid. obrázok T4.1. Hodnota atmosférickej refrakcie na horizonte je $35'$. Červenkastá farba Mesiaca je spôsobená Rayleighovým rozptylom v atmosfére, čo je efekt spôsobujúci silnejší rozptyl modrého svetla voči červenému.

Terka meria 158 cm, pozoruje Mesiac rovnako sploštený a býva na izbe o jedno poschodie nižšie ako Rado, ktorý meria 188 cm. Pre oboch platí, že sa ich oči nachádzajú v deviatich desatinách tela. Zemepisné súradnice Prahy sú 50° N a $14,5^\circ$ E.

Úlohy

- [40b] Do obrázku T4.1 zakreslite obzor, ktorý zdanlivo vidí Terka, s presnosťou na $1'$.
- [20b] Určte deklináciu Mesiaca, s presnosťou na 1° .
- [10b] Určte hodinový uhol Mesiaca, s presnosťou na $0,1^h$.
- [20b] Určte miestny pravý slnečný čas, s presnosťou na 1 hodinu.
- [40b] Určte, ako dlho vychádzal Mesiac nad Radov obzor, s presnosťou na 0,1 min.



Radov obzor

Obr. T4.1: Zdanlivá poloha obzoru vytvoreného kopcom *Bílá Skála* vzhľadom na polohu Mesiaca na oblohe.

- (a) Geometria problému je zobrazená na obrázku T4.2. Terka je na nižšom poschodí ako Rado, čo znamená, že jej obzor bude zdanlivo vyššie ako ten Rado, čiže Mesiac uvidí len sčasti alebo vôbec. Rozhodovať o tom bude uhol α , ktorý vieme určiť z pravouhlého trojuholníka, ktorého vrcholy sú: vrchol kopca *Bílá skála*, Radove oči, Terkine oči; s pravým uhlom pri Radových očiach. Platí

$$\tan \alpha = \frac{\Delta H}{d}, \quad (\text{T4.1}) \quad 10\text{b}$$

pričom ΔH určíme z informácií zo zadania.

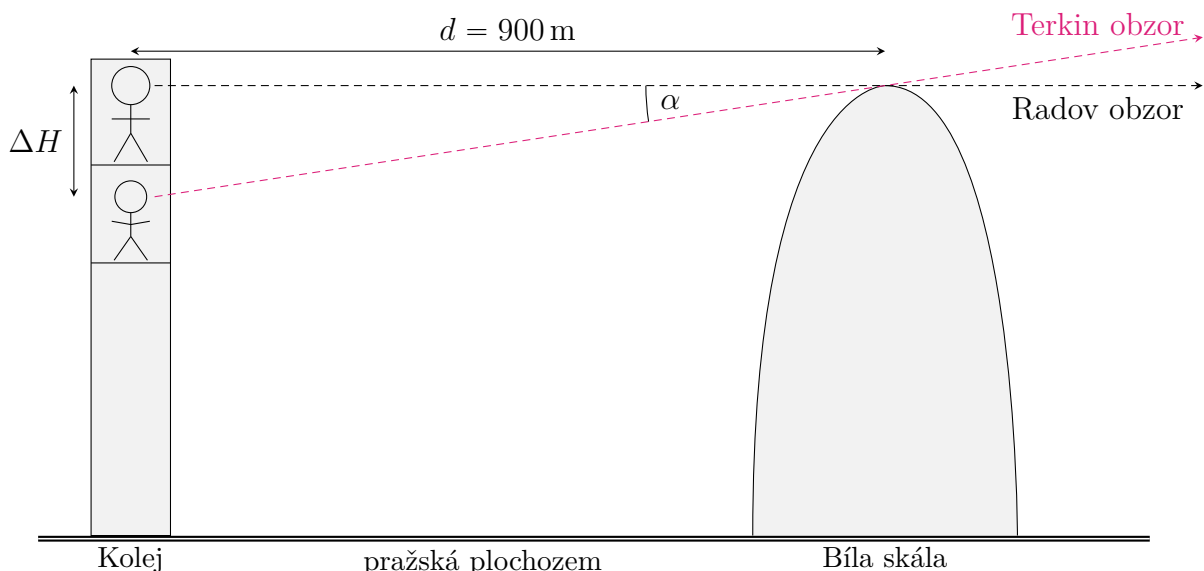
Vieme, že budova je vysoká 69 m a má 22 podlaží, čiže jedno podlažie má výšku $(69/22)$ m. Radove oči sa nachádzajú vo výške $0,9 \cdot 188$ cm a Terkine vo výške $0,9 \cdot 158$ cm. Rozdiel výšky ich očí prirátame k celkovému ΔH , a teda

$$\Delta H = \left(\frac{69}{22} + 0,9 \cdot (1,88 - 1,58) \right) \text{ m} = \frac{3747}{1100} \text{ m}. \quad (\text{T4.2})$$

Po dosadení do (T4.1) dopočítame uhol

$$\alpha = \arctan \left(\frac{3747}{1100} \text{ m} \cdot \frac{1}{900 \text{ m}} \right) \doteq \boxed{13,0'}. \quad (\text{T4.3}) \quad 3\text{b}$$

Mesiac na obzore má uhlový priemer $27'$, čiže Terka uvidí približne polovicu Mesiaca. Zákres polohy jej obzoru nájdete na obrázku T4.3.



17. listopadu

Obr. T4.2: Schéma *Koleje 17. listopadu*, kopca *Bílá skála* a obzorov pre Rada a Terku.

- (b) Začneme rýchlou odpoveďou. Deklinácia δ je kolmá vzdialenosť od nebeského rovníka. Ten pretína horizont na východe, kde sa akurát nachádza aj Mesiac. To znamená, že Mesiac leží na nebeskom rovníku, čiže jeho deklinácia je 0° . Chyba určenia deklinácie spočíva v zanedbaní refrakcie a rozmerov Mesiaca. Oba tieto efekty sú však v ráde desiatok uhlových minút, takže určená deklinácia spĺňa požadovanú presnosť 1° .

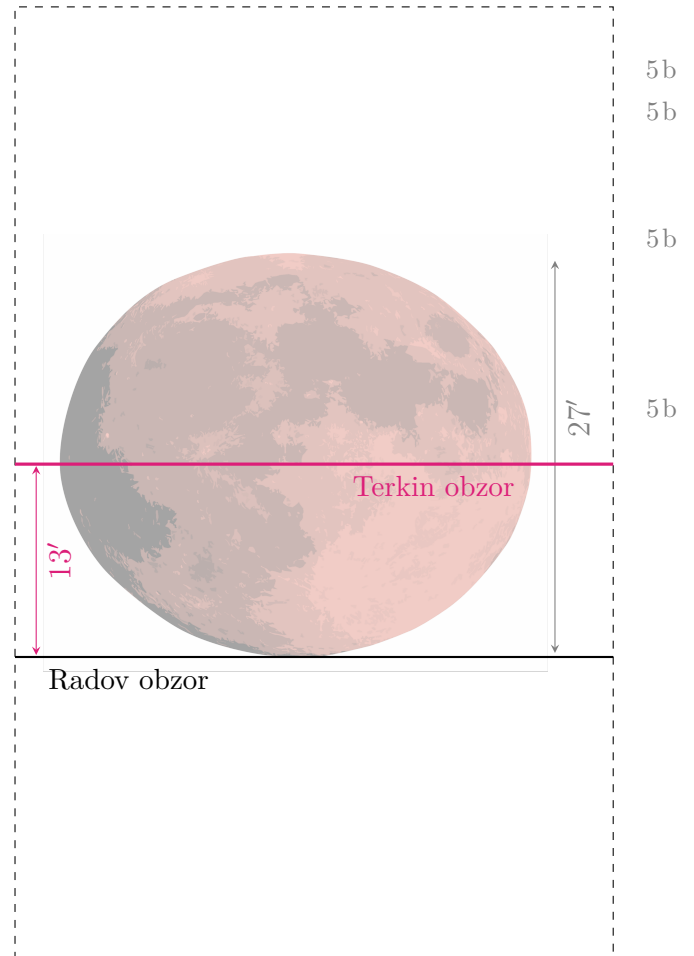
Teraz podrobnejšie. V zadaní je uvedené, že sa spodný okraj Mesiaca dotýka Radovho obzoru. Ten je totožný s horizontom, nakoľko sú Radove oči a vrch kopca Bílá skála v rovnakej výške. Refrakcia $35'$ znamená, že spodný okraj Mesiaca, ktorý vidíme na horizonte, sa reálne nachádza $35'$ pod horizontom. Horný okraj Mesiaca vidíme vo výške $27'$, pričom refrakcia v tomto mieste je o $5'$ menšia ako na horizonte, teda jej hodnota je $30'$. Horný okraj Mesiaca sa preto reálne nachádza $3'$ pod horizontom. Rozumný odhad polohy stredu Mesiaca je priemer polôh horného a dolného okraja, čiže $19'$ pod horizontom.

Nebeský rovník pretína reálny horizont presne na východe, čo je vo vzdialenosti $19'$ od stredu Mesiaca. Deklinácia Mesiaca bude záporná (stred Mesiaca je pod reálnym horizontom), pričom v absolútnej hodnote bude jej hodnota menšia ako $19'$, nakoľko je nebeský rovník sklonený voči horizontu pod uhlom $90^\circ - \varphi$, kde $\varphi = 50^\circ$ je zemepisná šírka pozorovacieho miesta. Deklináciu vypočítame sínusovou vetou z trojuholníka na obrázku T4.4;

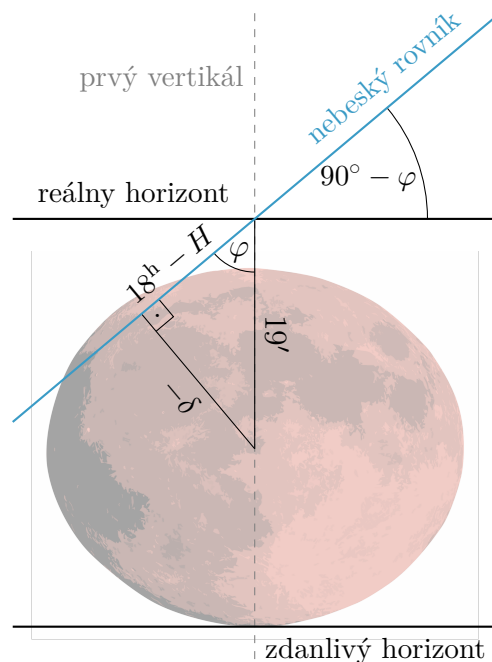
$$\frac{\sin(-\delta)}{\sin \varphi} = \frac{\sin 19'}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \boxed{\delta \doteq -14,6'}.$$

(T4.4)

Alternatívne je možné trojuholník aproximovať rovinnou geometriou, keďže ide o malé uhly. Potom $\sin \varphi = -\delta/19'$, z čoho rovnako dostaneme $\delta \doteq -14,6'$.



Obr. T4.3: Zákres Terkinho obzoru.



Obr. T4.4: Presná geometria.

- (c) Hodinový uhol H meriame pozdĺž nebeského rovníka od juhu smerom na západ. Mesiac sa nachádza na východe, čo je v troch štvrtinách nebeského rovníka. Celý kruh má 360° , respektíve 24^h , čo je jednotka, v ktorej bežne uvádzame hodinový uhol. Preto

$$H = \frac{3}{4} \cdot 24^h = \boxed{18^h}. \quad (\text{T4.5}) \quad 5b$$

Požadovaná presnosť $0,1^h$ odpovedá presnosti $1,5^\circ$, čo je ešte väčší uhol ako presnosť pre deklináciu. Bude nám teda postačovať takáto jednoduchá úvaha.

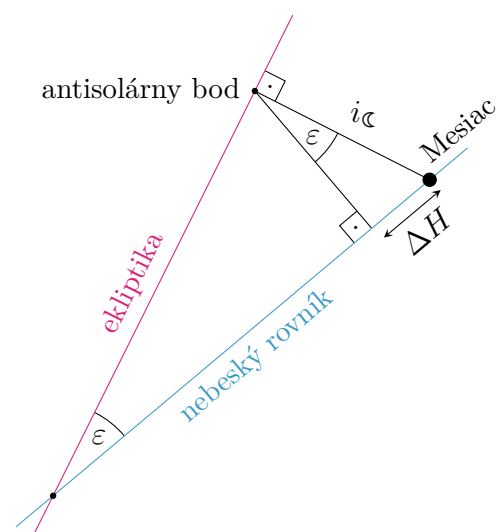
Ak by sme chceli spočítať hodinový uhol H presnejšie, opäť použijeme trojuholník z obrázka T4.4. Hodinový uhol je určený kolným priemetom stredu Mesiaca na nebeský rovník. Ak by tento priemet ležal presne na východe, tak by bol hodinový uhol presne rovný 18^h . Avšak ako vidíme z obrázka, priemet je posunutý o trochu pod horizont, teda hodinový uhol je menší ako 18^h . Prejdeme rovno do aproximácie rovinnou geometriou, v ktorej platí

$$\cos \varphi = \frac{18^h - H}{19'} \Rightarrow \boxed{H \doteq 17,986^h}. \quad (\text{T4.6})$$

- (d) Pre toto podzadanie je kľúčovou informáciou to, že je Mesiac v splne, keďže nám to napovedá o polohe Slnka. To sa počas splnu nachádza oproti Mesiacu na druhej strane oblohy. Mesiac je aktuálne na horizonte na východe, čo implikuje, že sa Slnko nachádza na horizonte na západe, kadiaľ takisto prechádza nebeský rovník. Slnko teda leží na nebeskom rovníku a práve zapadá, z čoho vyplýva, že jeho hodinový uhol je 6^h . Hodinový uhol určuje čas, ktorý ubehol od hornej kulminácie Slnka. Pravý slnečný čas sa však riadi dolnou kulmináciou Slnka – je nulový o polnoci, keď je Slnko najnižšie pod horizontom. Medzi dolnou a hornou kulmináciou ubehne 12^h , a teda pravý slnečný čas v čase pozorovania je

$$\boxed{t_\odot = 18^h}. \quad (\text{T4.7}) \quad 5b$$

Nepresnosť výsledku opäť spočíva aj v refrakcii a uhlovom rozmere Mesiaca, avšak tentoraz je dominantný vplyv toho, že sa Mesiac nemusí nachádzať priamo na ekliptike, ale až do vzdialenosti maximálne $i_\zeta = 5^\circ 8'$ kolmo od nej. Slnko sa ale z definície musí nachádzať na ekliptike, čo znamená, že na oblohe nie je presne oproti Mesiacu. Bod, ktorý je presne oproti Slnku, nazývame antisolárny bod, pričom ak je Mesiac v splne, tak je tento bod tam, kde je aj kolmý priemet stredu Mesiaca na ekliptiku, viď. obrázok T4.5. Pre jednoduchosť zanedbávame refrakciu, fyzické rozmery Mesiaca a efekty sférickej geometrie. Pre približný odhad rozdielu hodinového uhla ΔH Mesiaca a antisolárneho bodu nám to úplne postačí.



Obr. T4.5

Nakolko uvažujeme rovinnú geometriu, vieme preniesť uhol $\varepsilon = 23^\circ 26'$ sklonu nebeského rovníka a ekliptiky do trojuholníka tvoreného Mesiacom, antisolárnym bodom a priemetom antisolárneho bodu na nebeský rovník. Dostávame

$$\sin \varepsilon = \frac{\Delta H}{i_{\zeta}} \Rightarrow \Delta H = 5^\circ 8' \cdot \sin(23^\circ 26') \doteq 2,0^\circ = 8^{\text{min}}. \quad (\text{T4.8})$$

O rovnaké ΔH bude maximálne posunuté aj skutočné Slnko voči strednej hodnote hodinového uhla 6^{h} , a to oboma smermi, do väčších aj menších hodnôt. Pravý slnečný čas je hodinový uhol plus 12^{h} , takže aj ten môže byť o 8^{min} menší či väčší. Každopádne do požadovanej presnosti 1^{h} sa určite vojdeme.

- (e) Pre určenie času východu Mesiaca potrebujeme vypočítať uhlovú vzdialenosť, ktorú potrebuje prejsť jeho stred, a uhlovú rýchlosť, ktorou sa po oblohe pohybuje. Doba východu Mesiaca je čas medzi okamihom, kedy sa zdanlivého horizontu (Radovho obzoru) dotkne horný okraj Mesiaca (1. kontakt), a okamihom, kedy sa horizontu dotkne dolný okraj Mesiaca (2. kontakt). 5b

Počas 1. kontaktu je horný okraj Mesiaca zdanlivo v nulovej výške nad horizontom, avšak reálne je kvôli refrakcii vo výške $-35'$. Počas 2. kontaktu je horný okraj Mesiaca v zdanlivej výške $27'$, pričom refrakcia je pre túto výšku o $5'$ menšia ako na horizonte, čiže reálne je horný okraj Mesiaca vo výške $27' - (35' - 5') = -3'$. Rovnakú úvahu sme vykonali v nadstavbe pre podzadanie (b). Horný okraj Mesiaca potrebuje teda v smere kolmo na horizont prejsť uhlovú vzdialenosť

$$\Delta h = -3' - (-35') = 32', \quad (\text{T4.9}) \quad 7b$$

čiže reálny uhlový priemer Mesiaca.

Rovnakú vertikálnu uhlovú vzdialenosť musí prejsť aj stred Mesiaca. Pohyb Mesiaca je však šikmo na horizont – vychádza takmer presne pod uhlom sklonu nebeského rovníka, teda pod uhlom $90^\circ - \varphi = 40^\circ$. Dôvodom, prečo to nie je úplne presne 40° , je skutočnosť, že deklinácia Mesiaca nie je presne nula, a teda nevychádza priamo pozdĺž nebeského rovníka, ale po vedľajšej kružnici trošku vedľa. Takisto, deklinácia Mesiaca nie je počas jeho vychádzania konštantná, rovnako ako jeho ekliptikálna šírka, ktorá sa počas obehu Mesiaca okolo Zeme mení v intervale od $-i_{\zeta}$ do $+i_{\zeta}$. Oba tieto efekty však môžeme zanedbať a uvažovať, že Mesiac vychádza pod uhlom $90^\circ - \varphi$ voči horizontu. 5b

Takisto budeme uvažovať rovinnú geometriu, čiže uhlová vzdialenosť x , ktorú musí prejsť, je

$$x = \frac{\Delta h}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{32'}{\sin(90^\circ - 50^\circ)} = 49,783'. \quad (\text{T4.10}) \quad 5b$$

Uhlová rýchlosť ω pohybu Mesiaca po oblohe je daná dvoma efektmi:

- rotácia Zeme (360° za $t_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,1 \text{ s}$) s uhlovou rýchlosťou

$$\omega_{\text{R}} = \frac{360^\circ}{23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,1 \text{ s}} = 15,041^\circ/\text{h} = 15,041'/\text{min}, \quad (\text{T4.11}) \quad 8b$$

- obeh Mesiaca okolo Zeme (360° v priemere za $P_{\mathcal{C}} = 27,32$ dňa) s uhlovou rýchlosťou

$$\omega_{\mathcal{O}} = \frac{360^\circ}{27,32 \text{ dňa}} = \frac{360^\circ}{27,32 \cdot 24 \text{ h}} = 0,549^\circ/\text{h} = 0,549'/\text{min}. \quad (\text{T4.12}) \quad 4b$$

Rotácia Zeme otáča oblohu pravotočivo, keďže hviezdy od juhu putujú na západ. Naproti tomu sa Mesiac hýbe medzi hviezdami ľavotočivo, podobne ako Slnko sa mu postupne zväčšuje ekliptikálna dĺžka. To znamená, že $\omega_{\mathcal{R}}$ a $\omega_{\mathcal{O}}$ pôsobia proti sebe, a teda sa odčítavajú. Celková uhlová rýchlosť Mesiaca je preto

$$\omega = \omega_{\mathcal{R}} - \omega_{\mathcal{O}} = 15,041'/\text{min} - 0,549'/\text{min} = 14,492'/\text{min}. \quad (\text{T4.13}) \quad 4b$$

Čas východu Mesiaca je

$$t = \frac{x}{\omega} = \frac{49,783'}{14,492'/\text{min}} \doteq 3,44 \text{ min} = \boxed{3 \text{ min } 26 \text{ s}}. \quad (\text{T4.14}) \quad 2b$$

Odhadnime ešte, akej nepresnosti sme sa dopustili zanedbaním excentricity dráhy Mesiaca $e_{\mathcal{C}} = 0,0549$. Rýchlosť pohybu Mesiaca po oblohe totiž nie je konštantná, ako sme uvažovali, ale je naopak premenlivá. Pomer rýchlostí v perigeu a apogeju je

$$\frac{v_{\mathcal{P}}}{v_{\mathcal{A}}} = \frac{1 + e_{\mathcal{C}}}{1 - e_{\mathcal{C}}}. \quad (\text{T4.15})$$

Uhlová rýchlosť Mesiaca $\omega_{\mathcal{O}}$ spôsobená obhom Mesiaca okolo Zeme závisí aj od vzdialenosti Mesiaca od Zeme. Ak označíme vzdialenosť v perigeu ako q , vzdialenosť v apogeju ako Q a veľkú polos dráhy ako a , tak pre pomer uhlových rýchlostí v perigeu a apogeju máme

$$\frac{\omega_{\mathcal{O},\mathcal{P}}}{\omega_{\mathcal{O},\mathcal{A}}} = \frac{\frac{v_{\mathcal{P}}}{q}}{\frac{v_{\mathcal{A}}}{Q}} = \frac{v_{\mathcal{P}}}{v_{\mathcal{A}}} \cdot \frac{Q}{q} = \frac{1 + e_{\mathcal{C}}}{1 - e_{\mathcal{C}}} \cdot \frac{a(1 + e_{\mathcal{C}})}{a(1 - e_{\mathcal{C}})} = \left(\frac{1 + e_{\mathcal{C}}}{1 - e_{\mathcal{C}}} \right)^2 \doteq 1,25. \quad (\text{T4.16})$$

Rozdiely uhlovej rýchlosti $\omega_{\mathcal{O}}$ obehu Mesiaca okolo Zeme sú teda až 25%. Stredná hodnota je $0,549'/\text{min}$, čiže nepresnosť uhlovej rýchlosti je približne $0,07'/\text{min}$, čo je 0,45% celkovej uhlovej rýchlosti ω . Nepresnosť vypočítaného času je preto $0,45\% \cdot 3,44 \text{ min} \doteq 1 \text{ s}$, čo je v rámci požadovanej presnosti $0,1 \text{ min} = 6 \text{ s}$.

Drobnej nepresnosti sme sa dopustili aj pri výpočte uhlovej rýchlosti, ktorá je spôsobená rotáciou Zeme. Keďže sa Mesiac nenachádza presne na nebeskom rovníku, jeho uhlová rýchlosť bude škálovaná kosínusom deklinácie $\cos \delta = \cos(14,6') = 0,999991$, čo však urobí vskutku zanedbateľný rozdiel. Navyše sa rovnakým faktorom škáluje dráha, ktorú Mesiac potrebuje prejsť na to, aby vyšiel, čo vykompenzuje efekt zmenšenia uhlovej rýchlosti.

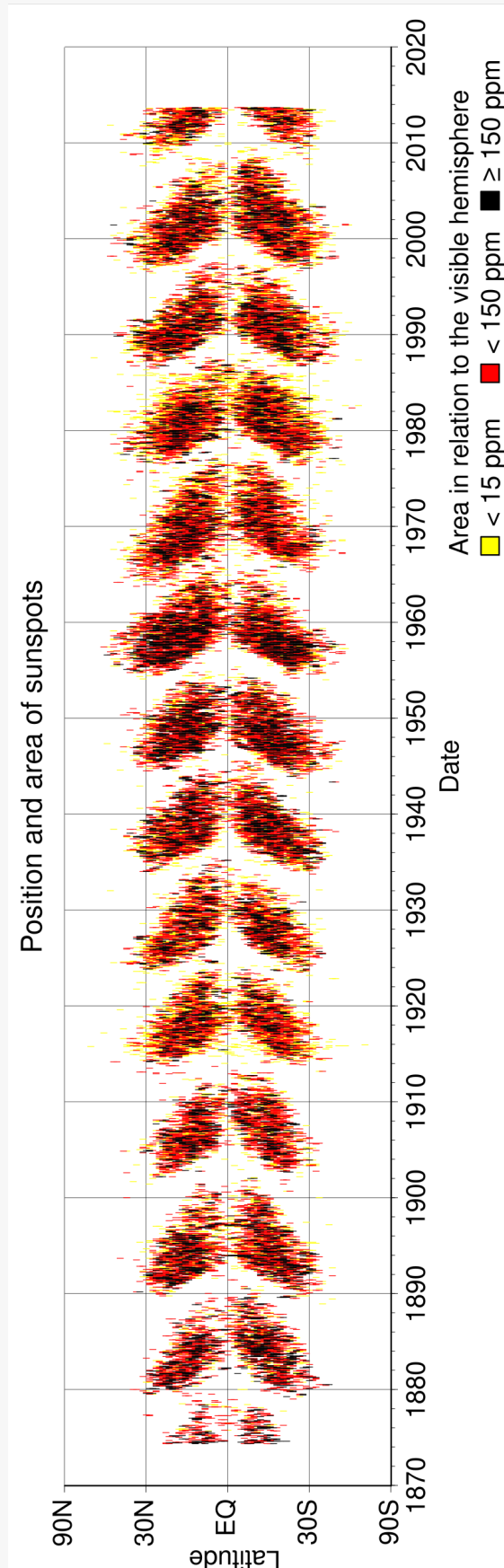
Dátová analýza

D1 Slnčná

(200b, autor: Terézia Hanáková)

Zmenou rozloženia magnetického poľa Slnka sa mení jeho povrchová aktivita, ktorej najznámejším prejavom je výskyt slnečných škvŕn. Ich aktivitu v čase popisuje tzv. *motýlikový diagram*, zobrazený na priloženom grafe. V úlohe predpokladajte, že Slnko je dokonalá guľa.

- (a) [50b] Odhadnite roky, v ktorých nastali slnečné minimá, a zhrňte ich do prehľadnej tabuľky. Uveďte poradové číslo daného minima na diagrame v smere zľava doprava. Začnite minimom prvého celého zaznamenaného slnečného cyklu.
- (b) [70b] Vyneste hodnoty z tabuľky, ktorú ste vyrobili v podzadaní (a), do grafu závislosti roku minima od jeho poradového čísla.
- (c) [50b] Graf z podúlohy (b) preložte priamkou a na základe fitu určte smernicu danej priamky. Táto hodnota sa nazýva *Schwabeho slnečný cyklus*.
- (d) [30b] Z motýlikového diagramu určte rozpätie heliografických šírok, na ktorých sa nachádzali slnečné škvŕny od roku 1870 po rok 2020.



Obr. D1.1:

Motýlikový diagram, t. j. závislosť heliografickej šírky od času. Môžete si všimnúť, že slnečné škvrny sú na začiatku cyklu viditeľné ďalej od slnečného rovníka a postupne sa presúvajú bližšie k rovníku, pričom graficky tvoria tvar podobný krídlam motýľa. Farby na diagrame znázorňujú početnosť slnečných škvŕn, pričom najhustejší výskyt zobrazuje čierna farba.

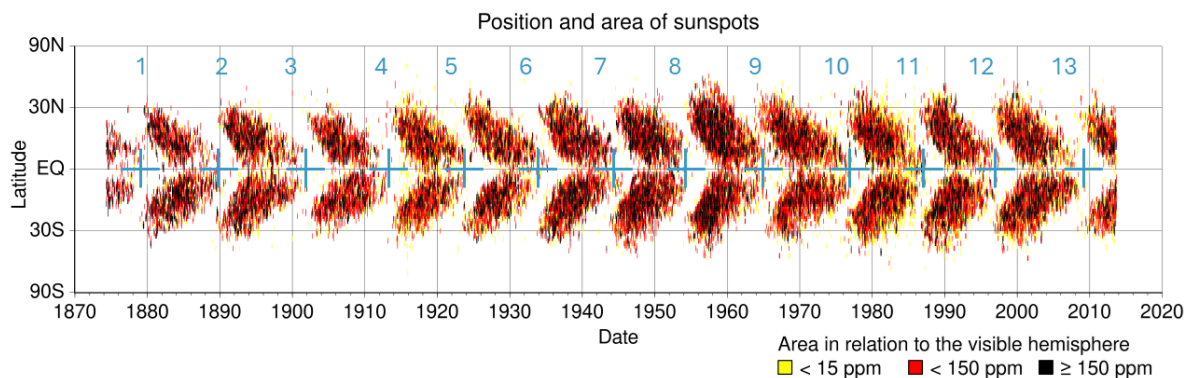
Zdroj: Royal Observatory, Greenwich, NOAA.

- (a) V tejto úlohe budeme pracovať s motýlikovým diagramom na obr. D1.1. Ako bolo vysvetlené v zadaní, motýlikový diagram je graf závislosti heliografickej šírky od času (konkrétne od roku 1874 po rok 2014). Slnčné minimá budeme zaznamenávať do tabuľky D1.1, konkrétne určíme ich poradové číslo v smere zľava doprava a príslušný rok. Vidíme, že v motýlikovom diagrame je dokopy 13 minim. Polohy minim sú vykreslené na obrázku D1.2.

Poradové číslo minima	Rok minima
1	1879
2	1890
3	1902
4	1913
5	1924
6	1934
7	1944
8	1954
9	1965
10	1977
11	1987
12	1997
13	2009

Tabuľka D1.1: Rok minim a ich poradové číslo.

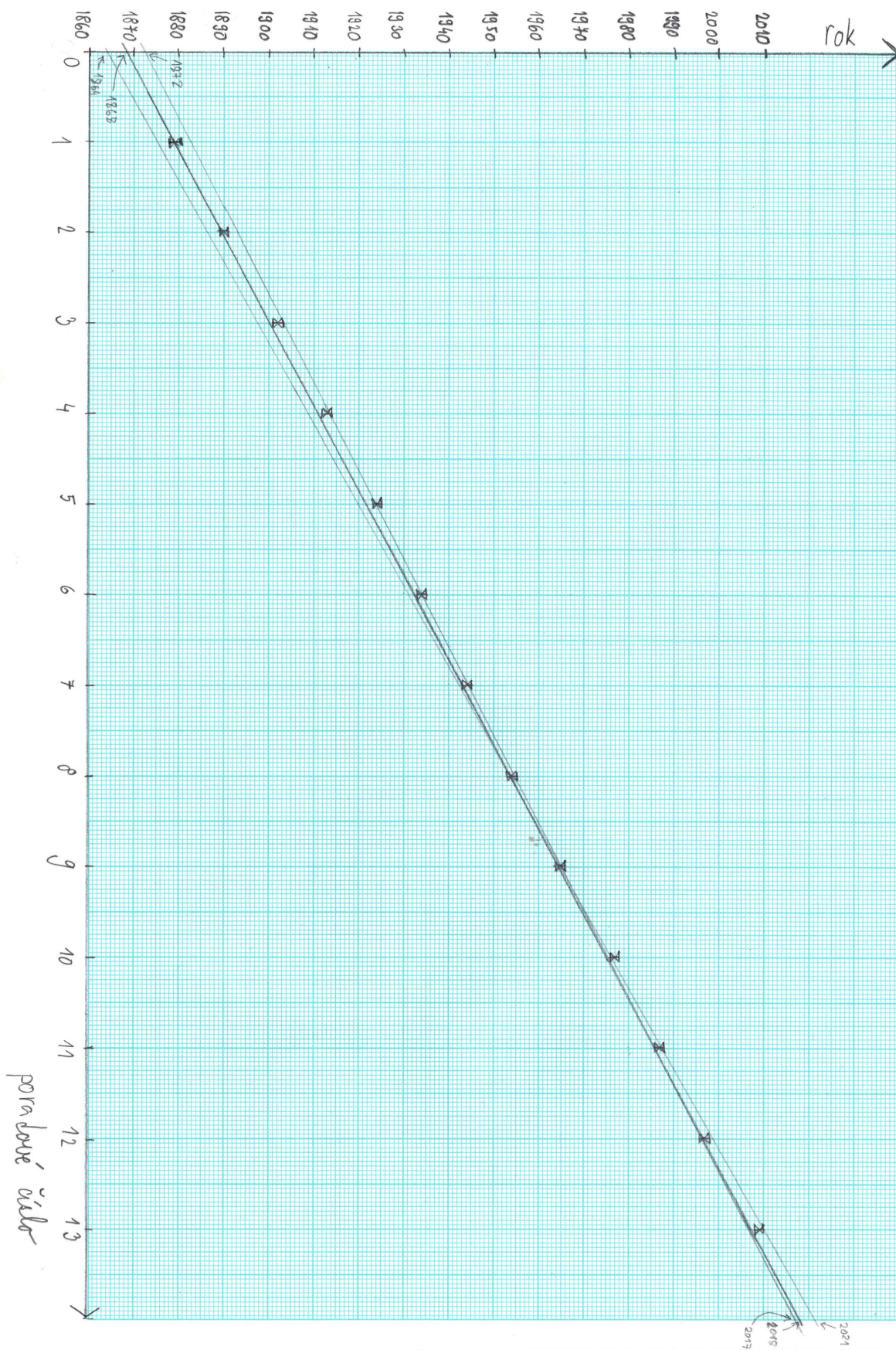
50b



Obr. D1.2: Polohy slnečných minim na motýlikovom diagrame.

Ako vidíme v tabuľke D1.1, rok minima sme uvádzali s presnosťou na celé roky. V dôsledku komplikovanejšieho odhadu polohy minim z motýlikového diagramu predpokladáme, že rok minima vieme určiť s presnosťou na jeden celý rok, čiže s odchýlkou jedného roku.

- (b) V nasledujúcej podúlohe vynesieme hodnoty z tabuľky D1.1 do grafu, teda vytvoríme graf závislosti roku minima od jeho poradového čísla. To je vyobrazené na grafe D1.3. Vidíme, že závislosť má jasný lineárny priebeh.



Obr. D1.3: Vynesenie bodov z tabuľky D1.1 do grafu a preloženie priamkou.

- (c) Všetky body z grafu D1.3 vieme preložiť priamkou pomocou pravítka a následne určiť jej predpis v tvare $y = Ax + B$. Priamka prechádza bodmi $[0, 1868]$ a $[14, 2018]$. Dosadením prvého bodu do rovnice priamky dostaneme priamo $B = 1868$. Smernicu A vypočítame ako podiel rozdielu y-ových súradníc bodov a rozdielu x-ových súradníc bodov, teda

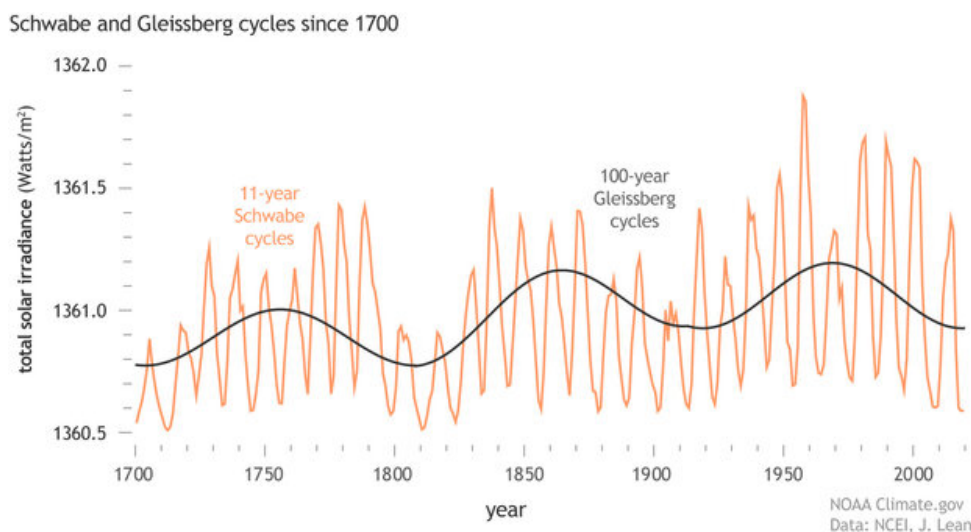
$$A = \frac{2018 - 1868}{14 - 0} = 10,71. \quad (\text{D1.1})$$

Do grafu sme takisto zakreslili náš odhad minimálnej a maximálnej priamky fitu, z čoho vieme určiť nepresnosti vypočítaných koeficientov. Pre B dostávame minimálnu hodnotu 1864 a maximálnu hodnotu 1872. Nepresnosť je teda približne ± 4 . Pre A je minimálna hodnota $(2017 - 1872)/14 = 10,36$ a maximálna hodnota $(2021 - 1868)/14 = 10,93$. Nepresnosť zaokrúhlená na jednu platnú cifru je $\pm 0,3$. Ako finálny výsledok predpisu priamky dostávame

$$y = (10,7 \pm 0,3)x + (1868 \pm 4). \quad (\text{D1.2}) \quad 50b$$

Nesmieme zabudnúť, že v tomto predpise musíme koeficienty A a B zaokrúhliť na taký počet miest, ako zodpovedá chybe merania. Prílišná presnosť by bola nerealistická.

Poznámka: Smernica priamky z tohto predpisu nám udáva tzv. Schwabeho periódu (alebo tiež Schwabeho cyklus) – periódu, s ktorou sa mení počet slnečných škvŕn na povrchu Slnka. Na jej začiatku sa na povrchu Slnka nachádza minimum škvŕn. Postupne ich počet pribúda, pričom slnečné škvŕny sa začínajú vytvárať ďalej od slnečného rovníka a po približne 11 rokoch ich počet dosiahne maximum a ich výskyt sa postupne presunie smerom k nižším heliografickým šírkam. Táto Schwabeho perióda má úzku súvislosť s tzv. Haleovým cyklom. Haleov cyklus v sebe integruje dva po sebe idúce Schwabeho cykly (čiže trvá približne 22 rokov), pričom na vrchole každého maxima dochádza k zmene magnetickej polarita slnečných pólů a až po uplynutí ďalšej 11-ročnej periódy, počas ktorej majú magnetické polia v aktívnych oblastiach opačnú orientáciu, sa magnetický dipól Slnka vráti do svojej pôvodnej konfigurácie. Okrem týchto cyklov existuje ešte tzv. Gleissbergov cyklus, ktorý predstavuje dlhodobú variáciu slnečnej aktivity, ktorá moduluje amplitúdu jednotlivých 11-ročných Schwabeho cyklov v priebehu približne 80 až 100 rokov. Tento cyklus spolu so Schwabeho cyklom sú znázornené na obrázku D1.4.



Obr. D1.4: Schwabeho a Gleissbergov slnečný cyklus. Zdroj: NOAA.

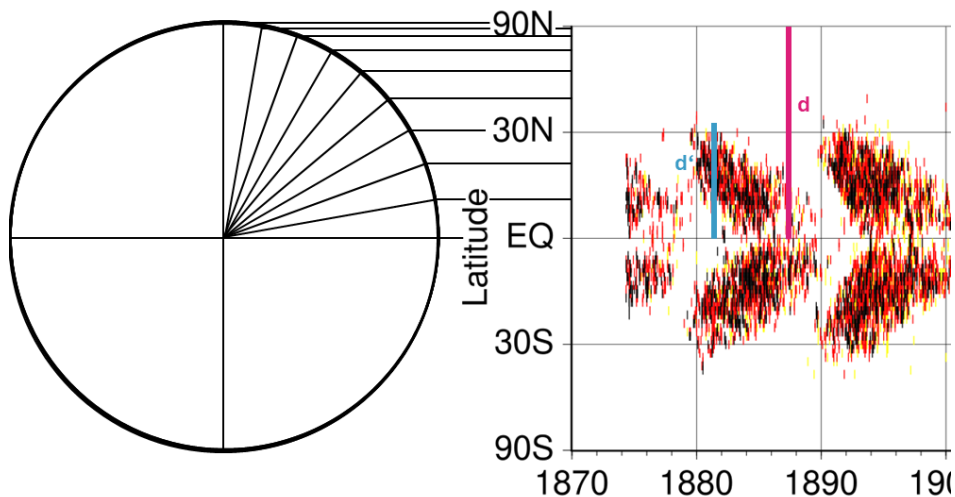
- (d) Ako poslednú úlohu máme určiť rozpätie heliografických šírok, na ktorých sa slnečné škvrny nachádzali. Tým pádom sa vraciame späť na obrázok D1.1 a pozeráme sa na zvislú os, na ktorej sú hodnoty heliografických šírok. V prvom rade si treba uvedomiť, že táto os je v sínusovej stupnici, čo znamená, že na zistenie uhla, ktorý reprezentuje heliografickú šírku β , si musíme definovať škálu pomocou priamej úmery

$$\frac{d'}{d} = \frac{\sin \beta}{\sin 90^\circ}, \quad (\text{D1.3})$$

kde d je hodnota nameraná pravítkom (v centimetroch) od hodnoty $\beta = 0^\circ$ (EQ) po $\beta = 90^\circ$ (90N) a d' je pravítkom nameraná hodnota (opäť od hodnoty $\beta = 0^\circ$) nášho maxima, resp. minima, ktoré hľadáme. Hodnoty $\sin 90^\circ = 1$ a $\sin \beta$ reprezentujú naškálovanie na sínusové hodnoty. Z rovnice (D1.3) vieme následne jednoducho vyjadriť heliografickú šírku

$$\beta = \arcsin\left(\frac{d'}{d}\right). \quad (\text{D1.4}) \quad 15b$$

Pre ozrejmienie prikkladáme obrázok D1.5.



Obr. D1.5: Sínusová os a znázornenie veľkostí d a d' .

Ďalej je riešenie jednoduché. Stačí nám len nájsť najmenšiu a najväčšiu heliografickú šírku, určiť si pravítkom, ako ďaleko sa nachádza od hodnoty $\beta = 0^\circ$ (EQ) a následne pomocou odvodeného vzorca (D1.4) určiť príslušnú heliografickú šírku β . Rozpätie heliografických šírok nám bude určovať práve táto nájdená maximálna β_{\max} a minimálna β_{\min} heliografická šírka.

Z motýlikového diagramu vieme odmerať $d = (26,0 \pm 0,5)$ mm, $d'_{\max} = (22,0 \pm 0,5)$ mm, $d'_{\min} = (-22,0 \pm 0,5)$ mm. Konkrétne vzdialenosti samozrejme závisia od tlače. Prepočtom na heliografickú šírku pomocou vzorca (D1.4) dostaneme rozpätie

$$\beta \in \langle -60^\circ \pm 4^\circ ; 60^\circ \pm 4^\circ \rangle. \quad (\text{D1.5}) \quad 15b$$

Praktická časť

P1 Prvý vertikál

(100b, autor: Samuel Buranský)

Jednou z hlavných kružníc v sústave horizontálnych súradníc je prvý vertikál. Prvý vertikál je hlavná kružnica, ktorá spája zenit, nadir, východný a západný bod horizontu. Priložená mapa bola vytvorená pre Nitru, ktorá má zemepisné súradnice $48^{\circ} 18' N$, $18^{\circ} 5' E$. Na mape je krížikom vyznačený zenit ako pomôcka.

(a) [10b] Do mapy zakreslite meridián a prvý vertikál.

Nájdite hviezdy pozorovateľné z Nitry, ktoré nikdy nepretnú prvý vertikál a

(b) [15b] vypočítajte rozsah ich deklinácií,

(c) [25b] na priloženej mape vyznačte oblasť, v ktorej sa nachádzajú.

Nájdite cirkumpolárne hviezdy pre Nitru a

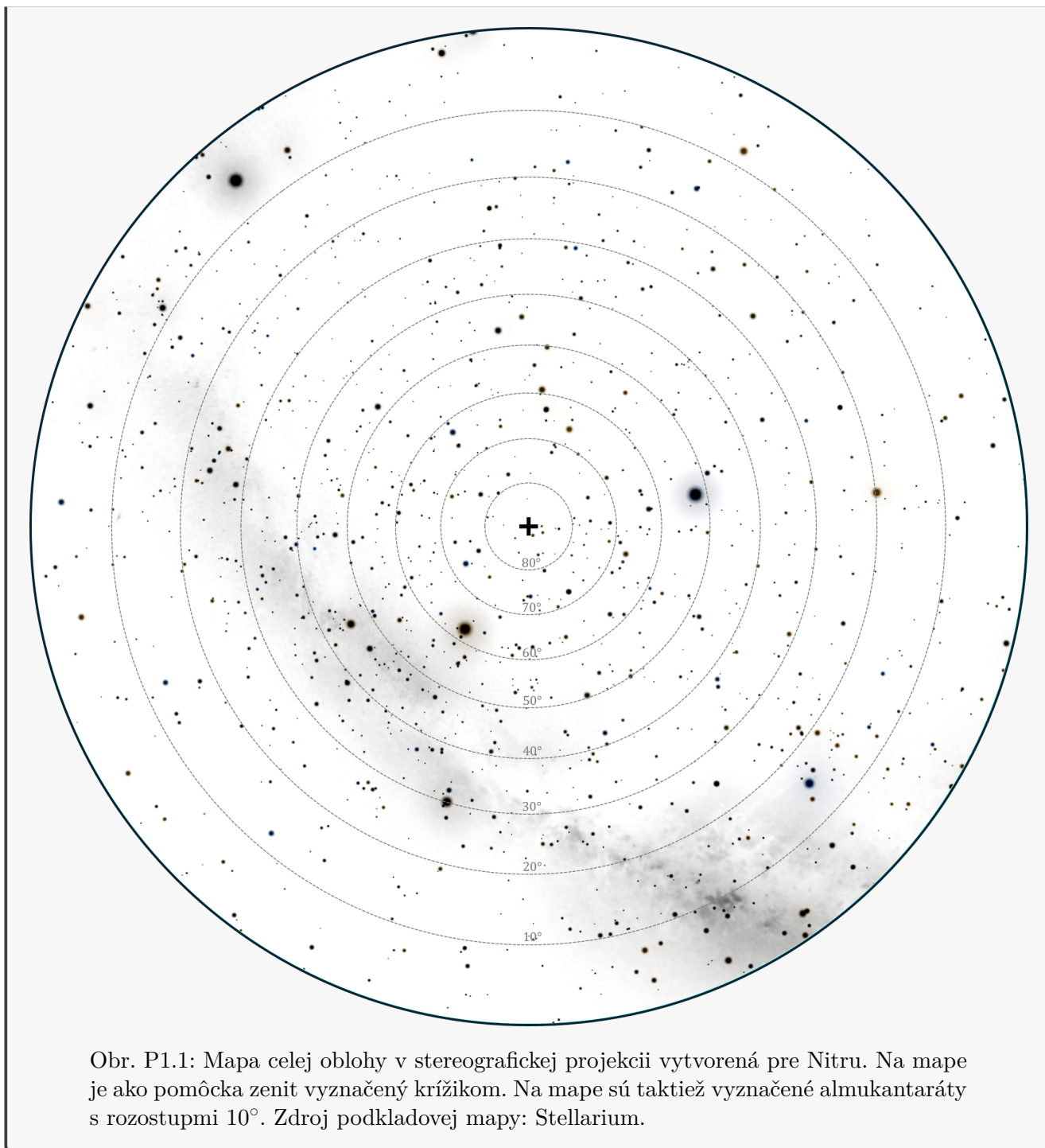
(d) [15b] vypočítajte rozsah ich deklinácií,

(e) [25b] na priloženej mape vyznačte oblasť, v ktorej sa nachádzajú.

V poslednej podúlohe tieto časti porovnajte.

(f) [10b] Nájdite miesta na severnej pologuli Zeme, kde je oblasť oblohy z častí (b) a (c) zhodná s oblasťou oblohy z častí (d) a (e). Uvažujte uvedené časti oblohy vzhľadom na dané miesta na Zemi, nie vzhľadom na Nitru.

Nápoveda: Priložená mapa je vytvorená v stereografickej projekcii. V tejto projekcii sa hlavné aj vedľajšie kružnice na sfére zobrazujú stále ako kružnice, ale ich stred nemusí ležať tam, kde by sme ho mohli naivne očakávať. Na mape sú ako pomôcka vyobrazené almukantaráty (kružnice spájajúce body s rovnakou výškou nad obzorom) s rozstupom 10° .



- (a) Meridián je hlavná kružnica, ktorá prechádza zenitom, nadirom, svetovými pólmi a severným a južným bodom horizontu. V projekcii priloženej mapy bude hlavná kružnica prechádzajúca zenitom zobrazená ako časť priamky. Na nájdenie meridiánu nám stačí spojiť zenit a severný svetový pól (s dobrou presnosťou Polárku). Meridián je vyobrazený na obrázku P1.2. 5b

Z definície v zadaní možno usúdiť, že prvý vertikál je kolmý na meridián. Priesečník prvého vertikálu a meridiánu je v zenite, pričom prvý vertikál prechádza cez východ a západ a meridián cez sever a juh. Prvý vertikál je zobrazený na obrázku P1.2. 5b

- (b) Hľadaná oblasť oblohy musí byť symetrická okolo svetového pólu, čo znamená, že na sfére pôjde o kružnicu so stredom v svetovom póle a polomer musí byť zhodný so vzdialenosťou pólu a najbližšieho bodu prvého vertikálu. Vidíme, že najbližší bod k pólu, ležiaci na prvom vertikále, je zenit. 5b
3b

Polomer kružnice, ktorú hviezda opisuje pri pohybe okolo svetového pólu, je všeobecne daný ako $r = 90^\circ - \delta$. Maximálny polomer kružnice, ktorú hľadáme, je rovný zenitovej vzdialenosti pólu $z_P = 90^\circ - \varphi$. Pre všetky hľadané hviezdy teda platí

$$90^\circ - \delta \leq 90^\circ - \varphi, \quad (\text{P1.1}) \quad 4b$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$\boxed{\delta \geq \varphi = 48^\circ 18'} . \quad (\text{P1.2}) \quad 3b$$

- (c) Z nápovedy zo zadania vieme, že sa stredy projektovaných kružníc nebudú zhodovať s miestami, na ktoré sa zobrazia pri tejto projekcii stredy reálnych kružníc. Zároveň na priloženej mape v zadaní vidíme, že almukantaráty sú smerom k zenitu bližšie k sebe. Stred projektovanej kružnice musí byť opäť na meridiáne. Na základe rovnice (P1.1) z predošlého zadania vieme, že polomer tejto kružnice je $r = 90^\circ - \varphi$, a teda priemer je $d = 2 \cdot (90^\circ - \varphi) = 83^\circ 23'$. Jedným okrajom tejto kružnice je podľa predošlých úvah zenit a druhý okraj bude vzdialený o d od zenitu smerom na sever po meridiáne, pričom túto vzdialenosť odhadneme podľa zobrazených almukantarátov. Následne presne v strede medzi týmito bodmi bude stred hľadanej kružnice, ktorý je vyobrazený na obrázku P1.2 ružovým krížikom. Polomer je vzdialenosť k jednému krajnému bodu. Kružnica je vyobrazená ružovou farbou na obrázku P1.2. 5b
5b
5b
10b

Poznámka: Ak by sme uvažovali aj hviezdy nepozorovateľné z Nitry, tak ďalším riešením by bola oblasť okolo južného pólu symetrická s tou, ktorú sme našli okolo severného pólu, teda rozsah deklinácií

$$\delta \leq \varphi = -48^\circ 18' . \quad (\text{P1.3})$$

- (d) Využijeme obdobný postup ako v (b), ale v tomto prípade je maximálny polomer kružnice rovný vzdialenosti pólu a horizontu, teda výške svetového pólu $h_P = \varphi$. Môžeme teda písať nerovnosť 8b

$$90^\circ - \delta \leq \varphi, \quad (\text{P1.4}) \quad 4b$$

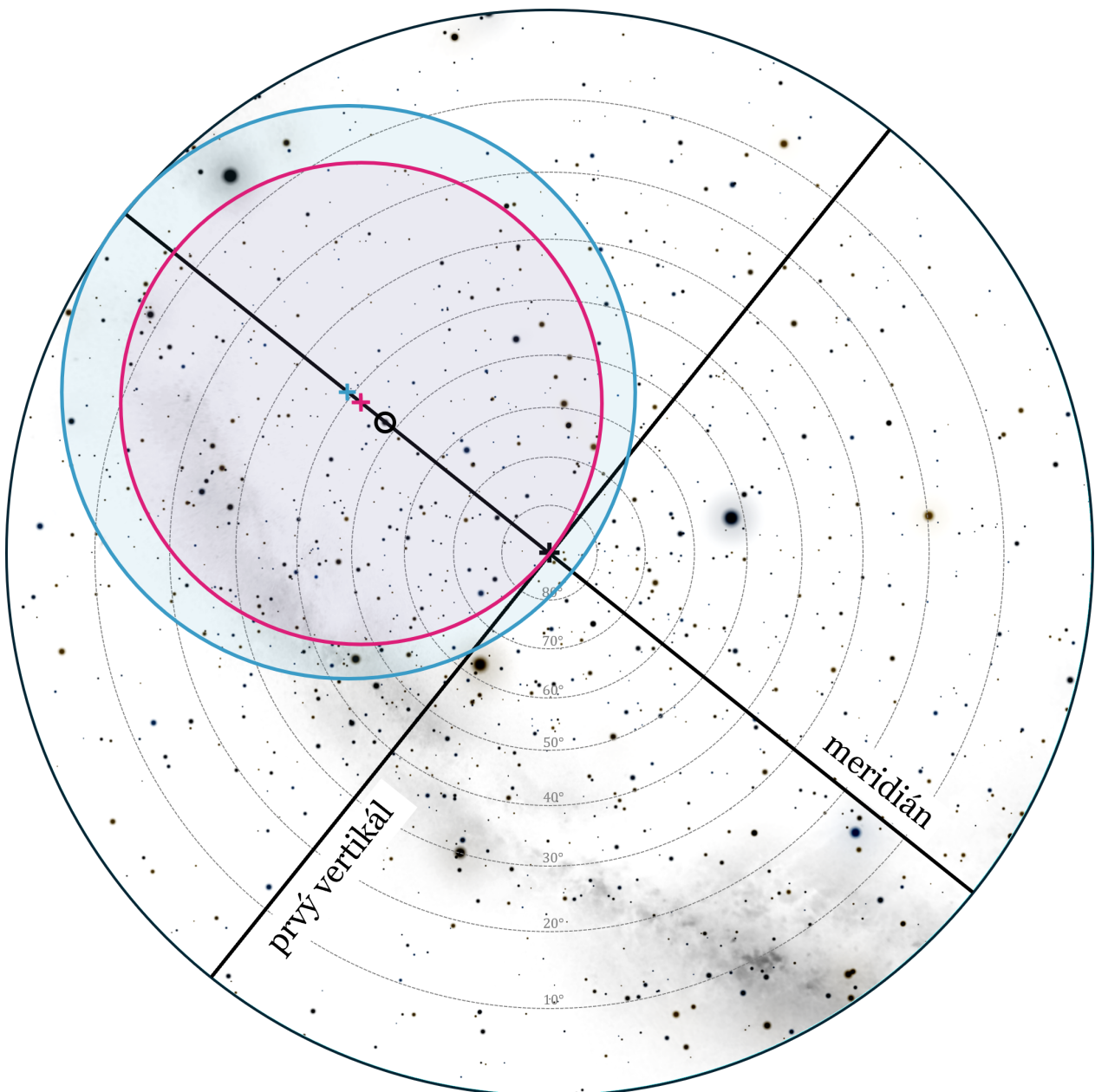
odkiaľ dostaneme rozsah deklinácií ako

$$\boxed{\delta \geq 90^\circ - \varphi = 41^\circ 42'} . \quad (\text{P1.5}) \quad 3b$$

- (e) Pri hľadaní kružnice na mape využijeme obdobný postup ako v časti (b). Polomer kružnice podľa rovnice (P1.4) je $r = \varphi$, a teda priemer kružnice $d = 2\varphi = 96^\circ 36'$. Z predchádzajúcich úvah je jasné, že jedným okrajom tejto kružnice je severný bod horizontu a druhý okraj bude vzdialený o d smerom na juh po meridiáne, pričom vzdialenosť môžeme opäť odhadnúť pomocou vyobrazených almukantarátov. Stred sa bude nachádzať presne medzi týmito 10b

dvomi bodmi (je vyznačený modrým krížikom) a polomer je vzdialenosť k jednému z okrajov. 5b
 Kružnica je vyobrazená na obrázku P1.2 modrou farbou. 10b

- (f) Z úvahy aj z výpočtu vieme, že na skutočnej oblohe sú obe tieto oblasti ohraničené kružnicami so stredom v severnom svetovom póle. Nerovnice (P1.5) a (P1.2) nám určujú príslušné rozsahy deklinácií. V prípade, že $\varphi = 45^\circ$, budú oba rozsahy deklinácií zhodné, nakoľko svetový pól bude presne medzi zenitom a horizontom. 3b
 7b



Obr. P1.2: Mapa celej oblohy vytvorená pre Nitru. Riešenie s vyznačeným meridiánom a prvým vertikálom. Hviezdy, ktoré nepretnú prvý vertikál – ružová kružnica (b); cir-kumpolárna časť oblohy – modrá kružnica (c). Zdroj podkladovej mapy: Stellarium.

P2 Meteorický roj

(100b, autor: Jana Švrčková)

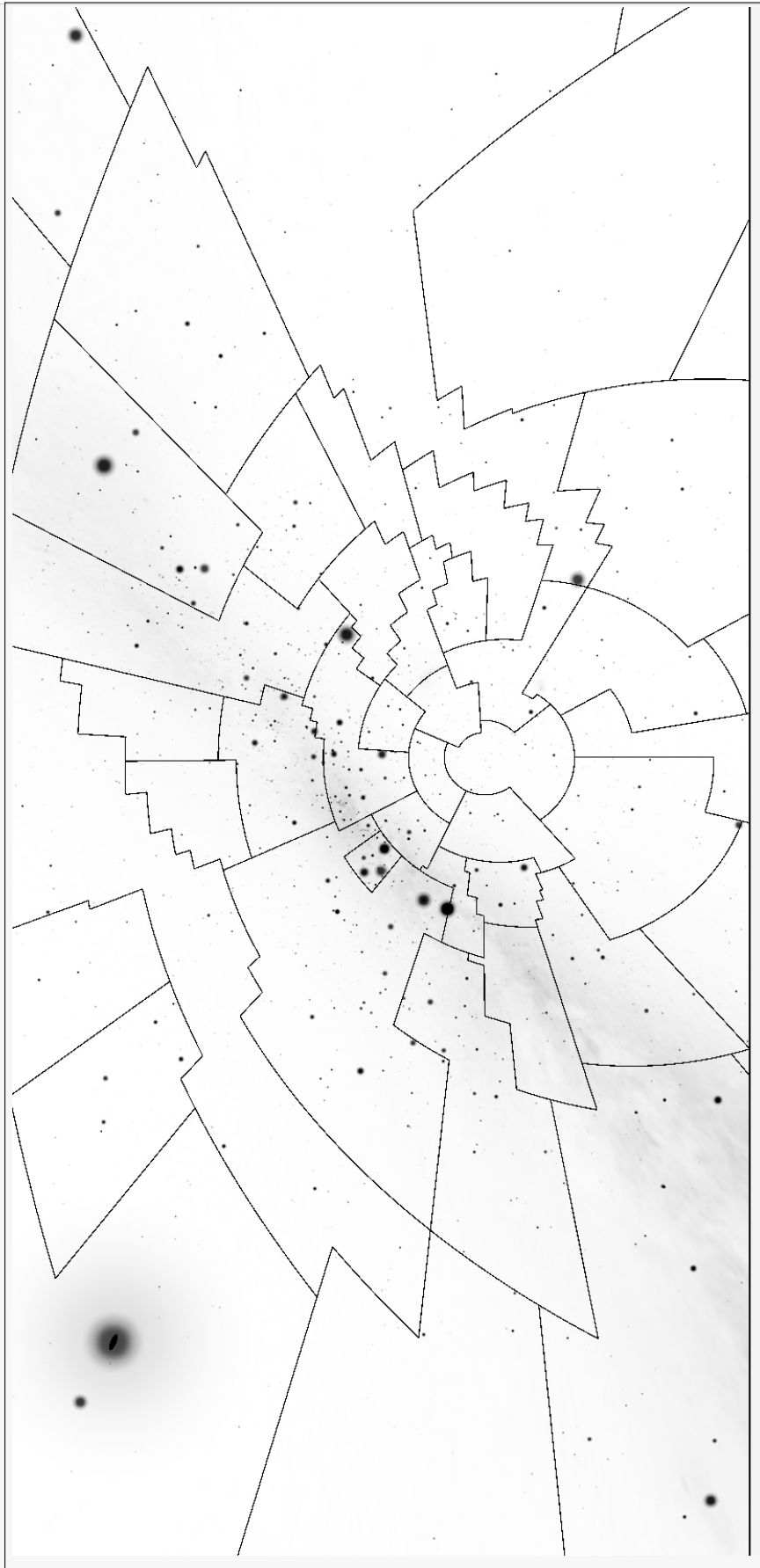
Astronóm nachádzajúci sa niekde na južnej pologuli pozoroval meteorický roj. Nemal pri sebe mapu, do ktorej by zakresľoval stopy meteorov, a tak si aspoň zapísal, odkiaľ kam sa zhruba pohybovali na oblohe. Na ďalší deň si zakreslil ich trajektórie do mapy v gnómonickej projekcii a zistil, že objavil nový meteorický roj. Vašou úlohou je zopakovať jeho postup, nájsť radiant tohto nového roja a určiť súhvezdie, v ktorom sa nachádza.

Do priloženej mapy zakreslite trajektórie všetkých 10 meteorov a označte ich príslušným číslom. Tri z desiatich meteorov sú sporadické. Určite, ktoré z nich to sú. Do mapy zakreslite oblasť, v ktorej sa nachádza radiant roja, a napíšte slovenský názov a latinskú skratku súhvezdia, v ktorom sa radiant nachádza.

Pozorované meteory:

- 1) Zo stredu súhvezdia Rydlo do stredu súhvezdia Výveva.
- 2) Od hviezdy Beta Cen k Mesiacu.
- 3) Od hviezdy Atria k miestu, kde sa stretávajú hranice súhvezdí Vlk, Centaurus, Hydra a Váhy.
- 4) Od hviezdy Canopus k hviezde Peacock.
- 5) Od stredu súhvezdia Páv cez súhvezdie Oltár až k hviezde Antares.
- 6) Zo stredu súhvezdia Sieť smerom k hviezde Sírius.
- 7) Od svetového pólu k hviezde Gamma Cru.
- 8) Od hviezdy Achernar k hviezde Rigel.
- 9) Od Malého Magellanovho mraku až do stredu súhvezdia Kompas.
- 10) Zo stredu súhvezdia Havran k hviezde Alpha Col.

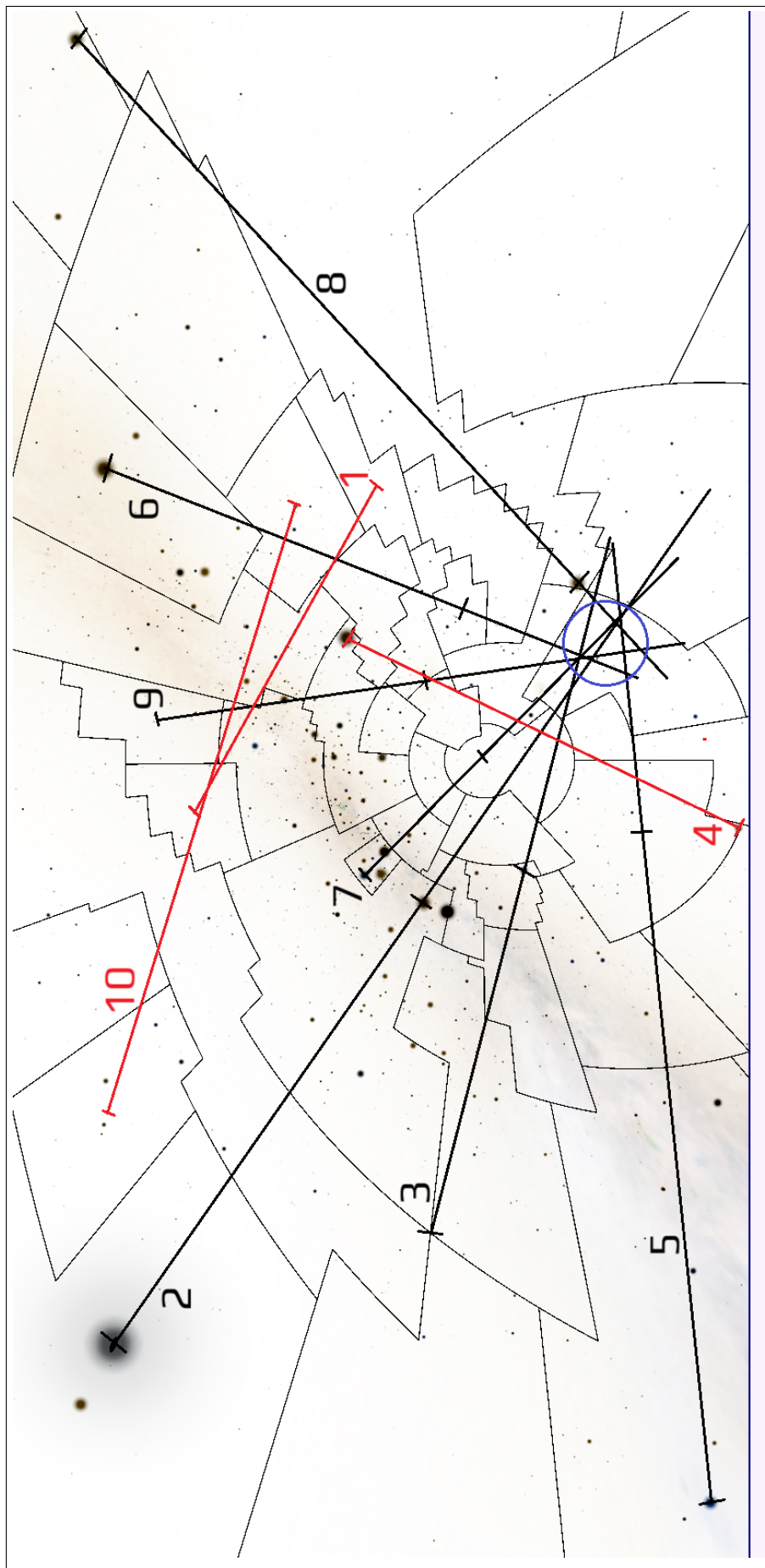
Nápoveda: V gnómonickej projekcii sa všetky hlavné kružnice zobrazujú ako priamky. Meteory sa na oblohe zdanlivo pohybujú po oblúkoch hlavných kružníc. Stopy meteorov preto môžeme do tejto mapy zakresliť ako úsečky.



Obr. P2.1: Mapa v gnómonickej projekcii na zakresľovanie stôp meteorov. Zdroj: Stellarium

Stopy meteorov predĺžime smerom dozadu k oblasti, z ktorej vyleteli. Zakreslené to je na obrázku P2.2. Vidíme, že meteory číslo 1, 4 a 10 zdanlivo vyletujú z úplne iných miest na oblohe ako zvyšných 7 meteorov. Z toho môžeme usúdiť, že práve tieto 3 meteory sú sporadické (na mape sú preto vyznačené červenou farbou). Stopy zvyšných meteorov vychádzajú z rovnakej oblasti označenej modrou kružnicou, v jej vnútri sa teda nachádza radiant roja. Keďže trajektórie meteorov sú len približné, ich stopy sa nepretínajú presne v jednom bode. Radiant môžeme umiestniť zhruba do ťažiska bodov, v ktorých sa stopy rojových meteorov pretínajú. Nachádza sa v súhvezdí Tukan (lat. skratka Tuc).

Poznámka k bodovaniu: Za každý správne nájdený začiatočný alebo koncový bod trajektórie bolo možné získať 4 b; za nájdenie oblasti, kde sa nachádza radiant 4 b; za slovenský názov a latinskú skratku súhvezdia radiantu $2b + 2b$ a za identifikáciu sporadických meteorov taktiež po 4 b.



Obr. P2.2: Mapa so zakreslenými stopami meteorov a vyznačenou oblasťou, v ktorej sa nachádza radiant.

Zoznam konštánt (SŠ)

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
gravitačná konštanta	$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
elementárny elektrický náboj	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Coulombova konštanta	$k_e = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-2} \text{ C}^{-2}$
Planckova konštanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
univerzálna plynová konštanta	$\bar{R} = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Wienova posunovacia konštanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Hubbleova konštanta	$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň = 24 h
siderický (hviezdny) deň	$t_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,1 \text{ s}$
juliánsky rok	rok = 365,25 dní
siderický rok	$P_{\oplus} = 365,2564 \text{ dní}$
tropický rok	$P_{\oplus}^{\text{trop}} = 365,2422 \text{ dní}$
anomalistický rok	$P_{\oplus}^{\text{anom}} = 365,2596 \text{ dní}$
astronomická jednotka	au = $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
svetelný rok	ly = $9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$
parsek	pc = $3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$
Jansky	Jy = $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$

Slnko

hmotnosť Slnka	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
polomer Slnka	$R_{\odot} = 6,957 \cdot 10^8 \text{ m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_{\odot} = 5772 \text{ K}$
farebná teplota Slnka	$T_{\odot}^{\text{color}} = 5900 \text{ K}$
zdanlivá vizuálna magnitúda Slnka	$m_{\odot} = -26,74 \text{ mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda Slnka	$m_{\odot}^{\text{bol}} = -26,83 \text{ mag}$
absolútna vizuálna magnitúda Slnka	$M_{\odot} = 4,83 \text{ mag}$
absolútna bolometrická magnitúda Slnka	$M_{\odot}^{\text{bol}} = 4,74 \text{ mag}$

Planéty

excentricita dráhy Zeme	$e_{\oplus} = 0,0167$
inklinácia rotačnej osi Zeme	$\varepsilon = 23^{\circ} 26'$
Tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme	$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$

planéta	polomer	hmotnosť	veľká polos dráhy
Merkúr ☿	$R_{\text{☿}} = 2440 \text{ km}$	$m_{\text{☿}} = 3,302 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$a_{\text{☿}} = 0,387 \text{ au}$
Venuša ♀	$R_{\text{♀}} = 6052 \text{ km}$	$m_{\text{♀}} = 4,867 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$a_{\text{♀}} = 0,723 \text{ au}$
Zem ⊕	$R_{\text{⊕}} = 6378 \text{ km}$	$m_{\text{⊕}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$a_{\text{⊕}} = 1 \text{ au}$
Mars ♂	$R_{\text{♂}} = 3393 \text{ km}$	$m_{\text{♂}} = 6,417 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$a_{\text{♂}} = 1,524 \text{ au}$
Jupiter ♃	$R_{\text{♃}} = 69\,911 \text{ km}$	$m_{\text{♃}} = 1,898 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	$a_{\text{♃}} = 5,204 \text{ au}$
Saturn ♄	$R_{\text{♄}} = 58\,232 \text{ km}$	$m_{\text{♄}} = 5,683 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$a_{\text{♄}} = 9,583 \text{ au}$
Urán ♅	$R_{\text{♅}} = 25\,362 \text{ km}$	$m_{\text{♅}} = 8,681 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$a_{\text{♅}} = 19,191 \text{ au}$
Neptún ♆	$R_{\text{♆}} = 24\,764 \text{ km}$	$m_{\text{♆}} = 1,024 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$a_{\text{♆}} = 30,069 \text{ au}$

Mesiac

polomer Mesiaca	$R_{\text{☾}} = 1737 \text{ km}$
hmotnosť Mesiaca	$m_{\text{☾}} = 7,346 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
veľká polos dráhy Mesiaca	$a_{\text{☾}} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
siderická obežná doba Mesiaca	$P_{\text{☾}} = 27,32 \text{ dní}$
synodická obežná doba Mesiaca	$S_{\text{☾}} = 29,53 \text{ dní}$
inklinácia dráhy Mesiaca voči ekliptike	$i_{\text{☾}} = 5^\circ 8'$
excentricita dráhy Mesiaca	$e_{\text{☾}} = 0,0549$
zdanlivá vizuálna magnitúda Mesiaca v splne	$m_{\text{☾}} = -12,74 \text{ mag}$

Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

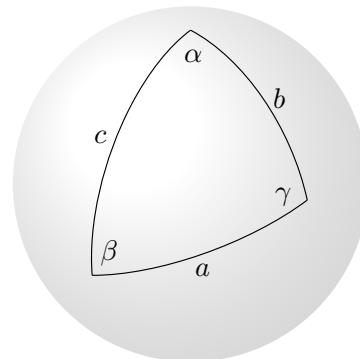
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Sférický exces (v radiánoch):

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

= plocha trojuholníka na jednotkovej sfére.



Vzťahy pre elementy dráhy

polárna rovnica kuželosečky: $r = \frac{p}{1+e \cos \vartheta}$, $p = \frac{L^2}{GMm^2} = a(1-e^2)$

stredná anomália: $M = (t - t_0) \sqrt{\frac{GM}{p^3} (1 - e^2)^3} = 2\pi \frac{t - t_0}{P}$

Keplerova rovnica pre elipsu: $M = E - e \sin E$, $\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}$

Barkerova rovnica pre parabolu: $t - t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \left(\tan \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu}{2} \right)$

Keplerova rovnica pre hyperbolu: $M = e \sinh F - F$, $\tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\nu}{2}$