

# VZOROVÉ RIEŠENIA

## Astronomickej olympiády 2026

Kolo: domáce kolo

Kategória: stredná škola

---

1. Milkroméda (60b) . . . . .	2
2. Sonda pri ISS (80b) . . . . .	4
3. Neviditeľný (60b) . . . . .	7
4. Hypatia z Alexandrie (100b) . . . . .	11
5. Bludný Holanďan (100b) . . . . .	16
<b>Zoznam konštánt . . . . .</b>	<b>22</b>

Dokopy bolo možné získať **400b**

Zverejnené 18. 02. 2026

Tento dokument je možné voľne distribuovať  
nekomerčným spôsobom pre vzdelávacie účely s uvedením zdroja.

Astronomickej olympiády je vedomostná súťaž pre študentov základných a stredných škôl organizovaná na Slovensku už 20-ty rok. Jej cieľom je vzdelávanie v astronómii a astrofyzike, ako aj výber reprezentantov na Medzinárodnú olympiádu z astronómie a astrofyziky.

Všetky dôležité informácie o Astronomickej olympiáde nájdete na stránke [www.aosk.sk](http://www.aosk.sk).  
V prípade ľubovoľných otázok nás kontaktujte prostredníctvom e-mailu [ao@aosk.sk](mailto:ao@aosk.sk).



Slovenská ústredná hviezdáreň  
v Hurbanove



Súťaž vyhlasuje Slovenská ústredná hviezdáreň Hurbanovo v spolupráci so SAS pri SAV, s hviezdárňami a planetáriami, astronomickými kabinetmi, osvetovými strediskami, centrami voľného času a regionálnymi kultúrnymi centrami.

# 1 Milkdoméda

(60b, autor: Terézia Hanáková &amp; Radovan Lascsák)

Je známe, že v dôsledku rozpínania vesmíru sa od nás vzdalujú objekty všetkými smermi. Svedčí o tom posun ich spektrálnych čiar do červenej oblasti spektra. Jednou z výnimiek je galaxia M 31 v súhvezdí Androméda, ktorej spektrum je posunuté opačným smerom.

Napríklad spektrálnu čiaru  $H\alpha$ , s laboratórnou vlnovou dĺžkou  $\lambda_0 = 656,28 \text{ nm}$ , pozorujeme na vlnovej dĺžke  $\lambda = 655,62 \text{ nm}$ . Posun spektra do modrej oblasti znamená, že sa k nám galaxia M 31 približuje a vedci odhadujú, že sa s Mliečnou cestou zrazí za asi 4 miliardy rokov. Aktuálne sa M 31 nachádza vo vzdialenosti  $d_0 = 2,537 \text{ Mly}$  (miliónov svetelných rokov).



Obr. 1.1: Zdroj: Brody Wesner.

## Úlohy

- [10b] Vypočítajte červený posun  $z$  galaxie M 31.
- [15b] Vypočítajte rýchlosť  $v$ , ktorou sa k nám galaxia M 31 približuje.
- [10b] Vypočítajte rýchlosť  $v_H$ , akou by sa mala galaxia M 31 od nás vzdalovať podľa Hubblovho-Lemaîtreovho zákona. Porovnajte ju s rýchlosťou  $v$ . Ktorá z nich je väčšia?
- [25b] Na akej vlnovej dĺžke  $\lambda'$  by sme pozorovali spektrálnu čiaru  $H\alpha$ , ak by sa hypoteticky Hubblova konštanta náhle 10-násobne zväčšila?

(a) Červený posun vypočítame použitím jeho definície:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{655,62 \text{ nm} - 656,28 \text{ nm}}{656,28 \text{ nm}} \doteq \boxed{-0,00101}. \quad (1.1) \quad 10b$$

Červený posun je definovaný tak, že je kladný pre objekty, ktoré sa od nás vzdalujú a záporný pre tie, ktoré sa k nám približujú. Vidíme teda, že sa k nám M 31 približuje.

(b) Pre zistenie radiálnej rýchlosti vzdalovania, respektíve v našom prípade približovania, využijeme interpretáciu Dopplerovým vzťahom. Pre rýchlosť vzdalovania  $v_r$  dostaneme

$$v_r = cz = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \doteq -301 \text{ km s}^{-1}, \quad (1.2) \quad 10b$$

kde  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Rýchlosť vzdalovania  $v_r$  je taktiež záporná, čo znamená, že sa M 31 k nám približuje. Hľadaná rýchlosť približovania je preto  $v = -v_r$ , čiže

$$\boxed{v = 301 \text{ km s}^{-1}}. \quad (1.3) \quad 5b$$

(c) Hubblov-Lemaîtreov zákon je daný rovnicou

$$v_H = H_0 \cdot d_0, \quad (1.4) \quad 3b$$

kde  $H_0$  je Hubblova konštanta, ktorej hodnotu vieme nájsť v konštantovníku, a  $d_0$  je aktuálna vzdialenosť galaxie M 31, ktorá je zadaná v zadaní. Nakoľko sa Hubblova konštanta udáva v megaparsekoch (Mpc), tak potrebujeme premeniť jednotky vzdialenosti z Mly na Mpc. Pomôžu nám hodnoty ly a pc v konštantovníku:

$$d_0 = 2,537 \text{ Mly} = 2,537 \cdot \frac{1 \text{ ly}}{1 \text{ pc}} \text{ Mpc} = 2,537 \cdot \frac{9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}}{3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}} \text{ Mpc} \doteq 0,7778 \text{ Mpc}. \quad (1.5)$$

Po dosadení do Hubblovho-Lemaîtreovho zákona (1.4) dostávame

$$v_H = H_0 \cdot d_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \cdot 0,7778 \text{ Mpc} \doteq \boxed{54 \text{ km s}^{-1}}. \quad (1.6) \quad 7b$$

Vidíme, že rýchlosť  $v_H$  je menšia ako pozorovaná rýchlosť galaxie  $v$ .

(d) Označme  $v_G$  ako vlastnú rýchlosť galaxie M 31. Pre pozorovanú rýchlosť  $v$ , ktorou sa M 31 približuje, musí platiť  $v = v_G - v_H$ , nakoľko vlastná rýchlosť  $v_G$  a rýchlosť  $v_H$  spôsobená rozpínaním vesmíru smerujú presne opačným smerom. Rýchlosť  $v$  je kladná, pretože  $v_G > v_H$ . Po vyjadrení  $v_G$  a presnejšom určení výsledkov podzadaní (b) a (c) máme

$$v_G = 301,49 \text{ km s}^{-1} + 54,45 \text{ km s}^{-1} = 355,94 \text{ km s}^{-1}. \quad (1.7) \quad 5b$$

Zmena Hubblovej konštanty zmení výsledok  $v_H$  v podzadaní (c). Dostávame

$$v'_H = 10H_0 \cdot d_0 = 544,46 \text{ km s}^{-1}. \quad (1.8) \quad 5b$$

Pozorovanú rýchlosť  $v'$  určíme analogicky k  $v = v_G - v_H$ , teda

$$v' = v_G - v'_H = 355,94 \text{ km s}^{-1} - 544,46 \text{ km s}^{-1} = -188,52 \text{ km s}^{-1}. \quad (1.9) \quad 5b$$

Keďže nám rýchlosť približovania vychádza ako záporné číslo, tak to znamená, že sa M 31 od nás naopak vzdaluje. Rozpínanie vesmíru v tomto hypotetickom prípade prevládlo nad vlastnou rýchlosťou približovania galaxie M 31, a teda nikdy nedôjde k jej zrážke s Mliečnou cestou a vytvoreniu Milkdromédy.

Novú pozorovanú vlnovú dĺžku  $\lambda'$  spektrálnej čiary  $\text{H}\alpha$  určíme analogicky ako v (1.2). Platí

$$v'_r = c \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = c \left( \frac{\lambda'}{\lambda_0} - 1 \right), \quad (1.10) \quad 6b$$

kde  $v'_r$  je rýchlosť vzdalovania

$$v'_r = -v' = 188,52 \text{ km s}^{-1}. \quad (1.11) \quad 2b$$

Vyjadrením  $\lambda'$  z (1.10) dostávame

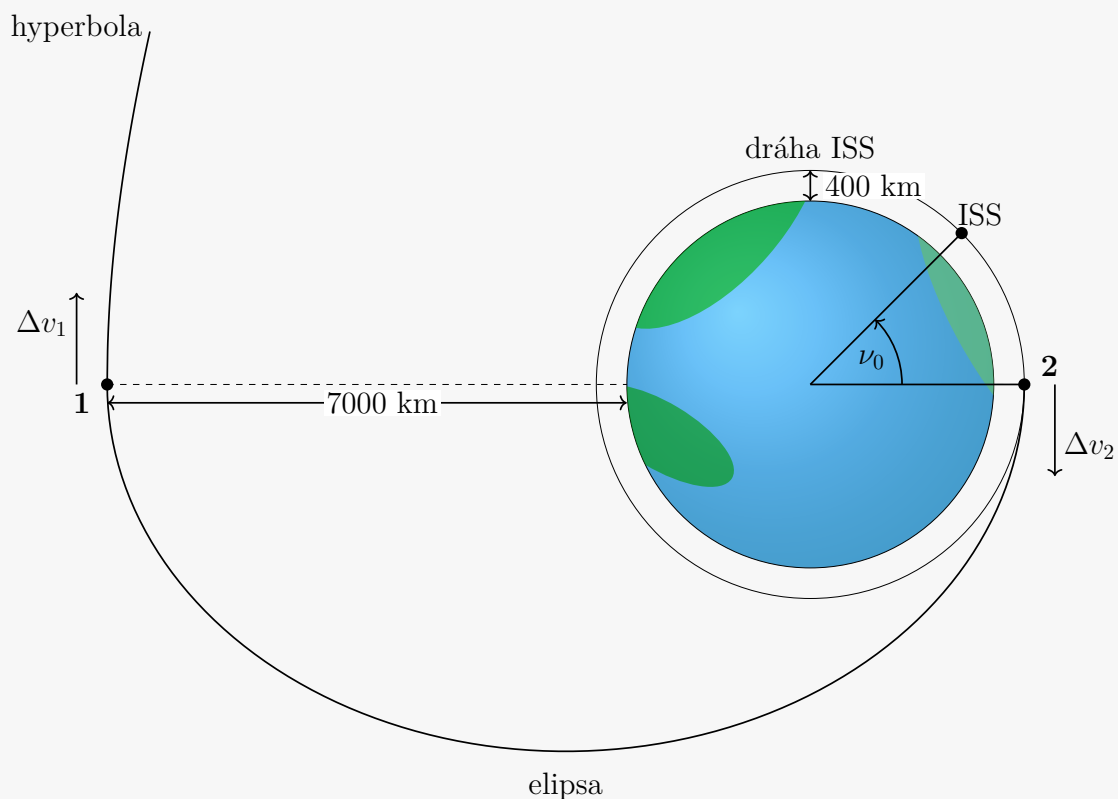
$$\lambda' = \lambda_0 \left( \frac{v'_r}{c} + 1 \right) \doteq \boxed{656,69 \text{ nm}}, \quad (1.12) \quad 2b$$

teda vlnovú dĺžku o čosi väčšiu ako  $\lambda_0$ .

## 2 Sonda pri ISS

(80b, autor: Michal Zimmer)

Vesmírna sonda s celkovou hmotnosťou 300 kg sa vracia z misie v hlbokom vesmíre k Zemi po hyperbolickej dráhe. Najbližšie sa dostane do výšky 7000 km nad povrch Zeme (bod **1** na obrázku 2.1), pričom bude mať v tomto mieste voči Zemi rýchlosť  $9 \text{ km s}^{-1}$ . V tomto bode v momente spomalí na eliptickú dráhu a následným opätovným zapálením rakiet v bode **2** sa presunie z eliptickej na kruhovú dráhu vo výške 400 km s použitím najmenšieho možného množstva energie. V tejto výške sa v rovnakej rovine nachádza na orbite aj Medzinárodná vesmírna stanica (ISS). Náčrt trajektórie sa nachádza na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Zachytenie sondy z hyperbolickej dráhy na kruhovú dráhu okolo Zeme. Sonda a ISS obiehajú v jednej rovine. Obrázok je iba ilustračný.

## Úlohy

(a) [30 b] Vypočítajte potrebnú  $\Delta v_1$  a  $\Delta v_2$  na spomalenie sondy v 2 manévroch.

(b) [20 b] Vypočítajte celkovú dĺžku manévru, teda čas letu z bodu **1** do bodu **2**.

V momente, kedy sa sonda na hyperbolickej dráhe dostala najbližšie k Zemi (bod **1**), má ISS súradnicu  $\nu_0$  znázornenú na obrázku 2.1. Sonda a ISS sa pohybujú v jednej rovine a obe obiehajú rovnakým smerom.

(c) [30 b] Určte, kde na svojej dráhe sa nachádza ISS vzhľadom na stred Zeme (teda vypočítajte jej súradnicu  $\nu_0$ ), ak požadujeme, aby sa sonda a ISS stretli v bode **2**.

- (a) Na to aby sonda použila najmenšie množstvo energie sa musí zmena energie odohrať v pericentre dráhy. Pericentrum hyperboly je vo výške  $h_1 = 7000$ , km kde sonda spomalí prvýkrát (bod **1**) na eliptickú dráhu a v polovici obehu elipsy sa dostane do pericentra eliptickej dráhy  $h_2 = 400$  km nad povrch Zeme, kde sonda spomalí druhýkrát (bod **2**) na kruhovú dráhu s výškou  $h_2 = 400$  km nad povrchom.

Pre rýchlosť na eliptickej dráhe platí rovnica Vis-viva

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (2.1) \quad 5b$$

kde  $\mu = GM_{\oplus}$  je gravitačný parameter,  $r$  je vzdialenosť primárneho ohniska elipsy a ľubovoľného miesta na dráhe a  $a$  je veľká polos, ktorú vieme určiť na základe geometrie orbity. Veľkú os elipsy ( $2a$ ) vieme určiť ako súčet  $2R_{\oplus}$ ,  $h_1$  a  $h_2$ . Preto

$$a = \frac{2R_{\oplus} + h_1 + h_2}{2}. \quad (2.2)$$

Pre rýchlosti v bodoch **1** a **2** platí z rovnice Vis-Viva

$$v_1 = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{R_{\oplus} + h_1} - \frac{2}{2R_{\oplus} + h_1 + h_2} \right)} \doteq 4,48 \text{ km s}^{-1}, \quad (2.3) \quad 5b$$

$$v_2 = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{R_{\oplus} + h_2} - \frac{2}{2R_{\oplus} + h_1 + h_2} \right)} \doteq 8,84 \text{ km s}^{-1}. \quad (2.4) \quad 5b$$

Pre kruhovú (prvú kozmickú) rýchlosť, ktorou obieha ISS vo výške  $h_2 = 400$  km platí

$$v_1(h_2) = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\oplus} + h_2}} \doteq 7,67 \text{ km s}^{-1}. \quad (2.5) \quad 5b$$

Na spomalenie sondy potrebujeme

5b

$$\Delta v_1 = 9 \text{ km s}^{-1} - 4,48 \text{ km s}^{-1} = \boxed{4,52 \text{ km s}^{-1}}, \quad (2.6)$$

$$\Delta v_2 = 8,84 \text{ km s}^{-1} - 7,67 \text{ km s}^{-1} = \boxed{1,17 \text{ km s}^{-1}}. \quad (2.7)$$

Celkovo pri dvoch brzdných manévroch potrebujeme  $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 5,69 \text{ km s}^{-1}$ .

5b

- (b) Pomocou tretieho Keplerovho zákona môžeme určiť periódu obehu sondy na eliptickej dráhe, ale aj periódu ISS na kruhovej dráhe. Uvažujeme, že hmotnosť sondy, respektíve ISS, je zanedbateľná voči hmotnosti Zeme. Tretí Keplerov zákon má teda tvar

$$\frac{a^3}{P^2} \approx \frac{\mu}{4\pi^2}. \quad (2.8) \quad 5b$$

Po dosadení veľkej polosi a vyjadrení

$$P_{\text{sonda, el.}} = \sqrt{\frac{\pi^2(2R_{\oplus} + h_1 + h_2)^3}{2\mu}} \doteq 168 \text{ min}. \quad (2.9) \quad 10b$$

Sonde potrvá polovicu periódy  $P_{\text{sonda, el.}}$ , čiže  $168 \text{ min}/2 = \boxed{84 \text{ minút}}$ , než sa dostane z hyperbolickej dráhy na kruhovú (z bodu **1** do bodu **2**), pretože ide o polovicu celej elipsy.

5b

- (c) Analogicky pomocou tretieho Keplerovho zákona určíme periódu obehu ISS na kruhovej dráhe vo výške  $h_2 = 400 \text{ km}$ .

$$P_{\text{ISS, cir.}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_{\oplus} + h_2)^3}{\mu}} \doteq 93 \text{ min}. \quad (2.10) \quad 15b$$

Túto periódu bude mať aj sonda po vstupe na kruhovú dráhu v bode **2**.

Celý obeh ISS trvá 93 minút a musíme určiť kde sa ISS nachádzala 84 minút pred tým ako je v bode **2**. Polohu ISS určíme v polárnych súradniciach (radiálna vzdialenosť  $r$  a uhol  $\nu$  od osi  $x$ ) s počiatkom v strede Zeme, osou  $x$  v smere k bodu **2** a súradnica  $\nu$  bude proti smeru hodinových ručičiek z pohľadu obrázka (2.1), teda v smere obehu ISS.

Uhol  $\nu$  obehne  $360^\circ$  za 93 minút a v bode **2** má ISS uhol  $\nu$  rovný  $0^\circ$ . Preto 84 minút pred tým ako bude ISS v bode **2**, bol jej uhol

$$\nu_0 = 360^\circ - \frac{84 \text{ min}}{93 \text{ min}} \cdot 360^\circ \doteq \boxed{35^\circ}. \quad (2.11) \quad 15b$$

Alternatívne môžeme písať, že poloha ISS vzhľadom na stred Zeme bola pri vstupe sondy na eliptickú trajektóriu

$$\mathbf{r}_0 = 6778 \text{ km} \begin{pmatrix} \cos \nu_0 \\ \sin \nu_0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

### 3 Neviditeľný

(60b, autor: Terézia Hanáková)

Terka dostala na domácom kole Astronomickej olympiády za úlohu pozorovať trpasličiu planétu Ceres, ktorá však nie je viditeľná voľným okom a ona nemá k dispozícii lepší ďalekohľad ako refraktor s ohniskovou vzdialenosťou 700 mm a priemerom objektívu 60 mm. Ceres má polomer dráhy 2,77 au, absolútnu magnitúdu 3,34 a albedo 0,1. Absolútnu magnitúdu telies v slnečnej sústave definujeme ako magnitúdu, ktorú by mali, ak by sme ich presunuli do vzdialenosti 1 au od Slnka a zároveň 1 au od Zeme.

- (a) [50b] Zistite, či sa Terke podarí uvidieť Ceres v ďalekohľade alebo sa má radšej pozrieť na teoretické úlohy. Uhlová vzdialenosť Ceresu a Slnka na oblohe pri pohľade zo Zeme (elongácia) je  $143,7^\circ$ . Uvažujte kruhové dráhy Ceresu aj Zeme, priemer Terkinej očnej pupily 8 mm a zanedbajte efekt fázy Ceresu.
- (b) [10b] Ak ste v prvom podzadaní určili, že Ceres uvidí, okomentujte prečo. Mohla by nastať situácia, kedy by aj napriek tomu Ceres nebolo vidieť? Ak vám vyšlo, že Ceres neuvidí, okomentujte prečo. Mohla by nastať situácia, kedy by aj napriek tomu za istých podmienok bol Ceres v jej ďalekohľade viditeľný?

- (a) Zo zadania vieme, že Ceres má absolútnu magnitúdu  $M = 3,34$  mag. Jeho zdanlivú magnitúdu  $m$  si môžeme vypočítať pomocou Pogsonovej rovnice

$$m - M = -2,5 \log \left( \frac{f_1}{f_2} \right), \quad (3.1) \quad 5b$$

kde  $f_1, f_2$  sú toky.

Tok  $f_1$  prislúchajúci zdanlivej magnitúde  $m$  závisí priamoúmerne na zbernej ploche  $S$  a nepriamoúmerne na druhej mocnine vzdialenosti  $d$  od Zeme. Okrem toho však obdobne závisí aj na druhej mocnine vzdialenosti  $r$  od Slnka, pretože Ceres nežiari vlastným svetlom, ale iba odráža to slnečné. Albedo  $A$ , alebo tiež miera odrazivosti, ktoré je pre Ceres rovné 0,1 znamená, že Ceres odrazí len 10% dopadajúceho svetla. Dostávame tak úmernosť

$$f_1 \propto \frac{A \cdot S}{r^2 \cdot d^2}, \quad (3.2)$$

kde symbol  $\propto$  značí rovnosť až na konštantu (priamu úmeru).

Táto úmernosť platí aj pre tok  $f_2$  prislúchajúci absolútnej magnitúde  $M$ , ak zmeníme hodnotu  $r$  a  $d$ . Ako je uvedené v zadaní, pre telesá slnečnej sústavy je táto absolútna magnitúda  $M$  definovaná ako magnitúda, ktorú by mal Ceres, ak by sme ho presunuli do vzdialenosti  $r = 1$  au od Slnka a zároveň  $d = 1$  au od Zeme. Albedo  $A$  a zberná plocha Ceresu  $S$  ostávajú rovnaké. Preto

$$f_2 \propto \frac{A \cdot S}{(1 \text{ au})^2 (1 \text{ au})^2}. \quad (3.3)$$

Pogsonova rovnica nám nadobudne tvar

$$m - M = -2,5 \log \left( \frac{\frac{AS}{r^2 d^2}}{\frac{AS}{(1 \text{ au})^2 (1 \text{ au})^2}} \right), \quad (3.4) \quad 10b$$

po úprave platí pre  $r$  a  $d$  v astronomických jednotkách

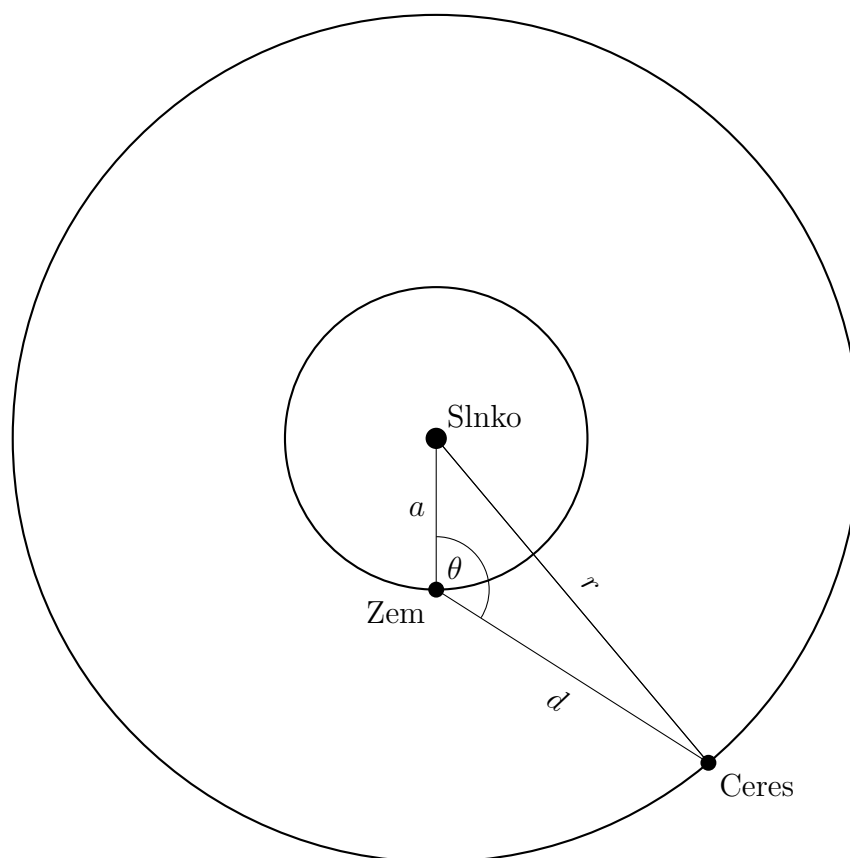
$$m - M = -2,5 \log \left( \frac{1}{r^2 d^2} \right), \quad (3.5)$$

$$m - M = -2,5 \log ((rd)^{-2}), \quad (3.6)$$

$$m - M = 5 \log(rd), \quad (3.7)$$

$$m = M + 5 \log(rd). \quad (3.8) \quad 3b$$

Dostali sme tak vzťah, do ktorého musíme už len dosadiť vzdialenosti  $r$  a  $d$ . Zo zadania vieme, že  $M = 3,34$  je absolútna magnitúda Ceresu a  $r = 2,77$  au je vzdialenosť Ceresu od Slnka. No vzdialenosť  $d$  Ceresu od Zeme v zadaní nemáme, preto si ju musíme určiť jednoduchou úvahou z obrázka 3.1.



Obr. 3.1: Náčrt polohy Ceresu.

Keďže uvažujeme kruhové dráhy, vieme si označiť uhlovú vzdialenosť Ceresu a Slnka, ktorú pozorujeme zo Zeme  $\theta = 143,7^\circ$ , vzdialenosť Ceresu a Slnka  $r = 2,77$  au a vzdialenosť Zeme od Slnka  $a = 1$  au. Z vyznačeného trojuholníka vieme určiť vzdialenosť  $d$  z kvadratickej rovnice, ktorú získame z kosínusovej vety pre tento trojuholník

$$r^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta, \quad (3.9)$$

$$0 = d^2 + (-2a \cos \theta)d + (a^2 - r^2), \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow d_{1,2} = \frac{2a \cos \theta \pm \sqrt{(-2a \cos \theta)^2 - 4(a^2 - r^2)}}{2}. \quad (3.11)$$

Po dosadení hodnôt dostávame dva výsledky  $d_1 = 1,90$  au a  $d_2 = -3,51$  au. Druhý výsledok nedáva zmysel, pretože vzdialenosť môže byť jedine kladná, takže náš výsledok je  $d = 1,90$  au. Máme tak hodnotu  $d$ , ktorú môžeme dosadiť do vzťahu (3.8). Dostávame tak výsledok

$$\boxed{m = 6,95 \text{ mag}}. \quad (3.12) \quad 2b$$

Vidíme, že táto hodnota je väčšia (teda Ceres je menej jasný) ako 6 mag, čo je limitná magnitúda objektov, ktoré môžeme pozorovať priamo len očami. Samozrejme, táto hodnota závisí na podmienkach pri pozorovaní a líši sa človek od človeka, no v zrovnaní s magnitúdou Ceresu môžeme predpokladať, že Ceres za väčšiny podmienok neuvidíme.

Posledným krokom je teraz vypočítať, akú limitnú magnitúdu môžeme pozorovať s naším ďalekohľadom a následne tieto dve magnitúdy porovnáme. Zadefinujme si  $m'$  ako zdanlivú magnitúdu Ceresu v ďalekohľade a  $m$  nech zostane zdanlivou magnitúdou Ceresu, ktorú sme už vypočítali. Dostávame novú Pogsonovu rovnicu

$$m' - m = -2,5 \log \left( \frac{P'}{P_o} \right), \quad (3.13) \quad 5b$$

kde  $P_o$  je výkon, ktorý dopadá do oka a  $P'$  je výkon, ktorý koncentruje ďalekohľad do oka. Oba tieto výkony sú priamoúmerné zbernej ploche oka, resp. objektívu, čiže  $P \propto S$ . Oko aj objektív sú kruhové, preto zberná plocha oka  $S_o = \pi r_o^2$ , kde  $r_o = 4$  mm je polomer očnej pupily a  $S' = \pi r'^2$ , kde  $r' = 30$  mm je polomer objektívu Terkinho ďalekohľadu.

Výkony  $P, P'$  dosadme do Pogsonovej rovnice

$$m' - m = -2,5 \log \left( \frac{\pi r'^2}{\pi r_o^2} \right), \quad (3.14) \quad 10b$$

$$m' - m = -2,5 \log \left( \left( \frac{r'}{r_o} \right)^2 \right), \quad (3.15)$$

$$m' = m - 5 \log \left( \frac{r'}{r_o} \right). \quad (3.16)$$

Ak dosadíme za  $r_0$  a  $r'$ , vyjde nám  $m' = 2,57 \text{ mag}$ .

2b

Porovnaním vidíme, že  $m' < m$ , čiže magnitúda, ktorú vidíme v ďalekohľade je menšia ako magnitúda, ktorú má Ceres. To je aj očakávané, nakoľko v ďalekohľade vidíme všetky objekty jasnejšie, ako pri pozorovaní voľným okom. Navyše  $m' < 6 \text{ mag}$ , tým pádom správnou odpoveďou je, že Terka Ceres v ďalekohľade uvidí.

3b

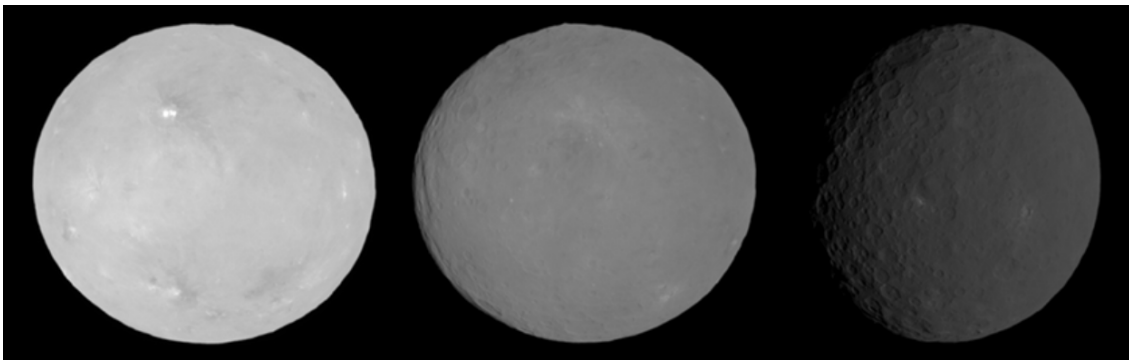
Treba však podotknúť, že to, že Ceres v ďalekohľade uvidí, ešte neznamená, že ho uvidí vo vysokej kvalite. Vzdialené či malé objekty sa v amatérskych ďalekohľadoch javia iba ako bodové zdroje svetla.

- (b) Správnou odpoveďou prvého podzadania bola možnosť, že Terka Ceres uvidí. Dôvodom je práve limitná magnitúda 6 mag, ktorú môže ľudské oko ešte vidieť a keďže nám vyšlo, že Ceres pozorujeme v ďalekohľade s magnitúdou 2,57 mag, tak vieme s istotou povedať, že Ceres bude dostatočne jasný, aby sme ho v ďalekohľade mohli pozorovať.

Pozorovanie takto slabých objektov nám často sťažujú podmienky ako sú počasie, svetelné znečistenie, atmosférické podmienky, kvalita ďalekohľadu alebo sa nám môžu horšie pozorovať objekty blízko obzoru (kvôli hrubšej vrstve atmosféry nastáva absorpcia a rozptyl svetla).

5b

Taktiež, Ceres pozorujeme pod istým fázovým uhlom, čo znamená, že zo Zeme nevidíme jeho disk plne osvetlený – časť povrchu privráteného k nám zostáva v tieni. Navyše nerovnosti na povrchu Ceresu spôsobujú dodatočné stemnenie, ktoré môže viesť k pomerne výraznej zmene magnitúdy. Pre zadaný uhol elongácie  $\theta = 143,7^\circ$  klesne tok na asi 30 %, čo odpovedá nárastu magnitúdy o  $-2,5 \log(0,3) \doteq 1,3$ . Pokles jasnosti Ceresu demonštruje obrázok 3.2.



Obr. 3.2: Fotografie Ceresu pre elongáciu  $180^\circ$  (vľavo),  $173^\circ$  (v strede) a  $147^\circ$  (vpravo) vykonané s rovnakými nastaveniami fotoaparátu. Zdroj: NASA/JPL.

Druhá ponúkaná možnosť nebola správna, no za istých podmienok by sme mohli teoreticky Ceres nejakým spôsobom vidieť aj „na vlastné oči“. Takými podmienkami by mohli byť dokonale tmavá obloha (stupeň 1 alebo 2 v Bortlovej stupnici miery svetelného znečistenia), úžasný seeing, výnimočná adaptácia očí na tmú a perfektný zrak. V realite sa však takéto podmienky takmer nikdy nenaskytajú, a tak sa Ceres stáva naším očiam neviditeľný.

5b

## 4 Hypatia z Alexandrie

(100b, autor: Terézia Hanáková)

Hypatia z Alexandrie, novoplatónska filozofka, matematicka a astronómka, žijúca na prelome 4. a 5. storočia, sa významne zaslúžila o rozvoj vedy a šírenie vzdelania v starovekom Grécku. Jej najvýznamnejším počinom v astronómii bolo komentovanie a úprava Ptolemaiovho diela *Almagest*, ako aj práca s astroláбом a mapovanie nebeských objektov s jeho pomocou.

Predstavte si, že ste žiakom Hypatie z Alexandrie a spoločne spracovávate tabuľky pohybov nebeských objektov, ktoré iní jej žiaci namerali astroláбом. Stala sa však nešťastná udalosť! Tri zvitky sa pomiešali, a tak dostávate za úlohu zistiť, ktorý zvitok patrí ktorému nebeskému telesu. Viete, že to má byť Slnko, Mesiac a blúdiaca planéta Venúša, v starovekom Grécku nazývaná po bohyni Afrodite.

V tabuľke 4.1 je prepis toho, čo ste vyčítali zo zvitku. Sú to hodnoty ekliptikálnych dĺžok troch objektov z pozorovaní astroláбом. V niektorých dňoch nemohlo nastať pozorovanie kvôli nepriaznivým podmienkam alebo bol zvitok na niektorých miestach poškodený. Pozorovania sa uskutočňovali v daný deň vždy v rovnakú hodinu.

Tabuľka 4.1: Hodnoty ekliptikálnych dĺžok troch nebeských objektov.

poradové číslo pozorovania v dňoch	ekliptikálna dĺžka		
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0	261°	2°	244°
2	263°	26°	244°
9	270°	118°	242°
13	274°	175°	243°
20	281°	271°	244°
26	287°	346°	247°
31	292°	46°	250°
40	301°	171°	257°
44	306°	228°	260°
50	312°	306°	265°

### Úlohy

- [40b] Na milimetrový papier ručne vynesť grafy závislosti ekliptikálnej dĺžky na čase pre dané tri objekty.
- [10b] Všetky grafy, ktoré vykazujú jasnú lineárnu závislosť, preložte ručne pomocou pravítka čo najvhodnejšou priamkou alebo dvojicou priamok. Jeden objekt priamkou (priamkami) preložiť nepôjde.
- [20b] Určte smernice preložených priamok. Smernica je koeficient  $A$  v rovnici priamky  $y = Ax + B$ . Viete ju zistiť buď pomocou priameho odčítania z grafu, alebo pomocou štatistického módu na kalkulačke. Chybu nájdenej smernice určovať nemusíte.
- [30b] Na základe dát a určených smerníc pomôžte Hypatii zistiť, ktorý objekt je ktorý. Komentujte svoj postup a rozhodnutie.

Ak si nie ste istí, ako postupovať pri podobnom type úloh, odporúčame pozrieť sa na odkaz [www.datova-analyza.aosk.eu](http://www.datova-analyza.aosk.eu) či do materiálu Astronomickej olympiády o Dátovej analýze, ktorú viete nájsť na našej stránke [www.aosk.sk/materialy](http://www.aosk.sk/materialy). Dátové analýzy so vzorovými riešeniami z minulých rokov taktiež nájdete na stránke Astronomickej olympiády na odkaze [www.aosk.sk/archiv-uloh](http://www.aosk.sk/archiv-uloh).

- (a) V tejto úlohe nemusíme spraviť nič iné, ako vziať hodnoty z tabuľky 4.1 a načrtnúť ich na milimetrový papier. Máme spraviť graf závislosti ekliptikálnej dĺžky na čase, čo znamená, že na vodorovnú os budeme nanášať časy pozorovania a na zvislú os hodnoty ekliptikálnej dĺžky (túto os nazveme  $\lambda$ , pretože veličina ekliptikálna dĺžka sa zvyčajne takto označuje).

Ako prvé je vhodné si určiť rozpätie, na akom budeme nanášať hodnoty. To je potrebné na to, aby sa nám nestalo to, že sa niektoré hodnoty nezmestia na graf. Z tabuliek 4.1 vidíme, že najmenšia hodnota ekliptikálnej dĺžky sú  $2^\circ$  a najväčšia  $346^\circ$ . Čiže zvislá os bude v rozmedzí  $\langle 0^\circ, 350^\circ \rangle$ . Obdobne pre vodorovnú os vidíme, že je v rozmedzí  $\langle 0 \text{ dní}, 50 \text{ dní} \rangle$ . 5b

Ďalej je potrebné určiť mierku osí. Použili sme štandardný milimetrový papier, zobrazený na obrázku 4.1. Aby sme využili čo najviac z grafovacej plochy, tak sme pre zvislý smer zvolili mierku jeden dielik =  $20^\circ$  a pre vodorovný smer jeden dielik = 2 dni. 5b

Pri vynášaní hodnôt do grafu treba postupovať čo najpresnejšie a nepomýliť sa, lebo inak by nám to negatívne ovplyvnilo výsledky ďalších podzadaní. Hodnoty zo všetkých troch stĺpcov tabuľky 4.1 sme pre názornosť nakreslili do jednotného grafu 4.1, no nebolo by chybou ich pre prehľadnosť nanášať aj na tri rozdielne milimetrové papiere. 30b

- (b) Teraz sme všetky naše tri grafy preložili vhodnou krivkou. Vidíme, že pre objekt 1 a 2 to nebolo problematické, lebo sme ich grafy prekladali jednoducho priamkou pre objekt 1 a dvomi priamkami pre objekt 2. To sa robí takpovediac od oka – treba si priložiť pravítko k nameraným hodnotám a čo najpresnejšie sa pokúsiť spraviť priamku tak, aby každý bod bol čo najbližšie k nej. Matematicky sa tento postup nazýva metóda najmenších štvorcov, alebo tiež lineárna regresia. 5b

Pre objekt 3 sme však tento postup aplikovať nemohli, pretože body očividne neležia na priamke – závislosť ekliptikálnej dĺžky  $\lambda$  na čase  $t$  sa správa podivne – ekliptikálna dĺžka najprv jemne klesá a potom zrazu začne narastať. O správaní tohto objektu sa pozrieme bližšie vo štvrtom podzadaní. Tento graf sme prekladať krivkou nemuseli. 5b

- (c) Je dôležité nielen nakresliť danú priamku, ale aj určiť jej predpis – rovnicu, ktorá ju popisuje. Takýmto spôsobom vedci prichádzajú na závislosti medzi veličinami z pozorovaní či experimentov a vedia im potom priradiť presne určený vzorec. Na určenie rovnice priamky vo všeobecnom tvare

$$y = Ax + B \quad (4.1)$$

si musíme rozmyslieť, čo sme vlastne vynášali do grafu. Bola to závislosť ekliptikálnej dĺžky  $\lambda$  na čase  $t$ . Ako aj máme vyznačené v grafoch, tak zvislá os, všeobecne označovaná ako os  $y$ , zobrazuje ekliptikálne dĺžky  $\lambda$  a vodorovná os, označovaná ako os  $x$ , zodpovedá poradovým číslam pozorovania v dňoch, čiže časovým úsekom  $t$ .

Rovnica priamky nám tým pádom prejde na tvar

$$\lambda = At + B. \quad (4.2) \quad 2b$$

Písmená A a B značia konštanty, ktoré v tejto úlohe máme zistiť: A je sklon danej priamky (smernica) a B posunutie na zvislej osi. Najideálnejšie je ich zistiť pomocou kalkulačky. Tá má totiž v sebe už priamo zabudovaný štatistický mód, v ktorom si vieme vybrať rovnicu priamky ako náš fit a následne do tabuľky, ktorá sa zobrazí, nahádzať hodnoty  $\lambda$  a  $t$ . Kalkulačka sama zvládne vyčísliť hodnoty A a B, a teda určiť výslednú rovnicu priamky.

Pri objekte 2 si však musíme dávať pozor, pretože ten je rozdelený na dve krivky. My však chceme predpis pre jednu priamku. Preto si musíme predstaviť, že v bode, kedy sa z  $360^\circ$  stáva  $0^\circ$  priamka pokračuje a od siedmej hodnoty v tabuľke 4.1 sa k hodnotám ekliptikálnych dĺžok pripočítava  $360^\circ$ .

Dostávame tak rovnice priamok pre objekt 1 a objekt 2 ako

$$\lambda_1 = 1,02 \cdot t + 260,8, \quad (4.3)$$

$$\lambda_2 = 13,3 \cdot t + 0,4. \quad (4.4)$$

Čiže nám smernice daných telies vyšli ako  $A_1 = 1,02$  a  $A_2 = 13,3$ . 18b

Ak by sme túto úlohu riešili bez kalkulačky, nedáva veľký zmysel riešiť ju pre všetky hodnoty  $\lambda$  a  $t$ , pretože by to bolo príliš komplikované a zdĺhavé. Rozumnejšie je si zobrať nejaké dva body na našej priamke a následne vypočítať smernicu A ako

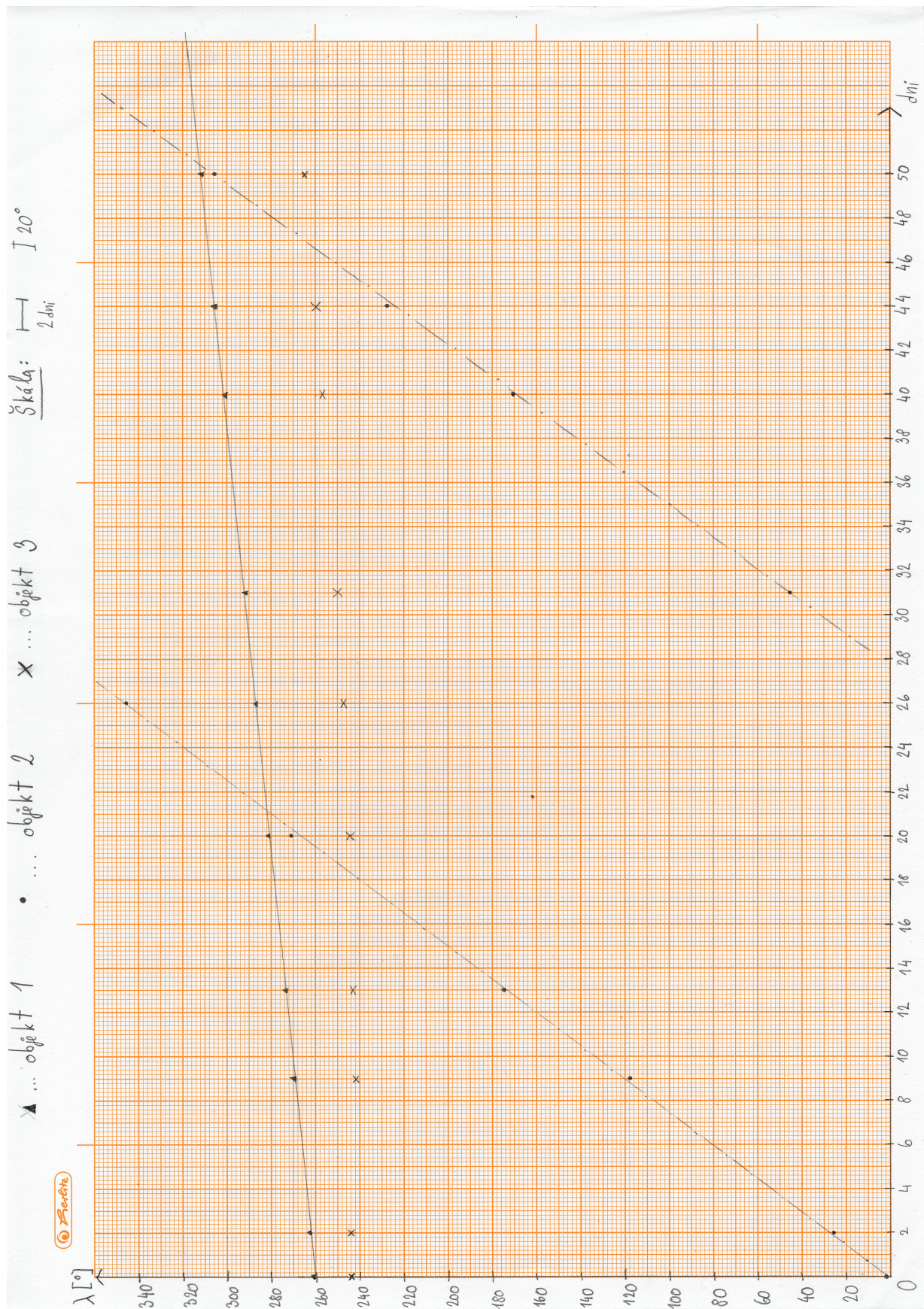
$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.5)$$

Spravidla sa vyberajú body, ktoré sa nachádzajú na začiatku a konci grafu priamky, čiže by sme si pre objekt 1 mohli zvoliť bod  $[x_1, y_1] = [10 \text{ dní}, 270^\circ]$  a bod  $[x_2, y_2] = [46 \text{ dní}, 308^\circ]$ , ktoré na odčítanie z grafu vyzerajú najpriateľnejšie. Po vyčíslení dostávame, že  $A_1 \doteq 1$ . alt.:

Pre objekt 2 máme body  $[x_1, y_1] = [15 \text{ dní}, 200^\circ]$  a  $[x_2, y_2] = [46 \text{ dní}, 250^\circ + 360^\circ = 610^\circ]$ , čím nám obdobným postupom vyšla hodnota smernice  $A_2 \doteq 13$ . 18b

Vidíme, že tieto rovnice priamok vychádzajú podobne ako pri prvom postupe, no menej presne. Hoci nám hodnoty A a B vyšli na viac desatinných miest, kvôli veľkej nepresnosti si nemôžeme dovoliť v tomto postupe vyjadriť náš výsledok na viac ako celé číslo. Existuje tu totiž veľká chyba, pretože ak by sme priamku nakreslili len o trochu ináč, vyšiel by nám iný výsledok. Tento postup preto nebol nesprávny, no bolo by hrubou chybou napísať hodnoty A a B príliš presne (na viac ako 2 platné cifry). V praxi platí, že čím viac nameraných dát máme, tým lepšie, pretože tým vieme lepšie preložiť dané dáta teoretickou závislosťou. Preto je lepšie použiť kalkulačku a metódu lineárnej regresie zo všetkých nameraných hodnôt.

Pre objekt 3 tento postup uplatniť nejde, a tak sa vyjadrením závislosti ekliptikálnej dĺžky na čase pre tento objekt nemusíme zaoberať. Až v ďalšom podzadaní okomentujeme, prečo je tento objekt taký špeciálny.



Obr. 4.1: Ručné vynesenie hodnôt z tabuľky 4.1 na milimetrový papier a ich fitovanie.

- (d) Zo zadanie vieme, že dané závislosti by mali odpovedať Slnku, Mesiacu a Venuši. Ako však priradiť tieto telesá slnečnej sústavy k neznámym objektom 1, 2 a 3?

Začnime objektom 3, ktorý bol tak rozdielny ako ostatné dva prípady. Prečo bol odlišný? Nuž, vidíme, že jeho závislosť nebola ani zďaleka lineárna. Zo začiatku sa jeho ekliptikálne dĺžky zmenšovali a následne opäť zväčšovali. Ekliptikálna dĺžka zodpovedá pohybu telesa pozdĺž ekliptiky. Toto zvláštne správanie objektu 3, kedy sa začal na oblohe doslova pohybovať opačným smerom, nemohlo byť nič iné ako retrográdny pohyb. A ten, ako vieme, je z geometrických dôvodov daný len planétam. Vďaka tomuto argumentu vieme s istotou povedať, že zvláštnym objektom 3 bola planéta Venuša.

10b

Pre objekty 1 a 2 vyšla ako krivka priamka s vyššie vypočítanými predpismi. Z ostávajúcich telies si musíme vybrať, v ktorom prípade sa jedná o Mesiac a v ktorom o Slnko. Jednou zo zvláštností, ktoré sme si mohli všimnúť pri objekte 2 je to, že v istú dobu prekročí hranicu ekliptikálnej dĺžky  $360^\circ$ , a to práve po niečo vyše 26 dňoch. Opäť, ekliptikálna dĺžka meria uhlovú vzdialenosť objektu pozdĺž roviny ekliptiky, takže sa pýtame, ktoré vesmírne teleso vykoná za niečo vyše 26 dní jednu otočku okolo Zeme? To nám hneď implikuje siderickú dobu obehu Mesiaca okolo Zeme, ktorá je rovná 27,32 dní. Tým pádom vieme povedať, že objektom 2 je Mesiac a vylučovacou metódou je zvyšný objekt 1 Slnko.

2 × 10b

Ak by sme sa však ešte pozreli na sklon v grafoch objektu 1 a 2, všimli by sme si, že objekt 2 má omnoho väčší sklon priamky ako objekt 1, čo znamená, že ekliptikálna dĺžka pre objekt 2 rastie s časom rýchlejšie ako pre objekt 1. Opäť-opäť, ak ekliptikálnu dĺžku berieme ako uhlovú vzdialenosť objektu pozdĺž roviny ekliptiky, tak ktoré teleso sa pohybuje pozdĺž ekliptiky rýchlejšie? Mesiac alebo Slnko? Rozhodne Mesiac, pretože sa nachádza bližšie k Zemi a jeho obežná doba (siderická) je omnoho menšia ako jeden celý rok. Zdanlivý pohyb Slnka po ekliptike totiž odráža skutočný pohyb Zeme okolo Slnka. Keďže Zemi trvá celý rok, kým dokončí svoj obeh, jeho uhlová rýchlosť je veľmi pomalá (necelý  $1^\circ$  za deň). Dostávame tak, že objekt 1 je Slnko, objekt 2 je Mesiac a objekt 3 je Venuša.

Pre Slnko a Mesiac vieme napísať lineárne rovnice pre ekliptikálnu dĺžku v závislosti na čase

$$\lambda_{\odot} = 1,02 \cdot t + 260,8, \quad (4.6)$$

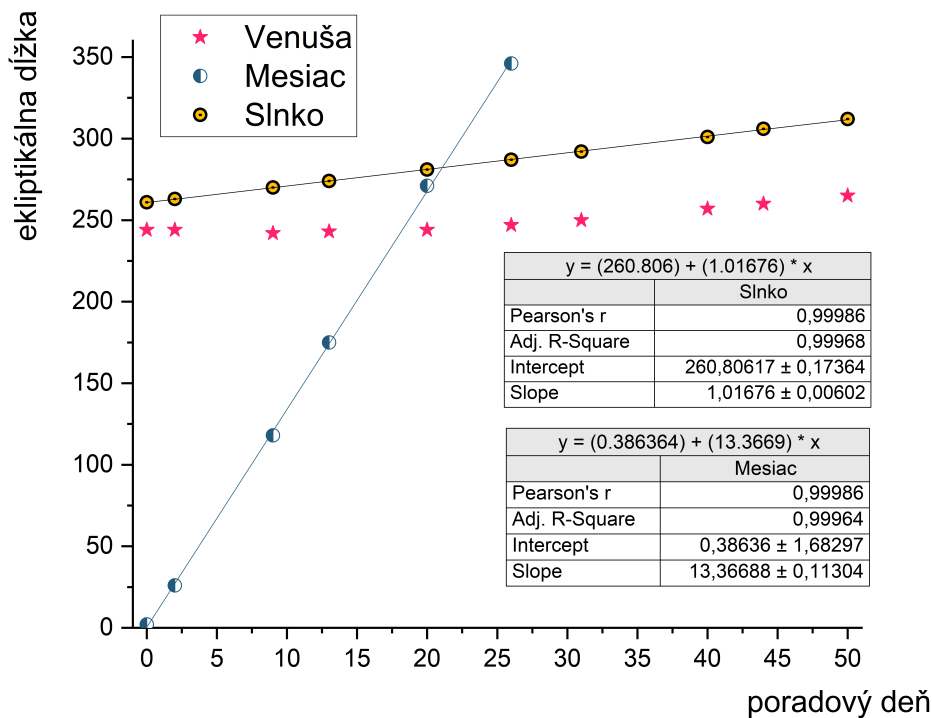
$$\lambda_{\zeta} = 13,3 \cdot t + 0,4. \quad (4.7)$$

Na porovnanie prikladáme aj fit zo softvéru Origin (vedecká alternatíva excelu). Origin má oproti bežnej kalkulačke vyššiu presnosť, používa zložitejšie algoritmy na výpočet (napríklad dokáže vážiť hodnoty podľa ich chýb – odchýlok v meraní) a vie určiť aj chybu fitovaných koeficientov, konkrétne

$$\lambda_{\odot} = (1,02 \pm 0,01)t + (260,8 \pm 0,2), \quad (4.8)$$

$$\lambda_{\zeta} = (13,3 \pm 0,1)t + (0,4 \pm 1,7). \quad (4.9)$$

Najpresnejší je Origin, potom kalkulačka a nakoniec staré dobré ručné odčítanie z grafu.



Obr. 4.2: Grafy závislostí ekliptikálnej dĺžky na čase v dňoch pre Slnko, Mesiac a Venušu preložené lineárnymi závislosťami v prípade Slnka a Mesiaca. Graf a fity na ňom boli vytvorené v programe Origin.

## 5 Bludný Holanďan

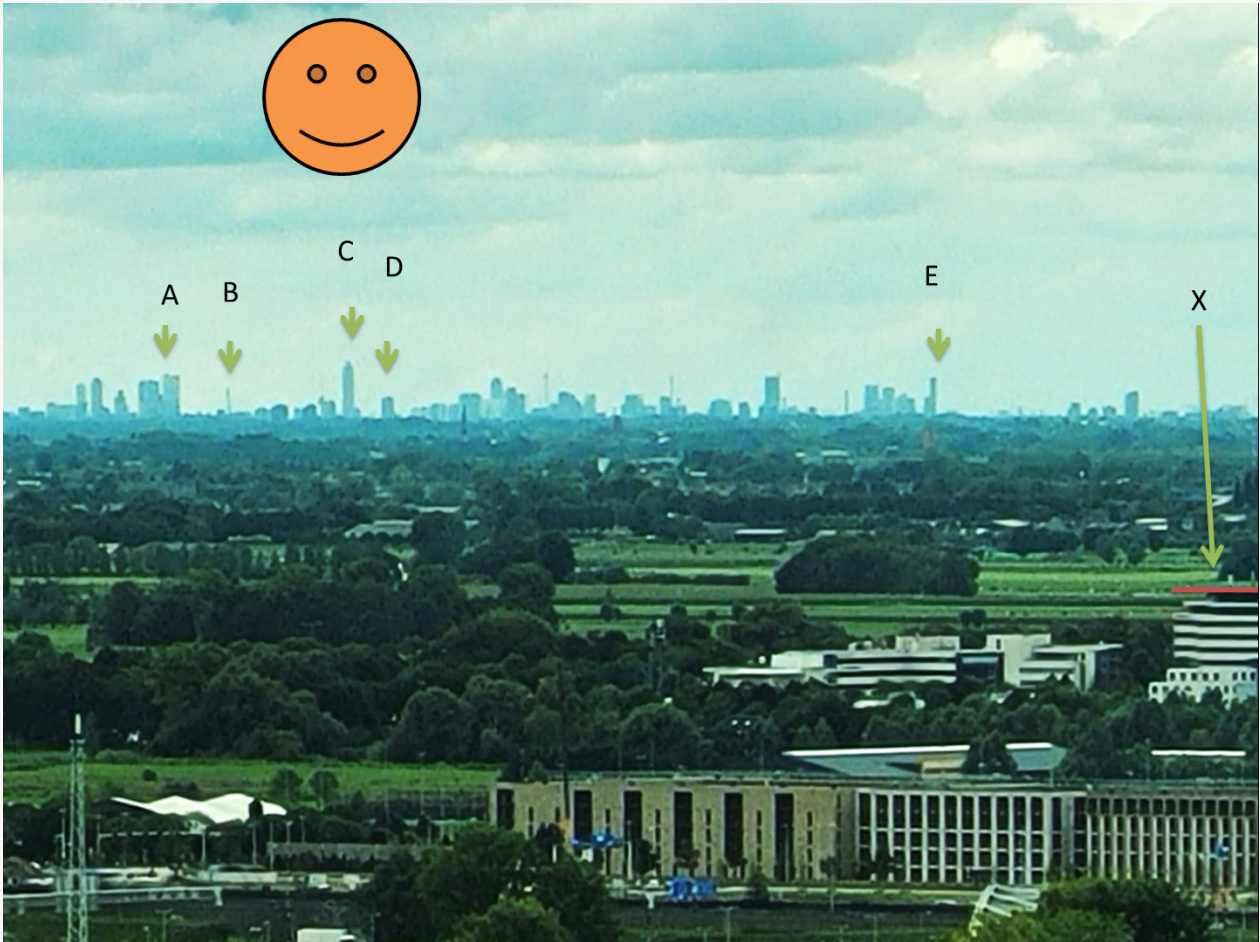
(100b, autor: Martin Okánik)

V tejto úlohe využijete astronómiu a jednoduchú geometriu na záchranu ľudského života. Autor úlohy uviazol v neznámej budove v neznámom meste na Zemi. Kontakt s ním ste stratili popoludní 22. 8. 2025, keď vám poslal správu „Goededag, ik ben in een groot probleem in mijn werk. SOS“ a priloženú fotku (obrázok 5.1). Podarí sa vám ho na základe tejto fotky nájsť, kým bude príliš neskoro... a dôjde mu zásoba *stroopwafels*?

Po príchode do vášho tajného laboratória vám váš forenzný expert ťažko vysvetliteľným hollywoodskym spôsobom priblížil fotku (obrázok 5.1) v nezmenenej kvalite. Vidíte na nej v diaľke panorámu centra mesta Rotterdam. Na obrázku je vyznačených 5 budov, ktoré váš forenzný expert identifikoval ako:

- Budova A: Maastoren, 165 m.
- Budova B: Erazmusbrug, 139 m.
- Budova C: De Zalmhaven, 215 m.
- Budova D: De Hoge Heren, 102 m.
- Budova E: Deelftse Poort, 151 m.

Navyše je na obrázku zaznačená budova X vo vzdialenosti 4370 metrov od pozorovateľa, ktorej strecha (vo výške 42 metrov nad zemou) je zaznačená červenou čiarou. Autor úlohy, uviaznutý v budove, si tieto údaje o budove X len náhodou pamätal a poslal vám ich. Oranžový smajlík nad budovou C je Slnko v reálnej uhlovej veľkosti, v akej by bolo v tomto čase viditeľné na fotografii, iba je presunuté zo svojej skutočnej uhlovej výšky  $32,1^\circ$  nad horizontom podstatne bližšie k horizontu. Jeho azimut je nezmenený.



Obr. 5.1: Panoráma mesta Rotterdam s vyznačenými budovami a posunutým Slnkom.

## Úlohy

- [50 b] Čo najpresnejšie určte súradnice uviaznutého autora úlohy. Z akého konkrétneho mesta bola vyhotovená snímka?
- [30 b] Z akej výšky nad (plochou) holandskou zemou bola urobená snímka? Podporte nákresom a výpočtom.
- [20 b] Určte pravý slnečný čas a občiansky pásmový čas vyhotovenia fotografie. Pamätajte na poznámku o skutočnej výške Slnka. Smelo použite Stellarium alebo podobný astronomický softvér.

**Bonusová úloha:** Dobrovoľne sa môžete pokúsiť z informácií, ktoré ste zistili v tejto úlohe (a vašej detektívnej práce), presne určiť budovu a poschodie, z ktorého bola snímka vyhotovená. Za túto podúlohu neudelujeme body, ale autor najlepšieho riešenia dostane na regionálnom kole suvenírový balík holandských vafiel *stroopwafels* ako cenu od autora príkladu.

**Poznámka k riešeniam:** Toto je pomerne netradičná úloha. Vo vašom riešení smiete použiť všetky informácie, ktoré nájdete na internete, keďže v zadaní nenájdete všetky potrebné informácie. Odporúčame aj 3D funkcionality v Google Earth na zorientovanie sa v priestore.

- (a) Presné geografické súradnice budov A, B, C, D a E vieme zistiť z internetu<sup>1</sup> alebo ich vyčítame z Google Earth. Na určenie polohy pozorovateľa vzhľadom na tieto budovy musíme poznať ich azimut a vzdialenosť. Azimut Slnka (a teda zároveň približne aj budovy C) vieme určiť zo Stellária ako  $245^\circ$ , čo približne zodpovedá juhozápadu. Určenie vzdialenosti je zložitejšie. 7b  
Ukážme si dve možnosti.

i. **Z výšky budov** (rýchly a hrubý spôsob, nižší počet bodov).

- V Google Earth si overíme, že budovy C a D, tvoriace najbližší pár a zároveň majúce najväčší rozdiel výšok, sú skutočne veľmi blízko seba (špecificky v radiálnom smere). 3b
- Na obrázku odmeriame v milimetroch vzdialenosť zodpovedajúcu ich rozdielu výšok (113 m) a porovnáme s veľkosťou v milimetroch zodpovedajúcou uhlovej veľkosti Slnka získanej zo Stellária ( $0,527^\circ$ ). 4b
- Odmeraná vzdialenosť zodpovedá asi  $23\% \pm 2\%$  veľkosti slnečného disku, teda asi  $0,120^\circ \pm 0,011^\circ$  alebo  $(2,1 \pm 0,2)$  miliradiánu. Chybu 10% sme v tomto prípade stanovili ako hrubý odhad. 3b
- Vzdialenosť pozorovateľa  $L$  už vieme z uhla v radiánoch a vzdialenosti určiť jednoducho:

$$L = \frac{113 \text{ m}}{0,0021 \text{ rad}} = 53\,800 \text{ m}. \quad (5.1) \quad 4b$$

. Pamätajúc na relatívnu chybu okolo 10% môžeme uzavrieť  $L = (54 \pm 5) \text{ km}$ .

ii. **Z polohy budov** (trochu zložitejší a potenciálne presnejší spôsob). alt. : b

- V Google Earth si nájdeme najvzdialenejšie budovy A a E, nakreslíme funkciu pravítka ich spojnicu a odčítame jej dĺžku ako 2300 metrov a azimut  $320^\circ$ , prípadne  $140^\circ$ , v závislosti od orientácie. 4b
- Vieme, že azimut Slnka od pozorovateľa je  $245^\circ$ , teda pozorovateľ má od budovy C azimut  $245^\circ - 180^\circ = 65^\circ$ . Spojnica budov A a E preto zvierá voči pohľadu pozorovateľa uhol  $140^\circ - 65^\circ = 75^\circ$ . 4b

<sup>1</sup>Napríklad z [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_tallest\\_buildings\\_in\\_Rotterdam](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_tallest_buildings_in_Rotterdam).

- Z obrázku tiež vidíme, že rozostup medzi budovami A až E je menej než  $3^\circ$  (cca 5-6 slnečných diskov), teda z nášho pohľadu je dostatočne malý na to, aby sme si nemuseli lámať hlavu s perspektívou (ktorá budova je k nám bližšie, atď.). 3b
- Projekcia vzdialenosti spojnice A – E je fyzická vzdialenosť vynásobená  $\cos 75^\circ$ , čiže 2120 metrov. 4b
- Po presnejšom odmeraní je uhlová vzdialenosť medzi A a E rovná  $2,56^\circ = 0,0447 \text{ rad}$ . 4b
- Vzdialenosť je preto

$$L = \frac{2300 \text{ m} \cdot \cos 75^\circ}{0,0447 \text{ rad}} = 47\,400 \text{ m}. \quad (5.2) \quad 4b$$

Po pozretí na mapu zistíme že v tomto azimute a vzdialenosti leží práve centrum mesta Utrecht. 3b

Výsledok druhej metódy je veľmi presný, vzdialenosť k skutočnému miestu pozorovateľa od budovy C je  $L = 47,4 \text{ km}$ . 5b

Vypočítajme ešte súradnice. Za základňu určíme budovu C (De Zalmhaven) so súradnicami  $\Phi_C = 51,9103^\circ \text{ N}$  a  $\lambda_C = 4,4808^\circ \text{ E}$ . Polomer Zeme berieme ako  $R = 6378 \text{ km}$  a azimut Bludného Holanďana ako  $A = 65^\circ$ . Súradnice Bludného Holanďana sú

$$\Phi_{\text{BH}} = \Phi_C + \frac{L \cdot \sin(90^\circ - A)}{R} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 51,9103^\circ \text{ N} + 0,1800^\circ \text{ N} = 52,0903^\circ \text{ N}, \quad (5.3) \quad 5b$$

a

$$\lambda_{\text{BH}} = \lambda_C + \frac{L \cdot \cos(90^\circ - A)}{R \cos \Phi_C} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 4,4808^\circ \text{ E} + 0,6264^\circ \text{ E} = 5,1072^\circ \text{ E}. \quad (5.4) \quad 7b$$

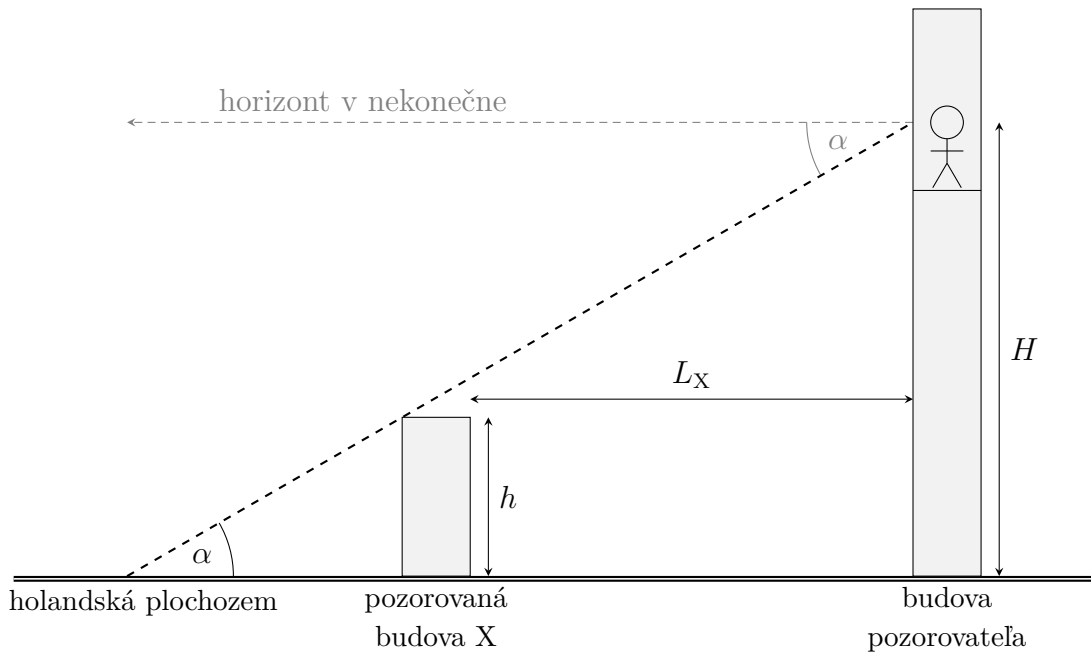
Všimnite si, že sme Zem aproximovali dotyčnou plochou v bode C, keďže vzdialenosť je len cca 50 km, takže sférické efekty sú zanedbateľné. Jediný sférický efekt, ktorý uvažujeme, je nahustenie poludníkov o faktor  $\cos \Phi_C$ . Táto poloha je približne pol kilometra od skutočnej polohy autora úlohy

$$\boxed{(52,0850^\circ \text{ N}; 5,1803^\circ \text{ E})}, \quad (5.5)$$

dosiahli sme teda presnosť cca 1%.

*Poznámka: Uhol  $1^\circ$  v zemepisnej šírke je niečo vyše 100 km, preto vieme jednotlivé desiatinné miesta postupne intuitívne interpretovať ako desiatky kilometrov, kilometre, stovky metrov a desiatky metrov. Udávať súradnice budov s väčšou presnosťou nemá veľký zmysel.*

- (b) Poznáme vzdialenosť budovy X od pozorovateľa  $L_X = 4370 \text{ m}$  a výšku budovy  $h = 42 \text{ m}$ . Situácia je načrtnutá na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Geometrický náčrt situácie pozorovateľa

7b

Uhol  $\alpha$  vieme odčítať z obrázku 5.1 v zadaní, znovu ako nejaký násobok uhlového priemeru slnečného disku. Najväčší problém pri odčítaní tejto hodnoty je správne určiť horizont. Môžeme si pomôcť trikom: vieme že 113 metrov zodpovedajúcich rozdielu výšky budov C a D zodpovedá 0,23 slnečného disku. Budova E je vysoká 151 metrov, a z ľubovoľného miesta v centre Utrechtu (kde sa nám podarilo umiestniť pozorovateľa) je v rámci zlomku percenta vzdialenosť budovy E rovnaká ako vzdialenosť budov C a D. Vieme teda, že skutočný horizont bude  $(151/113) \cdot 0,23$  uhlového priemeru slnečného disku pod vrchom tejto budovy, a rovnoparalelný so zdanlivým horizontom tvoreným stromami a vrcholkami budov. Uhol  $\alpha$  vychádza ako približne 1,07 slnečného disku, teda asi  $0,566^\circ$ .

8b

Na základe obrázku 5.2 napíšeme rovnicu

$$\tan \alpha = \frac{H - h}{L_X}, \quad (5.6) \quad 8b$$

odkiaľ

$$H = L_X \tan \alpha + h \doteq \boxed{85 \text{ m}}. \quad (5.7) \quad 7b$$

- (c) Kľúčové je, že sa jedná o popoludnie 22. 8. 2025, a výška Slnka je  $32,1^\circ$  nad horizontom. Keď nastavíme v Stelláriu čas tak, aby bola táto podmienka splnená, zistíme že občiansky čas je  $\boxed{17 \text{ h } 12 \text{ min}}$ .

9b

Hodinový uhol Slnka cca  $3^{\text{h}} 27^{\text{min}}$  priamo odčítame zo Stellária,

6b

takže pravý slnečný čas je  $\boxed{15 \text{ h } 27 \text{ min}}$ .

5b

## Bonusová (detektívna) úloha

V Utrechte sa nachádza niekoľko budov vyšších alebo približne rovnako vysokých ako nájdených 85 metrov. Najvyššou budovou mesta zotrúva s výškou 112 m veža katedrály (Domtoren) z roku 1382, ktorej pozorovacia platforma je ale vo výške až vyše 100 m, výrazne viac než nájdená výška. Za ňou nasleduje budova Rabobank so 105 m. Niekoľko budov v rozmedzí 80 m až 90 m sa nachádza severozápadne od vlakovej stanice.

Na pomoc nám príde perspektíva. Budova X (ak ju viete nájsť na mape) sa nachádza na správnom mieste v porovnaní s pozadím Rotterdamu jedine z budovy Rabobank. Budovu X viete nájsť hľadaním v oblasti cca 4 km od centra Utrechtu v smere na Rotterdam. Na obrázku vidíte televíznu vežu a diaľničný nadjazd (asi 2,5 km od centra), za ktorými je pole a priemyselná štvrť s kancelárskymi budovami, vrátane X. Poschodie určíme hrubým odhadom. Budova Rabobank má 25 kancelárskych poschodí, nad ktorými su dve technické (bez okien), ktoré sú výrazne vyššie ako pod nimi ležiace kancelárske. Autor príkladu bude uviaznutý zrejme niekde medzi poschodiami 23 a 25.

# Zoznam konštánt (SŠ)

## Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
gravitačná konštanta	$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
elementárny elektrický náboj	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Coulombova konštanta	$k_e = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-2} \text{ C}^{-2}$
Planckova konštanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
univerzálna plynová konštanta	$\bar{R} = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Wienova posunovacia konštanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Hubbleova konštanta	$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

## Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň = 24 h
siderický (hviezdny) deň	$t_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,1 \text{ s}$
juliánsky rok	rok = 365,25 dní
siderický rok	$P_{\oplus} = 365,2564 \text{ dní}$
tropický rok	$P_{\oplus}^{\text{trop}} = 365,2422 \text{ dní}$
anomalistický rok	$P_{\oplus}^{\text{anom}} = 365,2596 \text{ dní}$
astronomická jednotka	au = $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
svetelný rok	ly = $9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$
parsek	pc = $3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$
Jansky	Jy = $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$

## Slnko

hmotnosť Slnka	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
polomer Slnka	$R_{\odot} = 6,957 \cdot 10^8 \text{ m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_{\odot} = 5772 \text{ K}$
farebná teplota Slnka	$T_{\odot}^{\text{color}} = 5900 \text{ K}$
zdanlivá vizuálna magnitúda Slnka	$m_{\odot} = -26,74 \text{ mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda Slnka	$m_{\odot}^{\text{bol}} = -26,83 \text{ mag}$
absolútna vizuálna magnitúda Slnka	$M_{\odot} = 4,83 \text{ mag}$
absolútna bolometrická magnitúda Slnka	$M_{\odot}^{\text{bol}} = 4,74 \text{ mag}$

## Planéty

excentricita dráhy Zeme	$e_{\oplus} = 0,0167$
inklinácia rotačnej osi Zeme	$\varepsilon = 23^{\circ} 26'$
Tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme	$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$

planéta	polomer	hmotnosť	veľká polos dráhy
Merkúr ☿	$R_{\text{☿}} = 2440 \text{ km}$	$m_{\text{☿}} = 3,302 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$a_{\text{☿}} = 0,387 \text{ au}$
Venuša ♀	$R_{\text{♀}} = 6052 \text{ km}$	$m_{\text{♀}} = 4,867 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$a_{\text{♀}} = 0,723 \text{ au}$
Zem ⊕	$R_{\text{⊕}} = 6378 \text{ km}$	$m_{\text{⊕}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$a_{\text{⊕}} = 1 \text{ au}$
Mars ♂	$R_{\text{♂}} = 3393 \text{ km}$	$m_{\text{♂}} = 6,417 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$a_{\text{♂}} = 1,524 \text{ au}$
Jupiter ♃	$R_{\text{♃}} = 69\,911 \text{ km}$	$m_{\text{♃}} = 1,898 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	$a_{\text{♃}} = 5,204 \text{ au}$
Saturn ♄	$R_{\text{♄}} = 58\,232 \text{ km}$	$m_{\text{♄}} = 5,683 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$a_{\text{♄}} = 9,583 \text{ au}$
Urán ♅	$R_{\text{♅}} = 25\,362 \text{ km}$	$m_{\text{♅}} = 8,681 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$a_{\text{♅}} = 19,191 \text{ au}$
Neptún ♆	$R_{\text{♆}} = 24\,764 \text{ km}$	$m_{\text{♆}} = 1,024 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$a_{\text{♆}} = 30,069 \text{ au}$

## Mesiac

polomer Mesiaca	$R_{\text{☾}} = 1737 \text{ km}$
hmotnosť Mesiaca	$m_{\text{☾}} = 7,346 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
veľká polos dráhy Mesiaca	$a_{\text{☾}} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
siderická obežná doba Mesiaca	$P_{\text{☾}} = 27,32 \text{ dní}$
synodická obežná doba Mesiaca	$S_{\text{☾}} = 29,53 \text{ dní}$
inklinácia dráhy Mesiaca voči ekliptike	$i_{\text{☾}} = 5^\circ 8'$
excentricita dráhy Mesiaca	$e_{\text{☾}} = 0,0549$
zdanlivá vizuálna magnitúda Mesiaca v splne	$m_{\text{☾}} = -12,74 \text{ mag}$

## Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

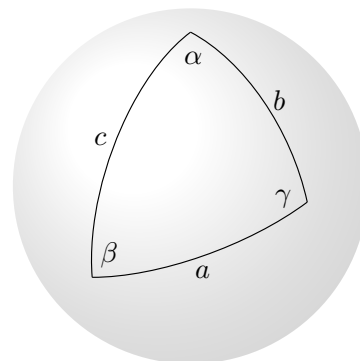
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Sférický exces (v radiánoch):

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

= plocha trojuholníka na jednotkovej sfére.



## Vzťahy pre elementy dráhy

polárna rovnica kuželosečky:  $r = \frac{p}{1+e \cos \vartheta}$  ,  $p = \frac{L^2}{GMm^2} = a(1-e^2)$

stredná anomália:  $M = (t - t_0) \sqrt{\frac{GM}{p^3} (1 - e^2)^3} = 2\pi \frac{t - t_0}{P}$

Keplerova rovnica pre elipsu:  $M = E - e \sin E$  ,  $\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}$

Barkerova rovnica pre parabolu:  $t - t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \left( \tan \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\nu}{2} \right)$

Keplerova rovnica pre hyperbolu:  $M = e \sinh F - F$  ,  $\tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\nu}{2}$