VZOROVÉ RIEŠENIA
Astronomickej olympiády 2026

Kolo: **domáce kolo** Kategória: **stredná škola**

Dokopy bolo možné získať **400 b**

Zverejnené 18. 02. 2026

Astronomická olympiáda je vedomostná súťaž pre študentov základných a stredných škôl organizovaná na Slovensku už 20-ty rok. Jej cieľom je vzdelávanie astronómie a astrofyziky, ako aj výber reprezentantov na Medzinárodnú olympiádu z astronómie a astrofyziky.

Všetky dôležité informácie o Astronomickej olympiáde nájdete na stránke `www.aosk.sk`.
V prípade ľubovoľných otázok nás kontaktujte prostredníctvom emailu `ao@aosk.sk`.

Slovenská ústredná hvezdáreň v Hurbanove

AO SK

Slovenská Astronomická Spoločnosť pri Slovenskej akadémii vied

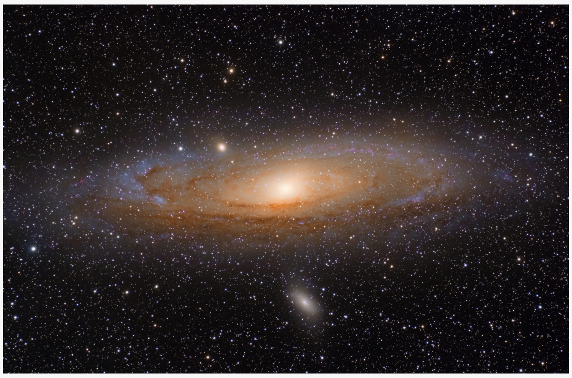
Súťaž vyhlasuje Slovenská ústredná hvezdáreň Hurbanovo v spolupráci so SAS pri SAV, s hvezdárňami a planetáriami, astronomickými kabinetmi, osvetovými strediskami, centrami voľného času a regionálnymi kultúrnymi centrami.

1 Milkdroméda

(**60 b**, autor: Terézia Hanáková & Radovan Lascsák)

Je známe, že v dôsledku rozpínania vesmíru sa od nás vzďaľujú objekty všetkými smermi. Svedčí o tom posun ich spektrálnych čiar do červenej oblasti spektra. Jednou z výnimiek je galaxia M 31 v súhvezdí Andromeda, ktorej spektrum je posunuté opačným smerom.

Napríklad spektrálnu čiaru Hα, s laboratórnou vlnovou dĺžkou $\lambda_0 = 656{,}28\,\mathrm{nm}$, pozorujeme na vlnovej dĺžke $\lambda = 655{,}62\,\mathrm{nm}$. Posun spektra do modrej oblasti znamená, že sa k nám galaxia M 31 približuje a vedci odhadujú, že sa s Mliečnou cestou zrazí za asi 4 miliardy rokov. Aktuálne sa M 31 nachádza vo vzdialenosti $d_0 = 2{,}537\,\mathrm{Mly}$ (miliónov svetelných rokov).



Obr. 1.1: Zdroj: Brody Wesner.

Úlohy

(a) *[10 b]* Vypočítajte červený posun z galaxie M 31.

(b) *[15 b]* Vypočítajte rýchlosť v, ktorou sa k nám galaxia M 31 približuje.

(c) *[10 b]* Vypočítajte rýchlosť v_H, akou by sa mala galaxia M 31 od nás vzďaľovať podľa Hubblovho-Lemaîtrovho zákona. Porovnajte ju s rýchlosťou v. Ktorá z nich je väčšia?

(d) *[25 b]* Na akej vlnovej dĺžke λ' by sme pozorovali spektrálnu čiaru Hα, ak by sa hypoteticky Hubblova konštanta náhle 10-násobne zväčšila?

(a) Červený posun vypočítame použitím jeho definície:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{655{,}62\,\mathrm{nm} - 656{,}28\,\mathrm{nm}}{656{,}28\,\mathrm{nm}} \doteq \boxed{-0{,}001\,01}\,. \tag{1.1}$$ 10 b

Červený posun je definovaný tak, že je kladný pre objekty, ktoré sa od nás vzďaľujú a záporný pre tie, ktoré sa k nám približujú. Vidíme teda, že sa k nám M 31 približuje.

(b) Pre zistenie radiálnej rýchlosti vzďaľovania, respektíve v našom prípade približovania, využijeme interpretáciu Dopplerovým vzťahom. Pre rýchlosť vzďaľovania v_r dostaneme

$$v_\mathrm{r} = cz = c\,\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \doteq -301\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{1.2}$$ 10 b

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Rýchlosť vzďaľovania v_r je taktiež záporná, čo znamená, že sa M 31 k nám približuje. Hľadaná rýchlosť približovania je preto $v = -v_\mathrm{r}$, čiže

$$\boxed{v = 301\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\,. \tag{1.3}$$ 5 b

(c) Hubblov-Lemaîtrov zákon je daný rovnicou

$$v_\mathrm{H} = H_0 \cdot d_0 \,, \tag{1.4}$$ 3 b

kde H_0 je Hubblova konštanta, ktorej hodnotu vieme nájsť v konštantovníku, a d_0 je aktuálna vzdialenosť galaxie M 31, ktorá je zadaná v zadaní. Nakoľko sa Hubblova konštanta udáva v megaparsekoch (Mpc), tak potrebujeme premeniť jednotky vzdialenosti z Mly na Mpc. Pomôžu nám hodnoty ly a pc v konštantovníku:

$$d_0 = 2{,}537\,\mathrm{Mly} = 2{,}537 \cdot \frac{1\,\mathrm{ly}}{1\,\mathrm{pc}}\,\mathrm{Mpc} = 2{,}537 \cdot \frac{9{,}461 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}}{3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}}\,\mathrm{Mpc} \doteq 0{,}7778\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{1.5}$$

Po dosadení do Hubblovho-Lemaîtrovho zákona (1.4) dostávame

$$v_\mathrm{H} = H_0 \cdot d_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \cdot 0{,}7778\,\mathrm{Mpc} \doteq \boxed{54\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\,. \tag{1.6}$$ 7 b

Vidíme, že rýchlosť v_H je menšia ako pozorovaná rýchlosť galaxie v.

(d) Označme v_G ako vlastnú rýchlosť galaxie M 31. Pre pozorovanú rýchlosť v, ktorou sa M 31 približuje, musí platiť $v = v_\mathrm{G} - v_\mathrm{H}$, nakoľko vlastná rýchlosť v_G a rýchlosť v_H spôsobená rozpínaním vesmíru smerujú presne opačným smerom. Rýchlosť v je kladná, pretože $v_\mathrm{G} > v_\mathrm{H}$. Po vyjadrení v_G a presnejšom určení výsledkov podzadaní (b) a (c) máme

$$v_\mathrm{G} = 301{,}49\,\mathrm{km\,s^{-1}} + 54{,}45\,\mathrm{km\,s^{-1}} = 355{,}94\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.7}$$ 5 b

Zmena Hubblovej konštanty zmení výsledok v_H v podzadaní (c). Dostávame

$$v'_\mathrm{H} = 10 H_0 \cdot d_0 = 544{,}46\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.8}$$ 5 b

Pozorovanú rýchlosť v' určíme analogicky k $v = v_\mathrm{G} - v_\mathrm{H}$, teda

$$v' = v_\mathrm{G} - v'_\mathrm{H} = 355{,}94\,\mathrm{km\,s^{-1}} - 544{,}46\,\mathrm{km\,s^{-1}} = -188{,}52\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.9}$$ 5 b

Keďže nám rýchlosť približovania vychádza ako záporné číslo, tak to znamená, že sa M 31 od nás naopak vzďaľuje. Rozpínanie vesmíru v tomto hypotetickom prípade prevládlo nad vlastnou rýchlosťou približovania galaxie M 31, a teda nikdy nedôjde k jej zrážke s Mliečnou cestou a vytvoreniu Milkdromédy.

Novú pozorovanú vlnovú dĺžku λ' spektrálnej čiary Hα určíme analogicky ako v (1.2). Platí

$$v'_\mathrm{r} = c\,\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = c\left(\frac{\lambda'}{\lambda_0} - 1\right), \tag{1.10}$$ 6 b

kde v_r' je rýchlosť vzďaľovania

$$v_r' = -v' = 188{,}52\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.11}$$ 2b

Vyjadrením λ' z (1.10) dostávame

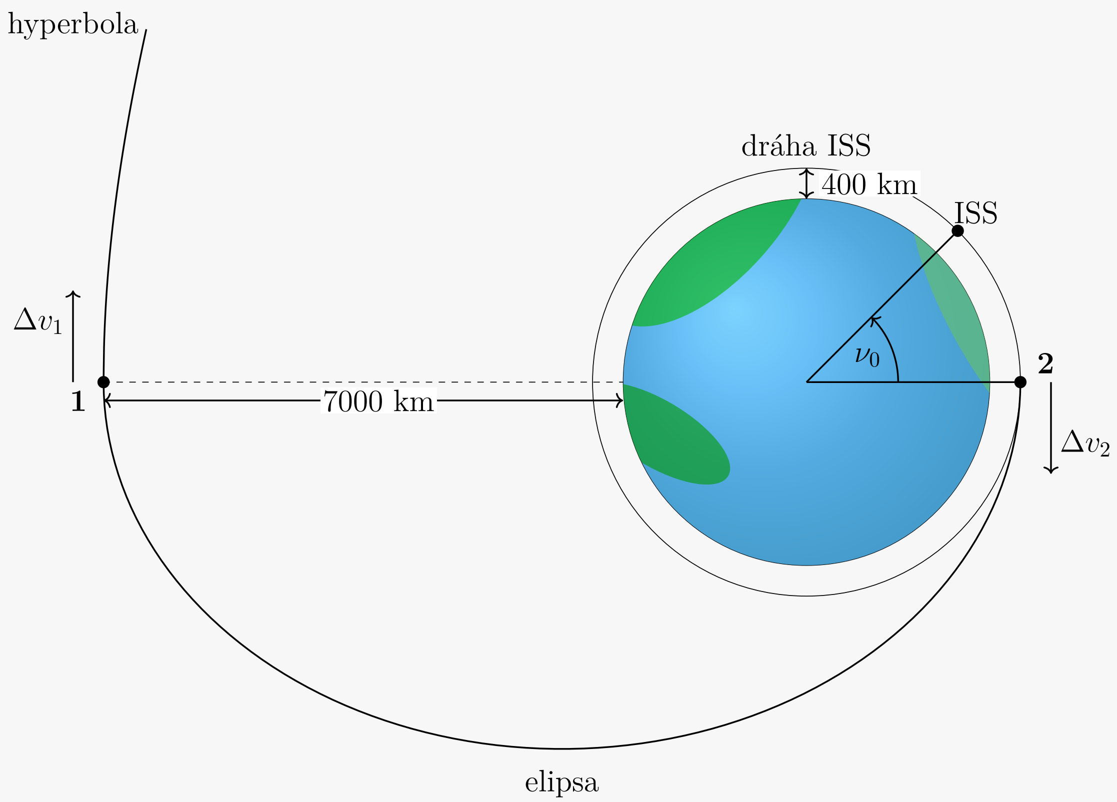
$$\lambda' = \lambda_0\left(\frac{v_r'}{c} + 1\right) \doteq \boxed{656{,}69\,\mathrm{nm}}\,, \tag{1.12}$$ 2b

teda vlnovú dĺžku o čosi väčšiu ako λ_0.

2 Sonda pri ISS

(**80 b**, autor: Michal Zummer)

Vesmírna sonda s celkovou hmotnosťou 300 kg sa vracia z misie v hlbokom vesmíre k Zemi po hyperbolickej dráhe. Najbližšie sa dostane do výšky 7000 km nad povrch Zeme (bod **1** na obrázku 2.1), pričom bude mať v tomto mieste voči Zemi rýchlosť 9 $\mathrm{km\,s^{-1}}$. V tomto bode v momente spomalí na eliptickú dráhu a následným opätovným zapálením rakiet v bode **2** sa presunie z eliptickej na kruhovú dráhu vo výške 400 km s použitím najmenšieho možného množstva energie. V tejto výške sa v rovnakej rovine nachádza na orbite aj Medzinárodná vesmírna stanica (ISS). Náčrt trajektórie sa nachádza na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Zachytenie sondy z hyperbolickej dráhy na kruhovú dráhu okolo Zeme. Sonda a ISS obiehajú v jednej rovine. Obrázok je iba ilustračný.

Úlohy

(a) *[30 b]* Vypočítajte potrebnú Δv_1 a Δv_2 na spomalenie sondy v 2 manévroch.

(b) *[20 b]* Vypočítajte celkovú dĺžku manévru, teda čas letu z bodu **1** do bodu **2**.

V momente, kedy sa sonda na hyperbolickej dráhe dostala najbližšie k Zemi (bod **1**), má ISS súradnicu ν_0 znázornenú na obrázku 2.1. Sonda a ISS sa pohybujú v jednej rovine a obe obiehajú rovnakým smerom.

(c) *[30 b]* Určte, kde na svojej dráhe sa nachádza ISS vzhľadom na stred Zeme (teda vypočítajte jej súradnicu ν_0), ak požadujeme, aby sa sonda a ISS stretli v bode **2**.

(a) Na to aby sonda použila najmenšie množstvo energie sa musí zmena energie odohrať v pericentre dráhy. Pericentrum hyperboly je vo výške $h_1 = 7000$, km kde sonda spomalí prvýkrát (bod **1**) na eliptickú dráhu a v polovici obehu elipsy sa dostane do pericentra eliptickej dráhy $h_2 = 400$ km nad povrch Zeme, kde sonda spomalí druhýkrát (bod **2**) na kruhovú dráhu s výškou $h_2 = 400$ km nad povrchom.

Pre rýchlosť na eliptickej dráhe platí rovnica Vis-viva

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\,, \tag{2.1}$$ 5 b

kde $\mu = G\mathcal{M}_\oplus$ je gravitačný parameter, r je vzdialenosť primárneho ohniska elipsy a ľubovoľného miesta na dráhe a a je veľká polos, ktorú vieme určiť na základe geometrie orbity. Veľkú os elipsy ($2a$) vieme určiť ako súčet $2R_\oplus$, h_1 a h_2. Preto

$$a = \frac{2R_\oplus + h_1 + h_2}{2}\,. \tag{2.2}$$

Pre rýchlosti v bodoch **1** a **2** platí z rovnice Vis-Viva

$$v_1 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{R_\oplus + h_1} - \frac{2}{2R_\oplus + h_1 + h_2}\right)} \doteq 4{,}48\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{2.3}$$ 5 b

$$v_2 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{R_\oplus + h_2} - \frac{2}{2R_\oplus + h_1 + h_2}\right)} \doteq 8{,}84\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{2.4}$$ 5 b

Pre kruhovú (prvú kozmickú) rýchlosť, ktorou obieha ISS vo výške $h_2 = 400$ km platí

$$v_\mathrm{I}(h_2) = \sqrt{\frac{\mu}{R_\oplus + h_2}} \doteq 7{,}67\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{2.5}$$ 5 b

Na spomalenie sondy potrebujeme 5 b

$$\Delta v_1 = 9\,\mathrm{km\,s^{-1}} - 4{,}48\,\mathrm{km\,s^{-1}} = \boxed{4{,}52\,\mathrm{km\,s^{-1}}}, \tag{2.6}$$

$$\Delta v_2 = 8{,}84\,\mathrm{km\,s^{-1}} - 7{,}67\,\mathrm{km\,s^{-1}} = \boxed{1{,}17\,\mathrm{km\,s^{-1}}}. \tag{2.7}$$

Celkovo pri dvoch brzdných manévroch potrebujeme $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 5{,}69\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. 5 b

(b) Pomocou tretieho Keplerovho zákona môžeme určiť periódu obehu sondy na eliptickej dráhe, ale aj periódu ISS na kruhovej dráhe. Uvažujeme, že hmotnosť sondy, respektíve ISS, je zanedbateľná voči hmotnosti Zeme. Tretí Keplerov zákon má teda tvar

$$\frac{a^3}{P^2} \approx \frac{\mu}{4\pi^2}\,. \tag{2.8}$$ 5 b

Po dosadení veľkej polosi a vyjadrení

$$P_{\text{sonda, el.}} = \sqrt{\frac{\pi^2(2R_\oplus + h_1 + h_2)^3}{2\mu}} \doteq 168\ \mathrm{min}\,. \tag{2.9}$$ 10 b

Sonde potrvá polovicu periódy $P_{\text{sonda, el.}}$, čiže $168\,\mathrm{min}/2 = \boxed{84\ \text{minút}}$, než sa dostane z hyperbolickej dráhy na kruhovú (z bodu **1** do bodu **2**), pretože ide o polovicu celej elipsy. 5 b

(c) Analogicky pomocou tretieho Keplerovho zákona určíme periódu obehu ISS na kruhovej dráhe vo výške $h_2 = 400$ km.

$$P_{\text{ISS, cir.}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_\oplus + h_2)^3}{\mu}} \doteq 93\ \mathrm{min}\,. \tag{2.10}$$ 15 b

Túto periódu bude mať aj sonda po vstupe na kruhovú dráhu v bode **2**.

Celý obeh ISS trvá 93 minút a musíme určiť kde sa ISS nachádzala 84 minút pred tým ako je v bode **2**. Polohu ISS určíme v polárnych súradniciach (radiálna vzdialenosť r a uhol ν od osi x) s počiatkom v strede Zeme, osou x v smere k bodu **2** a súradnica ν bude proti smeru hodinových ručičiek z pohľadu obrázka (2.1), teda v smere obehu ISS.

Uhol ν obehne 360° za 93 minút a v bode **2** má ISS uhol ν rovný 0°. Preto 84 minút pred tým ako bude ISS v bode **2**, bol jej uhol

$$\nu_0 = 360^\circ - \frac{84\ \mathrm{min}}{93\ \mathrm{min}} \cdot 360^\circ \doteq \boxed{35^\circ}. \tag{2.11}$$ 15 b

Alternatívne môžeme písať, že poloha ISS vzhľadom na stred Zeme bola pri vstupe sondy na eliptickú trajektóriu

$$\mathbf{r}_0 = 6778\,\mathrm{km}\begin{pmatrix}\cos\nu_0\\ \sin\nu_0\end{pmatrix}\,. \tag{2.12}$$

3 Neviditeľný

(**60 b**, autor: Terézia Hanáková)

Terka dostala na domácom kole Astronomickej olympiády za úlohu pozorovať trpasličiu planétu Ceres, ktorá však nie je viditeľná voľným okom a ona nemá k dispozícii lepší ďalekohľad ako refraktor s ohniskovou vzdialenosťou 700 mm a priemerom objektívu 60 mm. Ceres má polomer dráhy 2,77 au, absolútnu magnitúdu 3,34 a albedo 0,1. Absolútnu magnitúdu telies v slnečnej sústave definujeme ako magnitúdu, ktorú by mali, ak by sme ich presunuli do vzdialenosti 1 au od Slnka a zároveň 1 au od Zeme.

(a) *[50 b]* Zistite, či sa Terke podarí uvidieť Ceres v ďalekohľade alebo sa má radšej pozrieť na teoretické úlohy. Uhlová vzdialenosť Ceresu a Slnka na oblohe pri pohľade zo Zeme (elongácia) je 143,7°. Uvažujte kruhové dráhy Ceresu aj Zeme, priemer Terkinej očnej pupily 8 mm a zanedbajte efekt fázy Ceresu.

(b) *[10 b]* Ak ste v prvom podzadaní určili, že Ceres uvidí, okomentujte prečo. Mohla by nastať situácia, kedy by aj napriek tomu Ceres nebolo vidieť? Ak vám vyšlo, že Ceres neuvidí, okomentujte prečo. Mohla by nastať situácia, kedy by aj napriek tomu za istých podmienok bol Ceres v jej ďalekohľade viditeľný?

(a) Zo zadania vieme, že Ceres má absolútnu magnitúdu $M = 3{,}34\,\mathrm{mag}$. Jeho zdanlivú magnitúdu m si môžme vypočítať pomocou Pogsonovej rovnice

$$m - M = -2{,}5 \log\left(\frac{f_1}{f_2}\right) , \tag{3.1}$$ 5 b

kde f_1, f_2 sú toky.

Tok f_1 prislúchajúci zdanlivej magnitúde m závisí priamoúmerne na zbernej ploche S a nepriamoúmerne na druhej mocnine vzdialenosti d od Zeme. Okrem toho však obdobne závisí aj na druhej mocnine vzdialenosti r od Slnka, pretože Ceres nežiari vlastným svetlom, ale iba odráža to slnečné. Albedo A, alebo tiež miera odrazivosti, ktoré je pre Ceres rovné 0,1 znamená, že Ceres odrazí len 10% dopadajúceho svetla. Dostávame tak úmernosť

$$f_1 \;\propto\; \frac{A \cdot S}{r^2 \cdot d^2} , \tag{3.2}$$

kde symbol $\propto$ značí rovnosť až na konštantu (priamu úmeru).

Táto úmernosť platí aj pre tok f_2 prislúchajúci absolútnej magnitúde M, ak zmeníme hodnotu r a d. Ako je uvedené v zadaní, pre telesá slnečnej sústavy je táto absolútna magnitúda M definovaná ako magnitúda, ktorú by mal Ceres, ak by sme ho presunuli do vzdialenosti $r = 1\,\mathrm{au}$ od Slnka a zároveň $d = 1\,\mathrm{au}$ od Zeme. Albedo A a zberná plocha Ceresu S ostávajú rovnaké. Preto

$$f_2 \;\propto\; \frac{A \cdot S}{(1\,\mathrm{au})^2 (1\,\mathrm{au})^2} . \tag{3.3}$$

Pogsonova rovnica nám nadobudne tvar

$$m - M = -2{,}5 \log \left(\frac{\frac{AS}{r^2 d^2}}{\frac{AS}{(1\,\mathrm{au})^2 (1\,\mathrm{au})^2}} \right), \tag{3.4}$$ 10 b

po úprave platí pre r a d v astronomických jednotkách

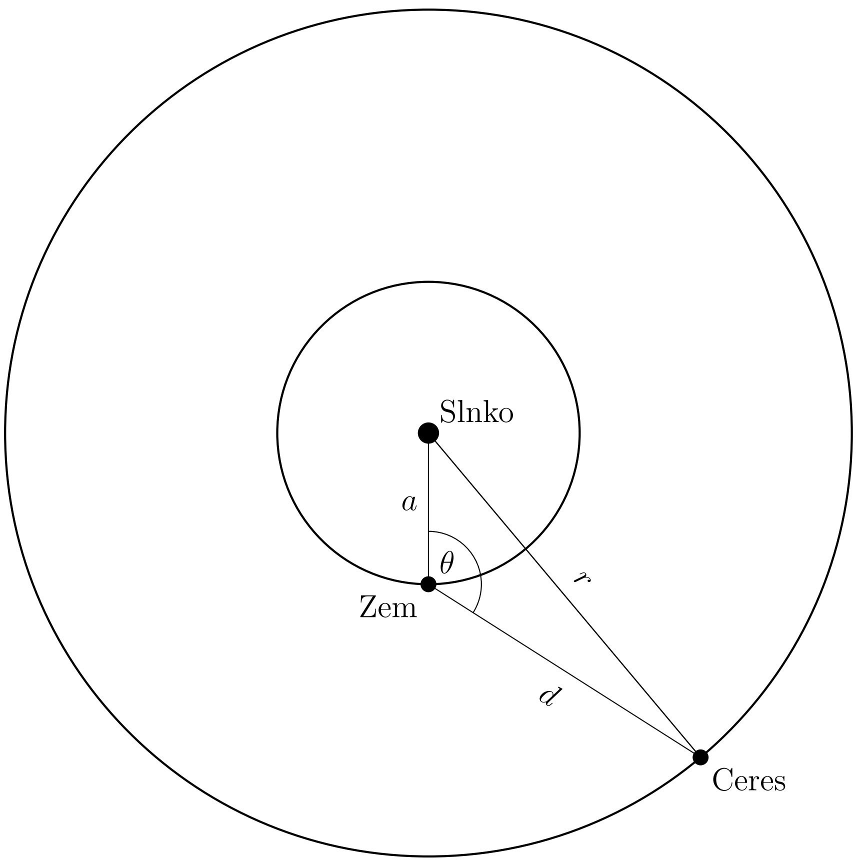
$$m - M = -2{,}5 \log \left(\frac{1}{r^2 d^2} \right), \tag{3.5}$$

$$m - M = -2{,}5 \log \left((rd)^{-2} \right), \tag{3.6}$$

$$m - M = 5 \log(rd)\,, \tag{3.7}$$

$$m = M + 5 \log(rd)\,. \tag{3.8}$$ 3 b

Dostali sme tak vzťah, do ktorého musíme už len dosadiť vzdialenosti r a d. Zo zadanie vieme, že $M = 3{,}34$ je absolútna magnitúda Ceresu a $r = 2{,}77\,\mathrm{au}$ je vzdialenosť Ceresu od Slnka. No vzdialenosť d Ceresu od Zeme v zadaní nemáme, preto si ju musíme určiť jednoduchou úvahou z obrázka 3.1.



Obr. 3.1: Náčrt polohy Ceresu.

Keďže uvažujeme kruhové dráhy, vieme si označiť uhlovú vzdialenosť Ceresu a Slnka, ktorú pozorujeme zo Zeme $\theta = 143{,}7°$, vzdialenosť Ceresu a Slnka $r = 2{,}77\,\mathrm{au}$ a vzdialenosť Zeme od Slnka $a = 1\,\mathrm{au}$. Z vyznačeného trojuholníka vieme určiť vzdialenosť d z kvadratickej rovnice, ktorú získame z kosínusovej vety pre tento trojuholník

$$r^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta\,, \tag{3.9}$$

$$0 = d^2 + (-2a\cos\theta)d + (a^2 - r^2)\,, \tag{3.10}$$

$$\Rightarrow d_{1,2} = \frac{2a\cos\theta \pm \sqrt{(-2a\cos\theta)^2 - 4(a^2 - r^2)}}{2}\,. \tag{3.11}$$

Po dosadení hodnôt dostávame dva výsledky $d_1 = 1{,}90\,\mathrm{au}$ a $d_2 = -3{,}51\,\mathrm{au}$. Druhý výsledok nedáva zmysel, pretože vzdialenosť môže byť jedine kladná, takže náš výsledok je $d = 1{,}90\,\mathrm{au}$. 10 b
Máme tak hodnotu d, ktorú môžme dosadiť do vzťahu (3.8). Dostávame tak výsledok

$$\boxed{m = 6{,}95\,\mathrm{mag}}\,. \tag{3.12}$$ 2 b

Vidíme, že táto hodnota je väčšia (teda Ceres je menej jasný) ako 6 mag, čo je limitná magnitúda objektov, ktoré môžeme pozorovať priamo len očami. Samozrejme, táto hodnota závisí na podmienkach pri pozorovaní a líši sa človek od človeka, no v zrovnaní s magnitúdou Ceresu môžme predpokladať, že Ceres za väčšiny podmienok neuvidíme.

Posledným krokom je teraz vypočítať, akú limitnú magnitúdu môžme pozorovať s naším ďalekohľadom a následne tieto dve magnitúdy porovnáme. Zadefinujme si m' ako zdanlivú magnitúdu Ceresu v ďalekohľade a m nech zostane zdanlivou magnitúdou Ceresu, ktorú sme už vypočítali. Dostávame novú Pogsonovu rovnicu

$$m' - m = -2{,}5\log\left(\frac{P'}{P_\mathrm{o}}\right)\,, \tag{3.13}$$ 5 b

kde P_o je výkon, ktorý dopadá do oka a P' je výkon, ktorý koncentruje ďalekohľad do oka. Oba tieto výkony sú priamoúmerné zbernej ploche oka, resp. objektívu, čiže $P \propto S$. Oko aj objektív sú kruhové, preto zberná plocha oka $S_0 = \pi r_\mathrm{o}^2$, kde $r_\mathrm{o} = 4\,\mathrm{mm}$ je polomer očnej pupily a $S' = \pi r'^2$, kde $r' = 30\,\mathrm{mm}$ je polomer objektívu Terkinho ďalekohľadu.

Výkony P, P' dosaďme do Pogsonovej rovnice

$$m' - m = -2{,}5\log\left(\frac{\pi r'^2}{\pi r_\mathrm{o}^2}\right)\,, \tag{3.14}$$ 10 b

$$m' - m = -2{,}5\log\left(\left(\frac{r'}{r_\mathrm{o}}\right)^2\right)\,, \tag{3.15}$$

$$m' = m - 5\log\left(\frac{r'}{r_\mathrm{o}}\right)\,. \tag{3.16}$$

Ak dosadíme za r_o a r', vyjde nám $\boxed{m' = 2{,}57\,\mathrm{mag}}$. 2 b

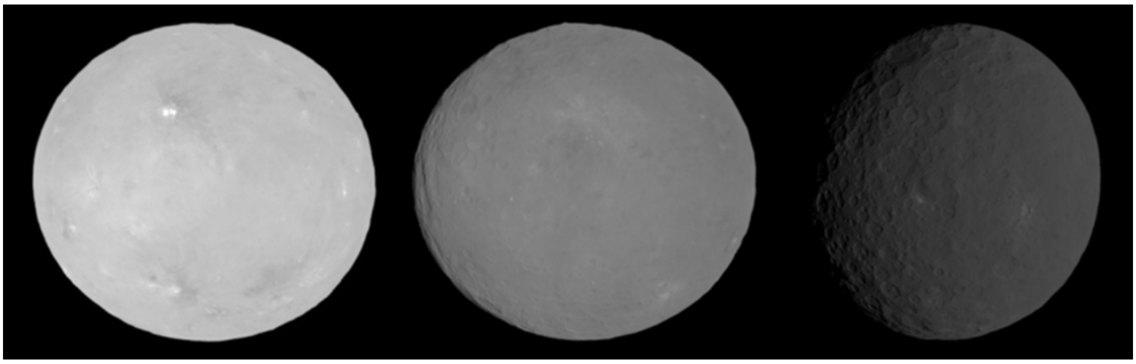
Porovnaním vidíme, že $m' < m$, čiže magnitúda, ktorú vidíme v ďalekohľade je menšia ako magnitúda, ktorú má Ceres. To je aj očakávané, nakoľko v ďalekohľade vidíme všetky objekty jasnejšie, ako pri pozorovaní voľným okom. Navyše $m' < 6\,\mathrm{mag}$, tým pádom správnou odpoveďou je, že Terka $\boxed{\text{Ceres v ďalekohľade uvidí}}$. 3 b

Treba však podotknúť, že to, že Ceres v ďalekohľade uvidí, ešte neznamená, že ho uvidí vo vysokej kvalite. Vzdialené či malé objekty sa v amatérskych ďalekohľadoch javia iba ako bodové zdroje svetla.

(b) Správnou odpoveďou prvého podzadania bola možnosť, že Terka Ceres uvidí. Dôvodom je práve limitná magnitúda 6 mag, ktorú môže ľudské oko ešte vidieť a keďže nám vyšlo, že Ceres pozorujeme v ďalekohľade s magnitúdou 2,57 mag, tak vieme s istotou povedať, že Ceres bude dostatočne jasný, aby sme ho v ďalekohľade mohli pozorovať.

Pozorovanie takto slabých objektov nám často sťažujú podmienky ako sú počasie, svetelné znečistenie, atmosférické podmienky, kvalita ďalekohľadu alebo sa nám môžu horšie pozorovať objekty blízko obzoru (kvôli hrubšej vrstve atmosféry nastáva absorpcia a rozptyl svetla). 5 b

Taktiež, Ceres pozorujeme pod istým fázovým uhlom, čo znamená, že zo Zeme nevidíme jeho disk plne osvetlený – časť povrchu privráteného k nám zostáva v tieni. Navyše nerovnosti na povrchu Ceresu spôsobujú dodatočné stemnenie, ktoré môže viesť k pomerne výraznej zmene magnitúdy. Pre zadaný uhol elongácie $\theta = 143{,}7^\circ$ klesne tok na asi 30 %, čo odpovedá nárastu magnitúdy o $-2{,}5\log(0{,}3) \doteq 1{,}3$. Pokles jasnosti Ceresu demonštruje obrázok 3.2.



Obr. 3.2: Fotografie Ceresu pre elongáciu 180° (vľavo), 173° (v strede) a 147° (vpravo) vykonané s rovnakými nastaveniami fotoaparátu. Zdroj: NASA/JPL.

Druhá ponúkaná možnosť nebola správna, no za istých podmienok by sme mohli teoreticky Ceres nejakým spôsobom vidieť aj „na vlastné oči". Takými podmienkami by mohli byť dokonale tmavá obloha (stupeň 1 alebo 2 v Bortlovej stupnici miery svetelného znečistenia), úžasný seeing, výnimočná adaptácia očí na tmu a perfektný zrak . V realite sa však takéto podmienky takmer nikdy nenaskytnú, a tak sa Ceres stáva našim očiam neviditeľný. 5 b

4 Hypatia z Alexandrie

(**100 b**, autor: Terézia Hanáková)

Hypatia z Alexandrie, novoplatónska filozofka, matematička a astronómka, žijúca na prelome 4. a 5. storočia, sa významne zaslúžila o rozvoj vedy a šírenie vzdelania v starovekom Grécku. Jej najvýznamnejším počinom v astronómii bolo komentovanie a úprava Ptolemaiovho diela Almagest, ako aj práca s astrolábom a mapovanie nebeských objektov s jeho pomocou.

Predstavte si, že ste žiakom Hypatie z Alexandrie a spoločne spracovávate tabuľky pohybov nebeských objektov, ktoré iní jej žiaci namerali astrolábom. Stala sa však nešťastná udalosť! Tri zvitky sa pomiešali, a tak dostávate za úlohu zistiť, ktorý zvitok patrí ktorému nebeskému telesu. Viete, že to má byť Slnko, Mesiac a blúdiaca planéta Venuša, v starovekom Grécku nazývaná po bohyni Afrodite.

V tabuľke 4.1 je prepis toho, čo ste vyčítali zo zvitku. Sú to hodnoty ekliptikálnych dĺžok troch objektov z pozorovaní astrolábom. V niektorých dňoch nemohlo nastať pozorovanie kvôli nepriaznivým podmienkam alebo bol zvitok na niektorých miestach poškodený. Pozorovania sa uskutočňovali v daný deň vždy v rovnakú hodinu.

Tabuľka 4.1: Hodnoty ekliptikálnych dĺžok troch nebeských objektov.

poradové číslo pozorovania v dňoch	**ekliptikálna dĺžka**		
	λ_1	λ_2	λ_3
0	261°	2°	244°
2	263°	26°	244°
9	270°	118°	242°
13	274°	175°	243°
20	281°	271°	244°
26	287°	346°	247°
31	292°	46°	250°
40	301°	171°	257°
44	306°	228°	260°
50	312°	306°	265°

Úlohy

(a) *[40 b]* Na milimetrový papier ručne vyneste grafy závislosti ekliptikálnej dĺžky na čase pre dané tri objekty.

(b) *[10 b]* Všetky grafy, ktoré vykazujú jasnú lineárnu závislosť, preložte ručne pomocou pravítka čo najvhodnejšou priamkou alebo dvojicou priamok. Jeden objekt priamkou (priamkami) preložiť nepôjde.

(c) *[20 b]* Určte smernice preložených priamok. Smernica je koeficient A v rovnici priamky $y = Ax + B$. Viete ju zistiť buď pomocou priameho odčítania z grafu, alebo pomocou štatistického módu na kalkulačke. Chybu nájdenej smernice určovať nemusíte.

(d) *[30 b]* Na základe dát a určených smerníc pomôžte Hypatii zistiť, ktorý objekt je ktorý. Komentujte svoj postup a rozhodnutie.

Ak si nie ste istí, ako postupovať pri podobnom type úloh, odporúčame pozrieť sa na odkaz www.datova-analyza.aosk.eu či do materiálu Astronomickej olympiády o Dátovej analýze, ktorú viete nájsť na našej stránke www.aosk.sk/materialy. Dátové analýzy so vzorovými riešeniami z minulých rokov taktiež nájdete na stránke Astronomickej olympiády na odkaze www.aosk.sk/archiv-uloh.

(a) V tejto úlohe nemusíme spraviť nič iné, ako vziať hodnoty z tabuľky 4.1 a načrtnúť ich na milimetrový papier. Máme spraviť graf závislosti ekliptikálnej dĺžky na čase, čo znamená, že na vodorovnú os budeme nanášať časy pozorovania a na zvislú os hodnoty ekliptikálnej dĺžky (túto os nazveme λ, pretože veličina ekliptikálna dĺžka sa zvyčajne takto označuje).

Ako prvé je vhodné si určiť rozpätie, na akom budeme nanášať hodnoty. To je potrebné na to, aby sa nám nestalo to, že sa niektoré hodnoty nezmestia na graf. Z tabuliek 4.1 vidíme, že najmenšia hodnota ekliptikálnej dĺžky sú $2°$ a najväčšia $346°$. Čiže zvislá os bude v rozmedzí $\langle 0°, 350° \rangle$. Obdobne pre vodorovnú os vidíme, že je v rozmedzí $\langle 0\,\text{dní}\,, 50\,\text{dní} \rangle$. 5 b

Ďalej je potrebné určiť mierku osí. Použili sme štandardný milimetrový papier, zobrazený na obrázku 4.1. Aby sme využili čo najviac z grafovacej plochy, tak sme pre zvislý smer zvolili mierku jeden dielik $= 20°$ a pre vodorovný smer jeden dielik $= 2$ dni. 5 b

Pri vynášaní hodnôt do grafu treba postupovať čo najpresnejšie a nepomýliť sa, lebo inak by nám to negatívne ovplyvnilo výsledky ďalších podzadaní . Hodnoty zo všetkých troch stĺpcov 30 b tabuľky 4.1 sme pre názornosť nakreslili do jednotného grafu 4.1, no nebolo by chybou ich pre prehľadnosť nanášať aj na tri rozdielne milimetrové papiere.

(b) Teraz sme všetky naše tri grafy preložili vhodnou krivkou . Vidíme, že pre objekt 1 a 2 5 b to nebolo problematické, lebo sme ich grafy prekladali jednoducho priamkou pre objekt 1 a dvomi priamkami pre objekt 2. To sa robí takpovediac od oka – treba si priložiť pravítko k nameraným hodnotám a čo najpresnejšie sa pokúsiť spraviť priamku tak, aby každý bod bol čo najbližšie k nej. Matematicky sa tento postup nazýva metóda najmenších štvorcov, alebo tiež lineárna regresia.

Pre objekt 3 sme však tento postup aplikovať nemohli, pretože body očividne neležia na priamke – závislosť ekliptikálnej dĺžky λ na čase t sa správa podivne – ekliptikálna dĺžka najprv jemne klesá a potom zrazu začne narastať. O správaní tohto objektu sa pozrieme bližšie vo štvrtom podzadaní. Tento graf sme prekladať krivkou nemuseli. 5 b

(c) Je dôležité nielen nakresliť danú priamku, ale aj určiť jej predpis – rovnicu, ktorá ju popisuje. Takýmto spôsobom vedci prichádzajú na závislosti medzi veličinami z pozorovaní či experimentov a vedia im potom priradiť presne určený vzorec. Na určenie rovnice priamky vo všeobecnom tvare

$$y = Ax + B \tag{4.1}$$

si musíme rozmyslieť, čo sme vlastne vynášali do grafu. Bola to závislosť ekliptikálnej dĺžky λ na čase t. Ako aj máme vyznačené v grafoch, tak zvislá os, všeobecne označovaná ako os y, zobrazuje ekliptikálne dĺžky λ a vodorovná os, označovaná ako os x, zodpovedá poradovým číslam pozorovania v dňoch, čiže časovým úsekom t.

Rovnica priamky nám tým pádom prejde na tvar

$$\lambda = At + B\,. \tag{4.2}$$ 2 b

Písmená A a B značia konštanty, ktoré v tejto úlohe máme zistiť: A je sklon danej priamky (smernica) a B posunutie na zvislej osi. Najideálnejšie je ich zistiť pomocou kalkulačky. Tá má totiž v sebe už priamo zabudovaný štatistický mód, v ktorom si vieme vybrať rovnicu priamky ako náš fit a následne do tabuľky, ktorá sa zobrazí, nahádzať hodnoty λ a t. Kalkulačka sama zvládne vyčísliť hodnoty A a B, a teda určiť výslednú rovnicu priamky.

Pri objekte 2 si však musíme dávať pozor, pretože ten je rozdelený na dve krivky. My však chceme predpis pre jednu priamku. Preto si musíme predstaviť, že v bode, kedy sa z 360° stáva 0° priamka pokračuje a od siedmej hodnoty v tabuľke 4.1 sa k hodnotám ekliptikálnych dĺžok pripočítava 360°.

Dostávame tak rovnice priamok pre objekt 1 a objekt 2 ako

$$\lambda_1 = 1{,}02 \cdot t + 260{,}8\,, \tag{4.3}$$

$$\lambda_2 = 13{,}3 \cdot t + 0{,}4\,. \tag{4.4}$$

Čiže nám smernice daných telies vyšli ako $\boxed{A_1 = 1{,}02}$ a $\boxed{A_2 = 13{,}3}$. 18b

Ak by sme túto úlohu riešili bez kalkulačky, nedáva veľký zmysel riešiť ju pre všetky hodnoty λ a t, pretože by to bolo príliš komplikované a zdĺhavé. Rozumnejšie je si zobrať nejaké dva body na našej priamke a následne vypočítať smernicu A ako

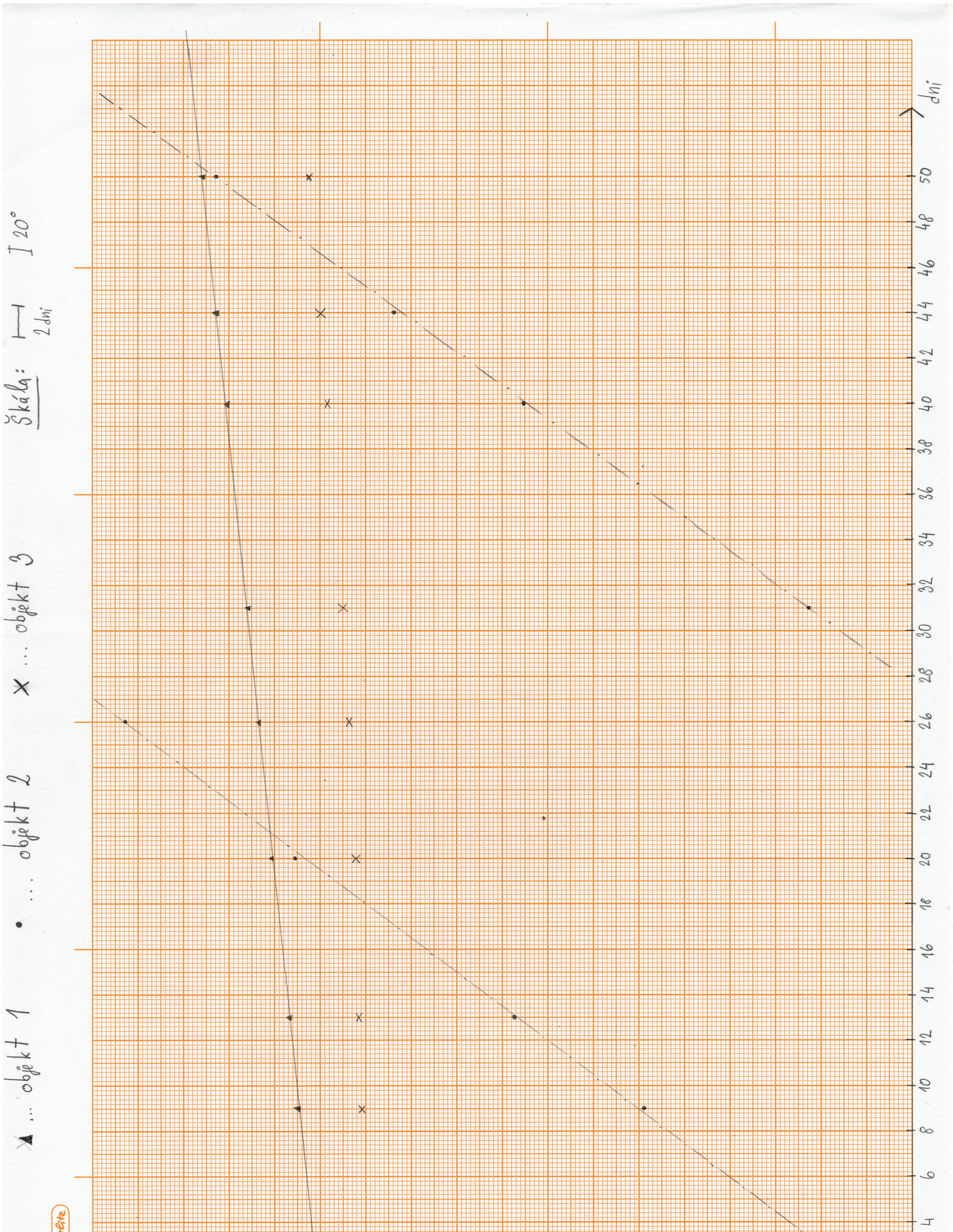
$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{4.5}$$

Spravidla sa vyberajú body, ktoré sa nachádzajú na začiatku a konci grafu priamky, čiže by sme si pre objekt 1 mohli zvoliť bod $[x_1,\, y_1] = [10\,\text{dní},\, 270°]$ a bod $[x_2,\, y_2] = [46\,\text{dní},\, 308°]$, ktoré na odčítanie z grafu vyzerajú najprijateľnejšie. Po vyčíslení dostávame, že $\boxed{A_1 \doteq 1}$. alt.:

Pre objekt 2 máme body $[x_1,\, y_1] = [15\,\text{dní},\, 200°]$ a $[x_2,\, y_2] = [46\,\text{dní},\, 250° + 360° = 610°]$, čím nám obdobným postupom vyšla hodnota smernice $\boxed{A_2 \doteq 13}$. 18b

Vidíme, že tieto rovnice priamok vychádzajú podobne ako pri prvom postupe, no menej presne. Hoci nám hodnoty A a B vyšli na viac desatinných miest, kvôli veľkej nepresnosti si nemôžeme dovoliť v tomto postupe vyjadriť náš výsledok na viac ako celé číslo. Existuje tu totiž veľká chyba, pretože ak by sme priamku nakreslili len o trochu ináč, vyšiel by nám iný výsledok. Tento postup preto nebol nesprávny, no bolo by hrubou chybou napísať hodnoty A a B príliš presne (na viac ako 2 platné cifry). V praxi platí, že čím viac nameraných dát máme, tým lepšie, pretože tým vieme lepšie preložiť dané dáta teoretickou závislosťou. Preto je lepšie použiť kalkulačku a metódu lineárnej regresie zo všetkých nameraných hodnôt.

Pre objekt 3 tento postup uplatniť nejde, a tak sa vyjadrením závislosti ekliptikálnej dĺžky na čase pre tento objekt nemusíme zaoberať. Až v ďalšom podzadaní okomentujeme, prečo je tento objekt taký špeciálny.



Obr. 4.1: Ručné vynesenie hodnôt z tabuľky 4.1 na milimetrový papier a ich fitovanie.

(d) Zo zadanie vieme, že dané závislosti by mali odpovedať Slnku, Mesiacu a Venuši. Ako však priradiť tieto telesá slnečnej sústavy k neznámym objektom 1, 2 a 3?

Začnime objektom 3, ktorý bol tak rozdielny ako ostatné dva prípady. Prečo bol odlišný? Nuž, vidíme, že jeho závislosť nebola ani zďaleka lineárna. Zo začiatku sa jeho ekliptikálne dĺžky zmenšovali a následne opäť zväčšovali. Ekliptikálna dĺžka zodpovedá pohybu telesa pozdĺž ekliptiky. Toto zvláštne správanie objektu 3, kedy sa začal na oblohe doslova pohybovať opačným smerom, nemohlo byť nič iné ako retrográdny pohyb. A ten, ako vieme, je z geometrických dôvodov daný len planétam. Vďaka tomuto argumentu vieme s istotou povedať, že zvláštnym objektom 3 bola planéta Venuša. 10 b

Pre objekty 1 a 2 vyšla ako krivka priamka s vyššie vypočítanými predpismi. Z ostávajúcich telies si musíme vybrať, v ktorom prípade sa jedná o Mesiac a v ktorom o Slnko. Jednou zo zvláštností, ktoré sme si mohli všimnúť pri objekte 2 je to, že v istú dobu prekročí hranicu ekliptikálnej dĺžky 360°, a to práve po niečo vyše 26 dňoch. Opäť, ekliptikálna dĺžka meria uhlovú vzdialenosť objektu pozdĺž roviny ekliptiky, takže sa pýtame, ktoré vesmírne teleso vykoná za niečo vyše 26 dní jednu otočku okolo Zeme? To nám hneď implikuje siderickú dobu obehu Mesiaca okolo Zeme, ktorá je rovná 27,32 dní. Tým pádom vieme povedať, že objektom 2 je Mesiac a vylučovacou metódou je zvyšný objekt 1 Slnko. 2×10 b

Ak by sme sa však ešte pozreli na sklon v grafoch objektu 1 a 2, všimli by sme si, že objekt 2 má omnoho väčší sklon priamky ako objekt 1, čo znamená, že ekliptikálna dĺžka pre objekt 2 rastie s časom rýchlejšie ako pre objekt 1. Opäť-opäť, ak ekliptikálnu dĺžku berieme ako uhlovú vzdialenosť objektu pozdĺž roviny ekliptiky, tak ktoré teleso sa pohybuje pozdĺž ekliptity rýchlejšie? Mesiac alebo Slnko? Rozhodne Mesiac, pretože sa nachádza bližšie k Zemi a jeho obežná doba (siderická) je omnoho menšia ako jeden celý rok. Zdanlivý pohyb Slnka po ekliptike totiž odráža skutočný pohyb Zeme okolo Slnka. Keďže Zemi trvá celý rok, kým dokončí svoj obeh, jeho uhlová rýchlosť je veľmi pomalá (necelý 1° za deň). Dostávame tak, že $\boxed{\text{objekt 1 je Slnko, objekt 2 je Mesiac a objekt 3 je Venuša}}$.

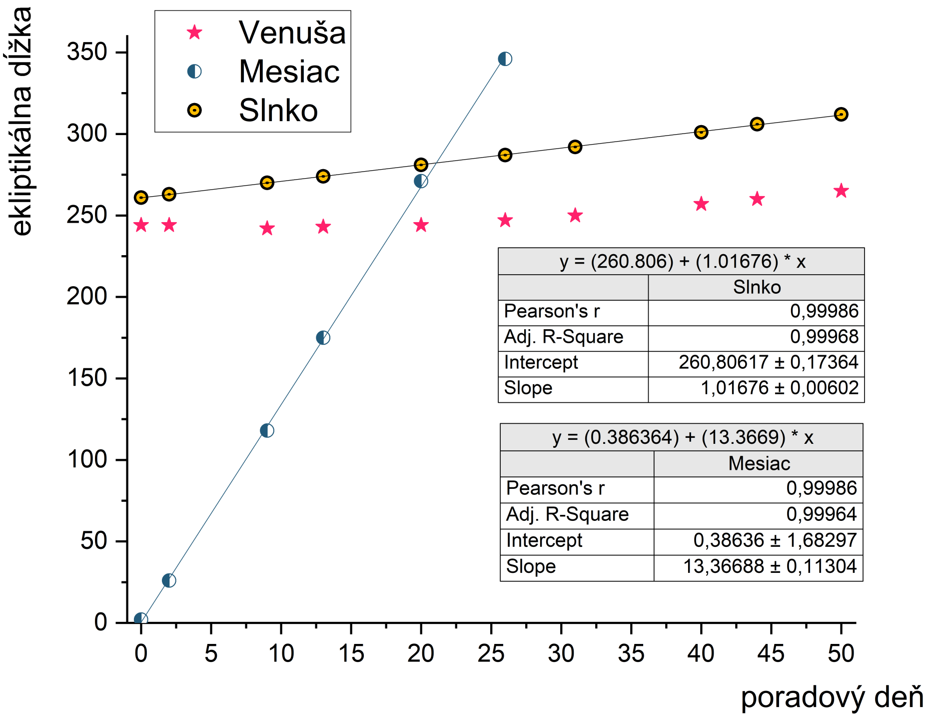
Pre Slnko a Mesiac vieme napísať lineárne rovnice pre ekliptikálnu dĺžku v závislosti na čase

$$\lambda_\odot = 1{,}02 \cdot t + 260{,}8\,, \tag{4.6}$$
$$\lambda_☾ = 13{,}3 \cdot t + 0{,}4\,. \tag{4.7}$$

Na porovnanie prikladáme aj fit zo softvéru Origin (vedecká alternatíva excelu). Origin má oproti bežnej kalkulačke vyššiu presnosť, používa zložitejšie algoritmy na výpočet (napríklad dokáže vážiť hodnoty podľa ich chýb – odchýlok v meraní) a vie určiť aj chybu fitovaných koeficientov, konkrétne

$$\lambda_\odot = (1{,}02 \pm 0{,}01)t + (260{,}8 \pm 0{,}2)\,, \tag{4.8}$$
$$\lambda_☾ = (13{,}3 \pm 0{,}1)t + (0{,}4 \pm 1{,}7)\,. \tag{4.9}$$

Najpresnejší je Origin, potom kalkulačka a nakoniec staré dobré ručné odčítanie z grafu.



Obr. 4.2: Grafy závislostí ekliptikálnej dĺžky na čase v dňoch pre Slnko, Mesiac a Venušu preložené lineárnymi závislosťami v prípade Slnka a Mesiaca. Graf a fity na ňom boli vytvorené v programe Origin.

5 Bludný Holanďan

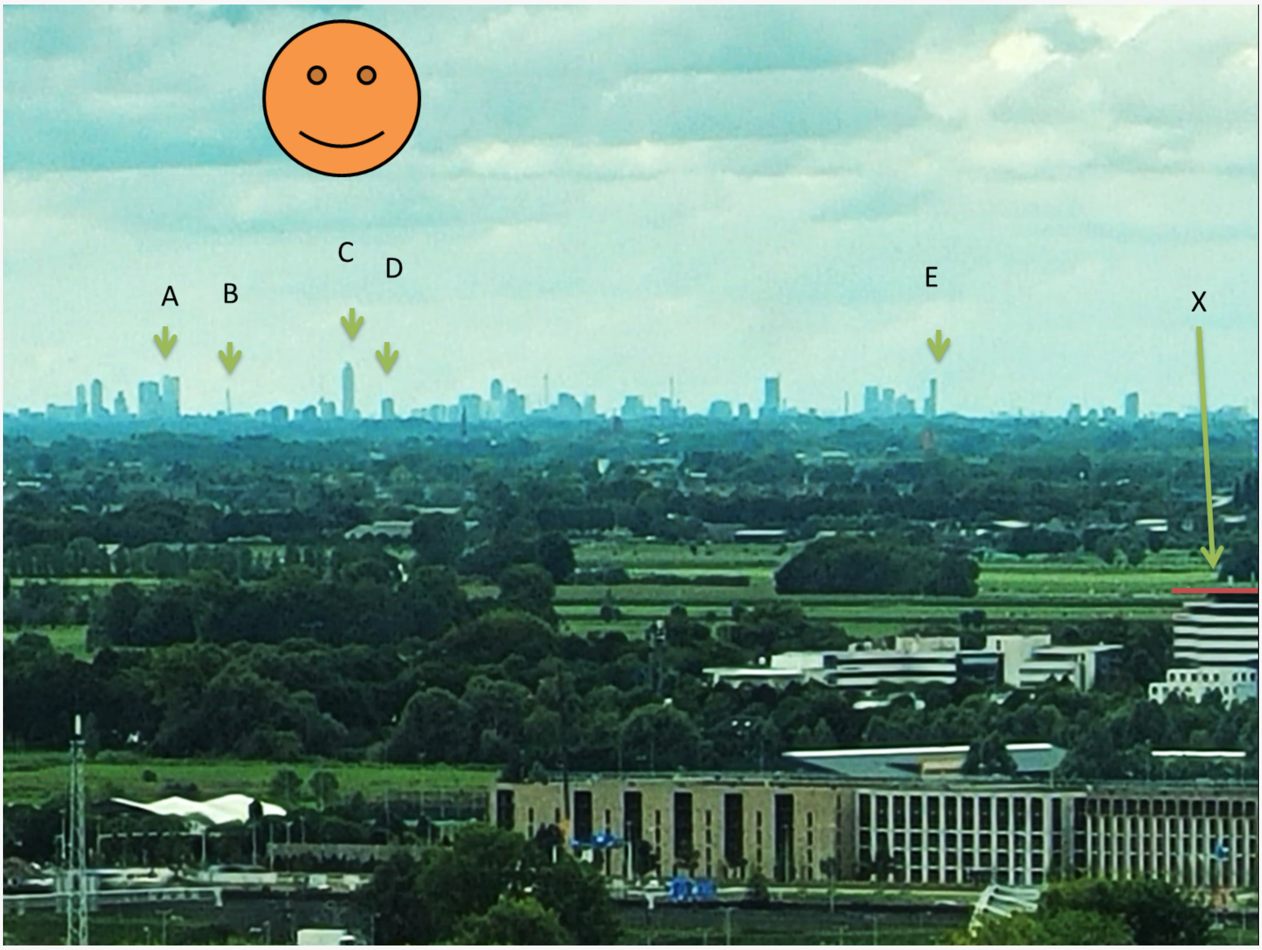
(**100 b**, autor: Martin Okánik)

V tejto úlohe využijete astronómiu a jednoduchú geometriu na záchranu ľudského života. Autor úlohy uviazol v neznámej budove v neznámom meste na Zemi. Kontakt s ním ste stratili popoludní 22. 8. 2025, keď vám poslal správu „Goededag, ik ben in een groot probleem in mijn werk. SOS“ a priloženú fotku (obrázok 5.1). Podarí sa vám ho na základe tejto fotky nájsť, kým bude príliš neskoro... a dôjde mu zásoba *stroopwafels*?

Po príchode do vášho tajného laboratória vám váš forenzný expert ťažko vysvetliteľným hollywoodskym spôsobom priblížil fotku (obrázok 5.1) v nezmenenej kvalite. Vidíte na nej v diaľke panorámu centra mesta Rotterdam. Na obrázku je vyznačených 5 budov, ktoré váš forenzný expert identifikoval ako:

- Budova A: Maastoren, 165 m.
- Budova B: Erazmusbrug, 139 m.
- Budova C: De Zalmhaven, 215 m.
- Budova D: De Hoge Heren, 102 m.
- Budova E: Deelftse Poort, 151 m.

Navyše je na obrázku zaznačená budova X vo vzdialenosti 4370 metrov od pozorovateľa, ktorej strecha (vo výške 42 metrov nad zemou) je zaznačená červenou čiarou. Autor úlohy, uviaznutý v budove, si tieto údaje o budove X len náhodou pamätal a poslal vám ich. Oranžový smajlík nad budovou C je Slnko v reálnej uhlovej veľkosti, v akej by bolo v tomto čase viditeľné na fotografii, iba je presunuté zo svojej skutočnej uhlovej výšky 32,1° nad horizontom podstatne bližšie k horizontu. Jeho azimut je nezmenený.



Obr. 5.1: Panoráma mesta Rotterdam s vyznačenými budovami a posunutým Slnkom.

Úlohy

(a) *[50 b]* Čo najpresnejšie určte súradnice uviaznutého autora úlohy. Z akého konkrétneho mesta bola vyhotovená snímka?

(b) *[30 b]* Z akej výšky nad (plochou) holandskou zemou bola urobená snímka? Podporte nákresom a výpočtom.

(c) *[20 b]* Určte pravý slnečný čas a občiansky pásmový čas vyhotovenia fotografie. Pamätajte na poznámku o skutočnej výške Slnka. Smelo použite Stellarium alebo podobný astronomický softvér.

Bonusová úloha: Dobrovoľne sa môžete pokúsiť z informácií, ktoré ste zistili v tejto úlohe (a vašej detektívnej práce), presne určiť budovu a poschodie, z ktorého bola snímka vyhotovená. Za túto podúlohu neudeľujeme body, ale autor najlepšieho riešenia dostane na regionálnom kole suvenírový balík holandských vafieľ *stroopwafels* ako cenu od autora príkladu.

Poznámka k riešeniam: Toto je pomerne netradičná úloha. Vo vašom riešení smiete použiť všetky informácie, ktoré nájdete na internete, keďže v zadaní nenájdete všetky potrebné informácie. Odporúčame aj 3D funkcionalitu v Google Earth na zorientovanie sa v priestore.

(a) Presné geografické súradnice budov A, B, C, D a E vieme zistiť z internetu[1] alebo ich vyčítame z Google Earth. Na určenie polohy pozorovateľa vzhľadom na tieto budovy musíme poznať ich azimut a vzdialenosť. Azimut Slnka (a teda zároveň približne aj budovy C) vieme určiť zo Stellária ako 245°, čo približne zodpovedá juhozápadu. Určenie vzdialenosti je zložitejšie. Ukážme si dve možnosti. 7 b

i. **Z výšky budov** (rýchly a hrubý spôsob, nižší počet bodov).

- V Google Earth si overíme, že budovy C a D, tvoriace najbližší pár a zároveň majúce najväčší rozdiel výšok, sú skutočne veľmi blízko seba (špecificky v radiálnom smere). 3 b
- Na obrázku odmeriame v milimetroch vzdialenosť zodpovedajúcu ich rozdielu výšok (113 m) a porovnáme s veľkosťou v milimetroch zodpovedajúcou uhlovej veľkosti Slnka získanej zo Stelária (0,527°). 4 b
- Odmeraná vzdialenosť zodpovedá asi 23% ± 2% veľkosti slnečného disku, teda asi 0,120° ± 0,011° alebo (2,1 ± 0,2) miliradiánu. Chybu 10% sme v tomto prípade stanovili ako hrubý odhad. 3 b
- Vzdialenosť pozorovateľa L už vieme z uhla v radiánoch a vzdialenosti určiť jednoducho:
$$L = \frac{113\,\mathrm{m}}{0{,}0021\,\mathrm{rad}} = 53\,800\,\mathrm{m}\,. \tag{5.1}$$ 4 b

. Pamätajúc na relatívnu chybu okolo 10% môžme uzavrieť $L = (54 \pm 5)\,\mathrm{km}$.

ii. **Z polohy budov** (trochu zložitejší a potenciálne presnejší spôsob). *alt.* : b

- V Google Earth si nájdeme najvzdialenejšie budovy A a E, nakreslíme funkciou pravítko ich spojnicu a odčítame jej dĺžku ako 2300 metrov a azimut 320°, prípadne 140°, v závislosti od orientácie. 4 b
- Vieme, že azimut Slnka od pozorovateľa je 245°, teda pozorovateľ má od budovy C azimut 245° − 180° = 65°. Spojnica budov A a E preto zviera voči pohľadu pozorovateľa uhol 140° − 65° = 75°. 4 b

[1] Napríklad z `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_tallest_buildings_in_Rotterdam`.

- Z obrázku tiež vidíme, že rozostup medzi budovami A až E je menej než 3° (cca 5-6 slnečných diskov), teda z nášho pohľadu je dostatočne malý na to, aby sme si nemuseli lámať hlavu s perspektívou (ktorá budova je k nám bližšie, atď.). 3 b
- Projekcia vzdialenosti spojnice A – E je fyzická vzdialenosť vynásobená cos 75°, čiže 2120 metrov. 4 b
- Po presnejšom odmeraní je uhlová vzdialenosť medzi A a E rovná 2,56° = 0,0447 rad. 4 b
- Vzdialenosť je preto

$$L = \frac{2300\,\mathrm{m} \cdot \cos 75^\circ}{0{,}0447\,\mathrm{rad}} = 47\,400\,\mathrm{m}\,. \tag{5.2}$$ 4 b

Po pozretí na mapu zistíme že v tomto azimute a vzdialenosti leží práve centrum mesta $\boxed{\text{Utrecht}}$. 3 b

Výsledok druhej metódy je veľmi presný, vzdialenosť k skutočnému miestu pozorovateľa od budovy C je $L = 47{,}4\,\mathrm{km}$. 5 b

Vypočítajme ešte súradnice. Za základňu určíme budovu C (De Zalmhaven) so súradnicami $\Phi_\mathrm{C} = 51{,}9103$ °N a $\lambda_\mathrm{C} = 4{,}4808$ °E. Polomer Zeme berieme ako $R = 6378\,\mathrm{km}$ a azimut Bludného Holanďana ako $A = 65°$. Súradnice Bludného Holanďana sú

$$\Phi_\mathrm{BH} = \Phi_\mathrm{C} + \frac{L \cdot \sin(90^\circ - A)}{R} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 51{,}9103^\circ\,\mathrm{N} + 0{,}1800^\circ\,\mathrm{N} = 52{,}0903^\circ\,\mathrm{N}\,, \tag{5.3}$$ 5 b

a

$$\lambda_\mathrm{BH} = \lambda_\mathrm{C} + \frac{L \cdot \cos(90^\circ - A)}{R\cos\Phi_\mathrm{C}} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 4{,}4808^\circ\,\mathrm{E} + 0{,}6264^\circ\,\mathrm{E} = 5{,}1072^\circ\,\mathrm{E}\,. \tag{5.4}$$ 7 b

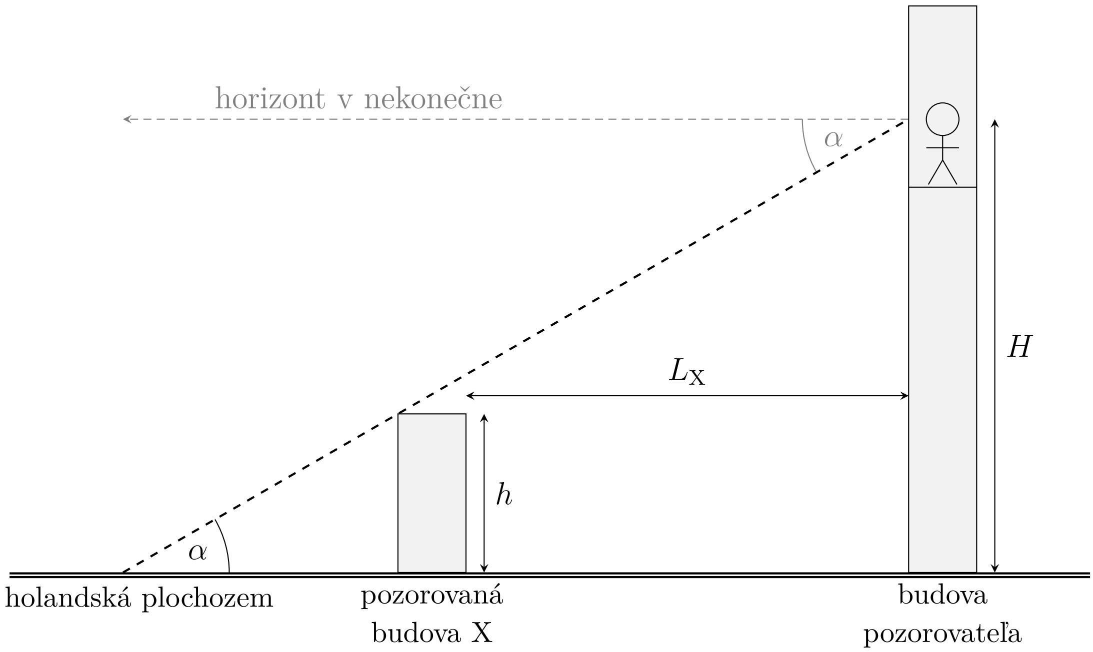
Všimnite si, že sme Zem aproximovali dotyčnou plochou v bode C, keďže vzdialenosť je len cca 50 km, takže sférické efekty sú zanedbateľné. Jediný sférický efekt, ktorý uvažujeme, je nahustenie poludníkov o faktor $\cos\Phi_\mathrm{C}$. Táto poloha je približne pol kilometra od skutočnej polohy autora úlohy

$$\boxed{(52{,}0850^\circ\,\mathrm{N}\,;\,5{,}1803^\circ\,\mathrm{E})}\,, \tag{5.5}$$

dosiahli sme teda presnosť cca 1%.

Poznámka: Uhol 1° v zemepisnej šírke je niečo vyše 100 km, preto vieme jednotlivé desatinné miesta postupne intuitívne interpretovať ako desiatky kilometrov, kilometre, stovky metrov a desiatky metrov. Udávať súradnice budov s väčšou presnosťou nemá veľký zmysel.

(b) Poznáme vzdialenosť budovy X od pozorovateľa $L_\mathrm{X} = 4370\,\mathrm{m}$ a výšku budovy $h = 42\,\mathrm{m}$. Situácia je načrtnutá na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Geometrický náčrt situácie pozorovateľa 7b

Uhol α vieme odčítať z obrázku 5.1 v zadaní, znovu ako nejaký násobok uhlového priemeru slnečného disku. Najväčší problém pri odčítaní tejto hodnoty je správne určiť horizont. Môžme si pomôcť trikom: vieme že 113 metrov zodpovedajúcich rozdielu výšky budov C a D zodpovedá 0,23 slnečného disku. Budova E je vysoká 151 metrov, a z ľubovoľného miesta v centre Utrechtu (kde sa nám podarilo umiestniť pozorovateľa) je v rámci zlomku percenta vzdialenosť budovy E rovnaká ako vzdialenosť budov C a D. Vieme teda, že skutočný horizont bude $(151/113) \cdot 0{,}23$ uhlového priemeru slnečného disku pod vrchom tejto budovy, a paralelný so zdanlivým horizontom tvoreným stromami a vrcholkami budov. Uhol α vychádza ako približne 1,07 slnečného disku, teda asi 0,566°. 8b

Na základe obrázku 5.2 napíšeme rovnicu

$$\tan\alpha = \frac{H - h}{L_X}\,, \tag{5.6}$$ 8b

odkiaľ

$$H = L_X \tan\alpha + h \doteq \boxed{85\,\mathrm{m}}\,. \tag{5.7}$$ 7b

(c) Kľúčové je, že sa jedná o popoludnie 22. 8. 2025, a výška Slnka je 32,1° nad horizontom. Keď nastavíme v Stelláriu čas tak, aby bola táto podmienka splnená, zistíme že občiansky čas je $\boxed{17\,\mathrm{h}\ 12\,\mathrm{min}}$. 9b

Hodinový uhol Slnka cca $3^{\mathrm{h}}\,27^{\mathrm{min}}$ priamo odčítame zo Stellária, 6b

takže pravý slnečný čas je $\boxed{15\,\mathrm{h}\ 27\,\mathrm{min}}$. 5b

Bonusová (detektívna) úloha

V Utrechte sa nachádza niekoľko budov vyšších alebo približne rovnako vysokých ako nájdených 85 metrov. Najvyššou budovou mesta zotrváva s výškou 112 m veža katedrály (Domtoren) z roku 1382, ktorej pozorovacia platforma je ale vo výške až vyše 100 m, výrazne viac než nájdená výška. Za ňou nasleduje budova Rabobank so 105 m. Niekoľko budov v rozmedzí 80 m až 90 m sa nachádza severozápadne od vlakovej stanice.

Na pomoc nám príde perspektíva. Budova X (ak ju viete nájsť na mape) sa nachádza na správnom mieste v porovnaní s pozadím Rotterdamu jedine z budovy $\boxed{\text{Rabobank}}$. Budovu X viete nájsť hľadaním v oblasti cca 4 km od centra Utrechtu v smere na Rotterdam. Na obrázku vidíte televíznu vežu a diaľničný nadjazd (asi 2,5 km od centra), za ktorými je pole a priemyselná štvrť s kancelárskymi budovami, vrátane X. Poschodie určíme hrubým odhadom. Budova Rabobank má 25 kancelárskych poschodí, nad ktorými su dve technické (bez okien), ktoré sú výrazne vyššie ako pod nimi ležiace kancelárske. Autor príkladu bude uviaznutý zrejme niekde $\boxed{\text{medzi poschodiami 23 a 25}}$.

Zoznam konštánt (SŠ)

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	c	$= 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
gravitačná konštanta	G	$= 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^{3}\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
elementárny elektrický náboj	e	$= 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Coulombova konštanta	k_e	$= 8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m^{3}\,kg\,s^{-2}\,C^{-2}}$
Planckova konštanta	h	$= 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
univerzálna plynová konštanta	$\bar{R}$	$= 8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
Boltzmannova konštanta	k_B	$= 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	σ	$= 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Wienova posunovacia konštanta	b	$= 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
Hubblova konštanta	H_0	$= 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$

Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň	$= 24\,\mathrm{h}$
siderický (hviezdny) deň	$t_\oplus$	$= 23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}\ 4{,}1\,\mathrm{s}$
juliánsky rok	rok	$= 365{,}25\,\text{dní}$
siderický rok	$P_\oplus$	$= 365{,}2564\,\text{dní}$
tropický rok	$P_\oplus^\mathrm{trop}$	$= 365{,}2422\,\text{dní}$
anomalistický rok	$P_\oplus^\mathrm{anom}$	$= 365{,}2596\,\text{dní}$
astronomická jednotka	au	$= 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
svetelný rok	ly	$= 9{,}461 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$
parsek	pc	$= 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$
Jansky	Jy	$= 10^{-26}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$

Slnko

hmotnosť Slnka	$\mathcal{M}_\odot$	$= 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
polomer Slnka	$R_\odot$	$= 6{,}957 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_\odot$	$= 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_\odot$	$= 5772\,\mathrm{K}$
farebná teplota Slnka	$T_\odot^\mathrm{color}$	$= 5900\,\mathrm{K}$
zdanlivá vizuálna magnitúda Slnka	$m_\odot$	$= -26{,}74\,\mathrm{mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda Slnka	$m_\odot^\mathrm{bol}$	$= -26{,}83\,\mathrm{mag}$
absolútna vizuálna magnitúda Slnka	$M_\odot$	$= 4{,}83\,\mathrm{mag}$
absolútna bolometrická magnitúda Slnka	$M_\odot^\mathrm{bol}$	$= 4{,}74\,\mathrm{mag}$

Planéty

excentricita dráhy Zeme	$e_\oplus$	$= 0{,}0167$
inklinácia rotačnej osi Zeme	ε	$= 23^\circ\,26'$
Tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme	g	$= 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

planéta	polomer	hmotnosť	veľká polos dráhy
Merkúr ☿	$R_{\mercury} = 2440\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\mercury} = 3{,}302 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$	$a_{\mercury} = 0{,}387\,\mathrm{au}$
Venuša ♀	$R_{\venus} = 6052\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\venus} = 4{,}867 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$a_{\venus} = 0{,}723\,\mathrm{au}$
Zem ⊕	$R_{\oplus} = 6378\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\oplus} = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$a_{\oplus} = 1\,\mathrm{au}$
Mars ♂	$R_{\mars} = 3393\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\mars} = 6{,}417 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$	$a_{\mars} = 1{,}524\,\mathrm{au}$
Jupiter ♃	$R_{\jupiter} = 69\,911\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\jupiter} = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$	$a_{\jupiter} = 5{,}204\,\mathrm{au}$
Saturn ♄	$R_{\saturn} = 58\,232\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\saturn} = 5{,}683 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$	$a_{\saturn} = 9{,}583\,\mathrm{au}$
Urán ⛢	$R_{\uranus} = 25\,362\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\uranus} = 8{,}681 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}$	$a_{\uranus} = 19{,}191\,\mathrm{au}$
Neptún Ψ	$R_{\Psi} = 24\,764\,\mathrm{km}$	$\mathcal{M}_{\Psi} = 1{,}024 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$	$a_{\Psi} = 30{,}069\,\mathrm{au}$

Mesiac

polomer Mesiaca	$R_{☾} = 1737\,\mathrm{km}$
hmotnosť Mesiaca	$\mathcal{M}_{☾} = 7{,}346 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
veľká polos dráhy Mesiaca	$a_{☾} = 3{,}844 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
siderická obežná doba Mesiaca	$P_{☾} = 27{,}32\,\text{dní}$
synodická obežná doba Mesiaca	$S_{☾} = 29{,}53\,\text{dní}$
inklinácia dráhy Mesiaca voči ekliptike	$i_{☾} = 5^\circ\,8'$
excentricita dráhy Mesiaca	$e_{☾} = 0{,}0549$
zdanlivá vizuálna magnitúda Mesiaca v splne	$m_{☾} = -12{,}74\,\mathrm{mag}$

Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

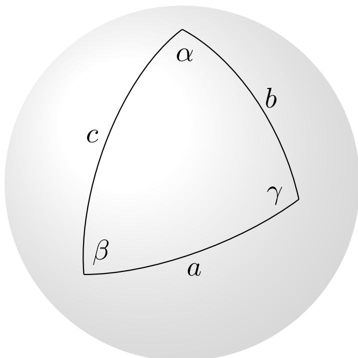
$$\cos a = \cos b\,\cos c + \sin b\,\sin c\,\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos a$$

Sférický exces (v radiánoch):

$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

= plocha trojuholníka na jednotkovej sfére.



Vzťahy pre elementy dráhy

polárna rovnica kužeľosečky: $r = \frac{p}{1+e\cos\vartheta}$, $p = \frac{L^2}{GMm^2} = a(1-e^2)$

stredná anomália: $M = (t-t_0)\sqrt{\frac{GM}{p^3}\left(1-e^2\right)^3} = 2\pi\,\frac{t-t_0}{P}$

Keplerova rovnica pre elipsu: $M = E - e\sin E$, $\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\nu}{2}$

Barkerova rovnica pre parabolu: $t - t_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{GM}}\left(\tan\frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\nu}{2}\right)$

Keplerova rovnica pre hyperbolu: $M = e\sinh F - F$, $\tanh\frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,\tan\frac{\nu}{2}$