

Astronomická olympiáda 2025

Kolo: celoslovenské kolo
Kategória: **stredná škola**

Dátum súťaže: 06. 05. 2025
Čas na vypracovanie: 6 h

- Každý príklad riešte *jednostranne na samostatný list*.
V hlavičke zakrúžkujte vašu kategóriu a typ príkladu,
vyplňte meno, priezvisko, názov príkladu,
poradové číslo strany a celkový počet strán.
- Povolené pomôcky: písacie a rysovacie potreby,
neprogramovateľné kalkulačky a občerstvenie.
- Pri výpočtoch použite hodnoty konštánt, jednotiek
a veličín uvedených v priloženom *konštantovníku*.
Upozorňujeme, že nie všetky konštanty sú potrebné.
- Výsledok zaokrúhlite na relevantný *počet platných číslic*.



Slovenská ústredná hvezdáreň
v Hurbanove

**Slovenská
Astronomická
Spoločnosť**
pri Slovenskej akadémii vied

Teoretické úlohy

Dokopy je možné získať **1000b**

T1 Mozart

(60 b, autor: Terézia Hanáková)

Wolfgang Amadeus Mozart, jeden z najväčších hudobných komponistov, sa narodil 27. 1. 1756. V tomto mesiaci nastalo hneď niekoľko astronomických úkazov, medzi ktorými bola 21. 1. aj konjunkcia Saturna.

- (a) [30 b] Jeho priateľ mu na štrnásté narodeniny povedal, že posledné leto pozoroval presne tento istý úkaz – konjunkciu Saturna. Nepamätal si však, ktorý dátum to bolo. Pomôžte im to zistiť.
- (b) [20 b] Mozarta to zaujalo, a preto sa rozhodol, že najbližšie bude túto konjunkciu pozorovať aj on. Kedy to bude? Výsledok uveďte s najväčšou presnosťou, ako je rozumné.
- (c) [10 b] Prečo v realite nastanú časové odchýlky od vášho výsledku?

Uvažujte, že konjunkcia z januára 1756 nastala, ako uvádzajú historické zdroje, o 18:49 lokálneho pásmového času a obežná doba Saturna je 10 757,736 48 dní. Dráhy planét považujte za kruhové. Obežnú dobu Zeme uvažujte 365,256 360 4 dní.

T2 Exoplanéta okolo pulzaru

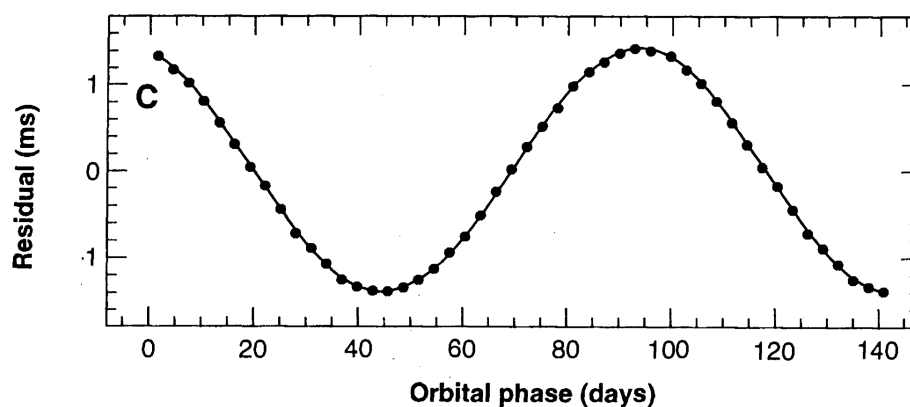
(48b, autor: Samuel Buranský)

V praxi poznáme viacero metód objavovania nových exoplanét. Dve najznámejšie sú metódy tranzitov a radiálnych rýchlostí. Hneď prvá exoplanéta bola však objavená inou metódou, „pulsar timing method“. Ide o to, že ak planéta obieha pulzar (alebo v princípe akúkoľvek hviezdu, ktorá vykazuje periodický jav) tak vplyvom obehu planéty okolo hviezdy budú pulzy v pravidelných intervaloch prichádzať v predstihu alebo v oneskorení. Dôvod týchto zmien je to, že pri obehu nielen planéta, ale aj pulzar obieha spoločné ťažisko. To znamená, že raz je k nám pulzar fyzicky bližšie a raz ďalej, čo presne korešponduje s tým, že pulz dorazí skôr alebo neskôr ako by sme očakávali, z dôvodu, že svetlo z pulzaru musí prejsť väčšiu, prípadne menšiu, vzdialenosť smerom k nám.

V tejto úlohe sa pozrieme na objav hneď prvej exoplanéty (systému exoplanét), a to pri pulzare PSR B 1257+12. Objav uskutočnil poľský astronóm A. Wolszczan v roku 1994. V úlohe predpokladajte (typickú) hmotnosť pulzaru $M_{\text{psr}} = 1,4 M_{\odot}$.

K úlohe je priložený graf časového vývoja O – C (obr. T2.1), teda rozdiel pozorovaných a skutočných časov príchodov pulzov spôsobený planétou PSR 1257+12c s hmotnosťou m_p . Pri výpočte využite aproximáciu $m_p \ll M_{\text{psr}}$, čo zároveň znamená, že pulzar je k ťažisku oveľa bližšie než planéta. Zistite nasledujúce parametre planéty a pulzaru:

- (a) [10b] obežnú dobu planéty okolo pulzaru,
- (b) [12b] vzdialenosť pulzaru od ich spoločného ťažiska,
- (c) [14b] veľkú polos planéty,
- (d) [12b] hmotnosť planéty.

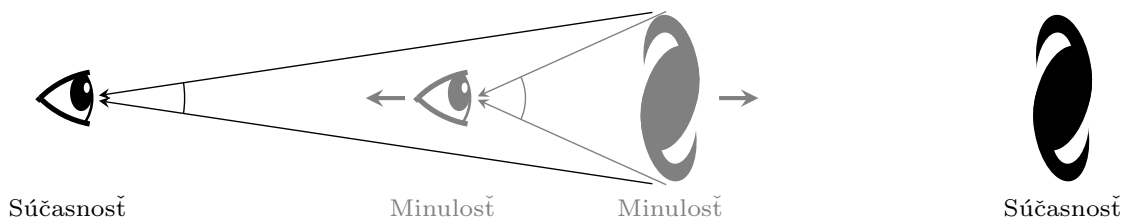


Obr. T2.1: O – C („Observed-minus-calculated“) diagram oneskorení príchodov pulzov spôsobených planétou PSR 1257+12c. Kredit: Wolszczan 1994

T3 Podivné kozmologické vzdialenosti (60b, autor: Jana Švrčková)

V kozmológii sa vyskytujú javy, ktoré sa natoľko vymykajú našej bežnej skúsenosti, že sa nám na prvý pohľad zdajú až paradoxné. Jeden z nich sa týka aj uhlovej veľkosti, pod akou pozorujeme objekty hlbokého vesmíru. Z našej bežnej skúsenosti vieme, že čím je objekt ďalej, tým sa nám javí menší, teda má menší uhlový rozmer. Tento fakt sa dá využiť na určenie vzdialenosti objektu, za predpokladu, že poznáme jeho fyzický rozmer.

V kozmológii to ale nie je tak jednoduché. Existuje určitá vzdialenosť, od ktorej sa uhlový priemer objektu s pribúdajúcou vzdialenosťou začne zväčšovať. Tento efekt sa dá zjednodušene vysvetliť ako dôsledok konečnej rýchlosti svetla. Lúče svetla pochádzajúce z galaxie z raného vesmíru, k nám od nej cestovali dlhú dobu a pochádzajú z čias, kedy bola galaxia oveľa bližšie. Galaxiu kvôli tomu v podstate vidíme pod uhlovým priemerom, aký mala v čase, keď z nej vyrazili lúče svetla. Kvôli expanzii vesmíru je ale v súčasnosti vo väčšej vzdialenosti, ktorá by mala zodpovedať menšiemu uhlovému priemeru ako pozorujeme (viď obrázok).



Konkrétna vzdialenosť, v ktorej prevládne tento kozmologický efekt a uhlový priemer objektov sa začne zväčšovať, závisí na geometrii a hustote jednotlivých zložiek vesmíru. Miesto, v ktorom k tomu dochádza, nazveme bod obratu uhlovej vzdialenosti.

Na to, aby sme dokázali vypočítať hodnotu tejto vzdialenosti, budeme potrebovať dve základné rovnice popisujúce vývoj vesmíru: Friedmannovu rovnicu a deceleračnú rovnicu.

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (\text{T3.1})$$

$$-2qH^2 + H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi G}{c^2}P. \quad (\text{T3.2})$$

H je Hubble-Lemaîtreov parameter, K je krivosť vesmíru, a je faktor škály, ρ je súčet hustoty hmoty a žiarenia, Λ je kozmologická konštanta, P je tlak žiarenia a q je deceleračný parameter (číselné vyjadrenie spomaľovania rozpínania vesmíru). Hodnota krivosti je $+1$ pre sférickú, 0 pre plochú a -1 pre hyperbolickú geometriu vesmíru.

- (a) [10b] Vypočítajte hodnotu deceleračného parametra pre plochý vesmír bez tmavej energie, ktorý sa skladá iba z hmoty. Tieto predpoklady považujte za pravdivé aj vo všetkých zvyšných podúlohách.

Ak poznáme lineárny (fyzický) aj uhlový priemer objektu, vieme vypočítať jeho tzv. uhlovú

vzdialenosť d_A – teda vzdialenosť, z akej by sme objekt s priemerom D pozorovali pod uhlovým priemerom θ , ak by sme neuvažovali žiadne kozmologické efekty. Uhlovú vzdialenosť vieme v kozmológii určiť aj na základe červeného posunu z , za predpokladov uvedených v úlohe (a) pre ňu totiž platí Mattigov vzťah:

$$d_A = \frac{c}{Hq^2} \cdot \frac{zq + (q-1)(\sqrt{2qz+1}-1)}{(1+z)^2}. \quad (\text{T3.3})$$

- (b) [30 b] Vypočítajte červený posun bodu obratu uhlovej vzdialenosti, teda miesta, na ktorom sa uhlový rozmer objektu s narastajúcou vzdialenosťou začne zväčšovať.

Zatiaľ čo v klasickej fyzike vzdialenosti určené rôznymi metódami sú v princípe rovnaké, v kozmológii toto neplatí. Existuje niekoľko rôznych definícií vzdialenosti, pričom každá z nich má inú hodnotu. Pre malé hodnoty červeného posunu sa ale všetky rovnajú, tak ako by sme to čakali podľa našich bežných skúseností.

- (c) [20 b] Vypočítajte uhlovú vzdialenosť d_A (v parsekoch) pre červený posun bodu obratu a porovnajte ju so vzdialenosťou, ktorá vychádza z Hubblovho zákona. Ktorá je väčšia a koľkokrát?

Nápoveda: funkcia v tvare $f(x) = A \cdot (x^b - x^c)$ má maximum v bode x spĺňajúcom rovnicu

$$A \cdot (bx^{b-1} - cx^{c-1}) = 0. \quad (\text{T3.4})$$

T4 Hviezdna evolúcia

(70b, autor: Jana Švrčková)

Hviezdna evolúcia sa dá rozdeliť do troch významných etáp, pričom každá z nich je domino-
vaná určitým fyzikálnym procesom. Všetky tieto procesy prebiehajú na určitej charakteristickej
časovej škále, ktorá nám dáva dobrý odhad toho, ako dlho trvá dané štádium života hviezdy.

Nukleárna časová škála je čas, za ktorý hviezda vyžiari všetku energiu, ktorú môže získať z jad-
rových reakcií. Z teoretických modelov vieme, že hviezda stihne na jadrové reakcie (premenu
vodíka na hélium) spotrebovať iba 10 % vodíka predtým, ako začnú prevládať iné, rýchlejšie
evolučné mechanizmy. Na energiu sa v jadrových reakciách premení len 0,7 % pokojovej
hmotnosti jadier, ktoré saúčastnia reakcií.

- (a) [15 b] Napíšte všeobecné vyjadrenie pre nukleárnu časovú škálu t_n a vypočítajte jej číselnú
hodnotu pre Slnko. Pre jednoduchosť predpokladajte, že hviezdy sa skladajú iba z vodíka.

Termálna (Kelvinova-Helmholtzova) časová škála je čas, za ktorý by hviezda vyžiarila všetku
svoju tepelnú energiu za predpokladu, že by neprebíhali žiadne jadrové reakcie. Táto škála je
zároveň dobrým odhadom času, za ktorým sa žiarenie dostane zo stredu hviezdy na jej povrch.

Z termodynamiky vieme, že tepelná (vnútorná) energia plynu sa rovná celkovej kinetickej ener-
gii E_k častíc plynu. Predpokladajte, že hviezdy majú rovnomerne rozloženú hustotu a sú vo
virialovej rovnováhe. Gravitačná väzbová energia takejto hviezdy je

$$E_p = -\frac{3GM^2}{5R}. \quad (\text{T4.1})$$

- (b) [20 b] Napíšte všeobecné vyjadrenie pre termálnu časovú škálu t_t a vypočítajte jej číselnú
hodnotu pre Slnko.

Dynamická škála je čas, za ktorý by hviezda skolabovala, ak by proti gravitácii nepôsobil
gradient tlaku. Počíta sa ako čas voľného pádu častice z povrchu do stredu hviezdy.

Voľný pád z povrchu do stredu hviezdy si môžete predstaviť ako pohyb po veľmi tenkej elipse
s apocentrom na povrchu a pericentrom v strede hviezdy. Môžete predpokladať, že všetka
hmotnosť je sústredená v strede hviezdy.

- (b) [20 b] Napíšte všeobecné vyjadrenie pre dynamickú časovú škálu t_d a vypočítajte jej čí-
selnú hodnotu pre Slnko.

- (c) [15 b] Upravte všeobecné výrazy pre všetky tri časové škály do nasledujúceho tvaru

$$t_x = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^a \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^b \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^c t_{x\odot}, \quad (\text{T4.2})$$

kde t_x je časová škála hviezdy, $x = \{n, t, d\}$, $t_{x\odot}$ je časová škála Slnka, R , M a L sú polomer,
hmotnosť a svietivosť hviezdy. Konštanty a , b a c sú pre každú časovú škálu odlišné.

T5 Snímam, snímam a nič nejde

(70b, autor: Samuel Amrich)

V súčasnosti takmer všetky veľké ďalekohľady využívajú adaptívnu optiku (nezamieňať s aktívnou optikou). Tá má za účel kompenzovať chaotické pohyby atmosféry (tzv. seeing), ktoré by inak spôsobovali rozmazanie obrazu. K oprave seeingu je ale potrebné vedieť, aké je aktuálne narušenie atmosféry (merané v uhlových sekundách). Pre tento účel môže slúžiť Shackov-Hartmanov senzor.

Shackov-Hartmanov senzor je v základoch veľmi jednoduchý prístroj. Nie je to nič iné ako veľký CCD snímač, na ktorý premieta obraz sústava šošoviek usporiadaná do mriežky. Čo znamená, že každá takáto šošovka (malý okulár) vytvára na svojej časti snímača („plôške“) obraz hviezdy z inej časti primárneho zrkadla. Ak je optický systém dokonalý a ovplyvnenie svetla atmosférou nulové, potom hviezdy vytvárajú bodový obraz presne v strede tejto plôšky. Ak však svetlo prechádza cez nerovnomerné prostredie (napr. cez zemskú atmosféru), tieto obrazy hviezd sa posunú. Meraním týchto posunov dokážeme určiť ako sa svetlo skreslilo a následne informáciu vieme využiť na korekciu obrazu za pomoci terciárneho, deformovateľného zrkadla.

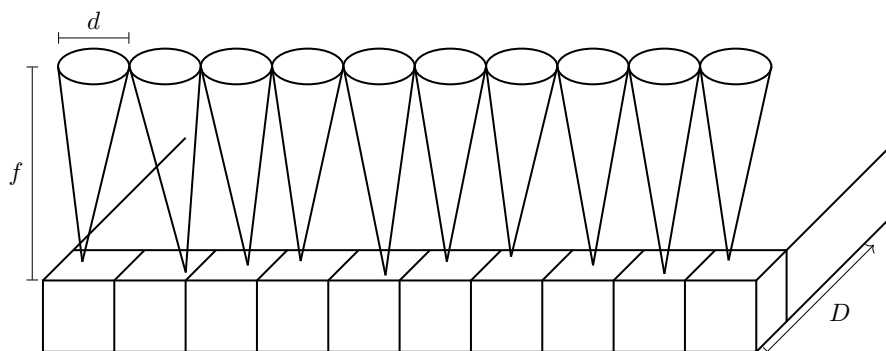
Tieto snímače ale majú svoje obmedzenia, a jedno z nich je maximálny seeing, ktorý sú schopné opraviť. Tento maximálny seeing je moment, kedy už niektorá zo šošoviek premieta obraz hviezdy mimo svoju časť snímača.

$$\text{Veľkosť strany snímača: } D = 8 \text{ cm.} \quad (\text{T5.1})$$

$$\text{Počet pixelov na snímači: } N = 4 \text{ Mpx.} \quad (\text{T5.2})$$

$$\text{Veľkosť strany plôšky: } d = 5 \text{ mm.} \quad (\text{T5.3})$$

$$\text{Ohnisková vzdialenosť šošoviek: } f = 12 \text{ cm.} \quad (\text{T5.4})$$



Obr. T5.1: Nákres jedného riadku Shackovho-Hartmanovho senzora s vyznačenými všetkými dôležitými parametrami, ktorých hodnoty sú uvedené vyššie.

Úlohy

- (a) [10b] Koľko pixelov (označme n^2) pripadá na jednu štvorcovú plôšku (so stranou n pixelov), ktorá je vyhradená pre jeden okulár a teda slúži na zachytávanie obrazu z jednej časti primárneho zrkadla? Snímač, ako aj pixely, sú štvorcové.

- (b) [30b] Vypočítajte maximálny opraviteľný seeing v uhlových sekundách, označme ho Ξ , ktorý je schopný opraviť Shackov-Hartmanov senzor s parametrami uvedenými nižšie.
- (c) [30b] Vypočítajte aj teoreticky najmenší zachytiteľný seeing ξ . Pre jednoduchosť predpokladajte, že obraz hviezdy je menší ako veľkosť pixelu, a teda, že svetlo hviezdy vždy dopadá iba do jedného konkrétneho pixelu. Zároveň neuvažujte ďalšie matematické spracovanie obrazu.

T6 Lyman vs Balmer

(80b, autor: Samuel Amrich)

Jeden nadaný astrofyzik si počas štúdií veľmi obľúbil Johanna Jakoba Balmera, ale zato sa mu zneľúbil Theodore Lyman IV. Preto sa rozhodol, že vytvorí hypotetickú časticu Košicetrón, ktorá má úplne rovnaké vlastnosti ako elektrón, ale má inú hmotnosť. Pomocou nej vytvoril nový atóm vodíka, kde v obale nie je elektrón, ale práve Košicetrón. Akú hmotnosť m_K musí mať Košicetrón, v hmotnostiach elektrónu m_e , aby nová čiara Lyman- α mala vlnovú dĺžku ako pôvodná čiara Balmer- α ? Na akú vlnovú dĺžku sa posunie nová čiara Balmer- α ? Je táto čiara stále okom viditeľná?

Pre občerstvenie pamäte, Lymanova čiara α je prechod elektrónu v atóme vodíka z druhej na prvú hladinu ($2 \rightarrow 1$) a Balmerova čiara α je prechod elektrónu v atóme vodíka z tretej na druhú energetickú hladinu ($3 \rightarrow 2$). Samotné hodnoty vlnových dĺžok sú

$$\lambda_{L\alpha} = 121,567 \text{ nm} \quad , \quad \lambda_{B\alpha} = 656,279 \text{ nm} \quad , \quad (\text{T6.1})$$

pre Lyman- α , respektíve Balmer- α čiaru. Pre výpočet budete potrebovať Rydbergov vzorec. Ak ho nepoznáte, viete si ho odvodiť z predpokladu, že elektrón, respektíve Košicetrón, obieha okolo nehybného protónu po stabilnej kruhovej dráhe a moment hybnosti podlieha kvantovaniu

$$L = n\hbar \quad , \quad (\text{T6.2})$$

kde $\hbar = h/2\pi$ je redukovaná Plancková konštanta a n je hlavné kvantové číslo, číslo hladiny.

T7 Vrch na Marse

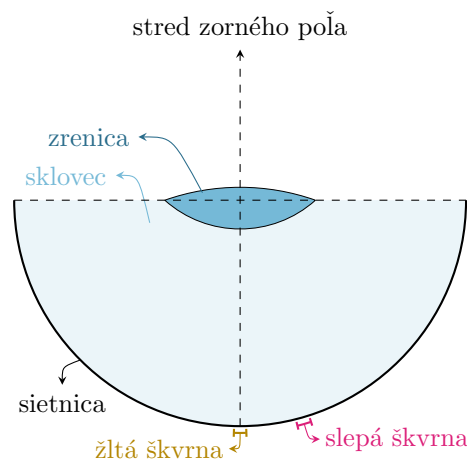
(120b, autor: Terézia Hanáková & Radovan Lascsák)

Sonda, ktorá obieha Mars na polárnej dráhe vo výške $h = 357 \text{ km}$ zistila, že najdlhší tieň počas roka, ktorý vrhá vrch Apollinaris na pravé poludnie, má dĺžku až 119 km . Dĺžka tohto tieňa sa merala od konca vrchu, ktorý má priemer 33 km . V čase, kedy sonda zaznamenala dĺžku tieňa, sme zo Zeme pozorovali, ako sa táto sonda vynorila spoza kotúča Marsu práve v čase, keď sa nachádzala presne nad pólom Marsu. Mars sa vtedy voči Zemi nachádzal v opozícii a miesto, z ktorého sme pozorovali, sa nachádzalo v rovine ekliptiky. Na základe týchto informácií určte najväčšiu výšku v strede Apollinarisu, ak sa nachádza na $62^\circ 18' \text{ S}$ areografickej šírky a $175^\circ 45' \text{ E}$ areografickej dĺžky. Predpokladáme, že Mars sa nachádza v rovine ekliptiky a dráhy Marsu aj Zeme sú kruhové.

T8 Škvrny v oku

(120b, autor: Samuel Buranský)

Na zdravej očnej sietnici ľudí sa nachádza dvojica, takmer protikladných oblastí, a to slepá a žltá škvrna. Slepá škvrna je miesto, cez ktoré je vedený zrkový nerv z vnútra oka do mozgu, čo znamená, že v tomto mieste nie sú žiadne fotocitlivé bunky. Naopak, žltá škvrna je miesto s najhustejším zastúpením čapíkov, ktoré sú schopné farebného videnia. Žltá škvrna je postavená presne naproti očnej šošovke a používa sa pri priamom pohľade. V tomto príklade sa pozrieme bližšie na rozmiestnenie a veľkosť týchto oblastí.



Obr. T8.1: Schéma oka.

David sa pripravoval na Astronomickú olympiádu. Pozoroval pri tom jedným okom (druhé mal zatvorené) hviezdu ζ Oph (RA $16^{\text{h}} 37^{\text{m}} 10^{\text{s}}$, DEC $-10^{\circ} 34' 1''$) priamym pohľadom. (Nepoužíval trik s bočným pohľadom na videnie slabších objektov.) Pred pozorovanou hviezdou mu preletelo lietadlo vo vzdialenosti 12 km od neho. O chvíľu, v momente, keď lietadlo preletí popred hviezdu σ Sgr (RA $18^{\text{h}} 55^{\text{m}} 49^{\text{s}}$, DEC $-26^{\circ} 17' 50''$), tak ho na chvíľu prestane vidieť, a objaví sa znova po 13,2 s.

(a) [60 b] Spočítajte priemer slepej škvrny v mm.

(b) [60 b] Spočítajte vzdialenosť slepej a žltej škvrny v mm.

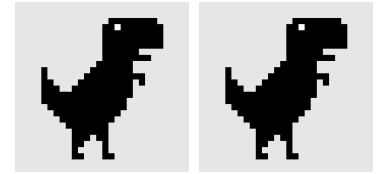
Ludské oko je vyplnené kvapalinou (sklovec) s indexom lomu 1,336. Svetlo do neho vstupuje cez šošovku, o ktorej budeme predpokladať, že je tenká a zobrazuje ideálne. Rovnobežné lúče koncentruje do bodu na sférickej sietnici v zadnej časti oka. Polomer krivosti sietnice je 10,5 mm a jej stred je v strede šošovky. Slepú a žltú škvrnu považujeme za dokonale kruhové a ich vzdialenosťou rozumieme vzdialenosť ich stredov.

Bude sa vám hodiť rýchlosť lietadla 850 km h^{-1} , pričom pre jednoduchosť predpokladajte, že celé pozorovanie sa deje v blízkosti zenitu (hviezda ζ Oph sa nachádza priamo v zenite a oko je počas celého pozorovania nasmerované priamo na ňu), lietadlo je bodový zdroj svetla, prechádza presne stredom slepej škvrny a nemení vzdialenosť od Davida.

T9 Extinkcia dinosaurov 2

(160b, autor: Martin Okánik)

V regionálnom kole sme fyzický polomer častice sadze r_s považovali za rovný polomeru s akým častica rozptyľuje svetlo, čo je intuitívne logické, no v skutočnosti to tak v dôsledku vlnovej povahy svetla nemusí byť. Efektívny polomer častice pre interakciu so svetlom r_{ef} môže byť v závislosti na vlnovej dĺžke λ iný než r_s .



Ak vezmeme do úvahy túto skutočnosť, vzťah pre kolmú projekciu povrchu častice sadze bude πr_{ef}^2 a pre jej skutočný objem $\frac{4}{3}\pi r_s^3$. Všeobecný výsledok z regionálneho kola bude mať alternatívnu podobu:

Obr. T9.1: Rekonštrukcia dvojice dinosaurov z rodu *theropoda*.

$$I_{\text{povrch}} = I_0 \exp\left(-\frac{3Mr_{\text{ef}}^2}{16\pi R_{\oplus}^2 \rho_s r_s^3}\right). \quad (\text{T9.1})$$

Táto rovnica popisuje útlm priameho (nerozptýleného) svetla pri prechode z vrchu atmosféry (I_0) na zemský povrch (I_{povrch}). V rovnici je $M = 3 \cdot 10^{11}$ kg celková hmotnosť sadzí (homogénne rozptýlených v atmosfére), $\rho_s = 2000 \text{ kg m}^{-3}$ hustota každej častice sadze a $R_{\oplus}$ polomer Zeme.

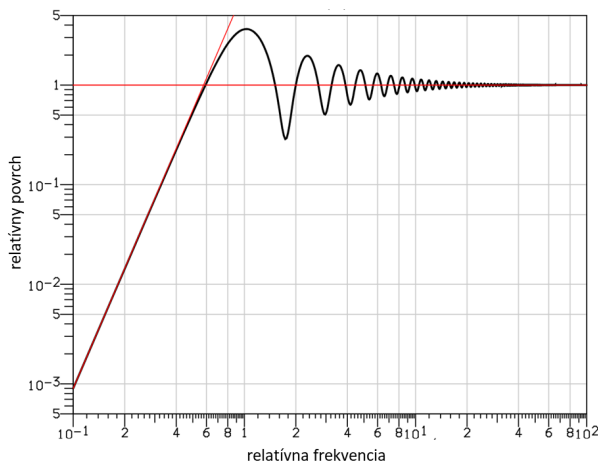
Keďže sa v tejto úlohe budeme zaoberať závislosťou r_{ef} a rôznych žiarivých tokov na λ , namiesto žiarivého toku v celom spektre, predtým značenom písmenom I [W m^{-2}], tak budeme používať veličinu spektrálna intenzita $J(\lambda)$ [$\text{W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$], ktorá vyjadruje I v jednotkovom intervale vlnových dĺžok $[\lambda, \lambda + 1 \text{ nm}]$. Analogicky, $J_{\text{povrch}}(\lambda)$ bude hodnota spektrálnej intenzity na povrchu Zeme a $J_0(\lambda)$ jej hodnota dopadajúca na vrch atmosféry. Útlm J budeme počítat rovnako ako I , teda podľa exponenciálneho vzťahu (T9.1), s prihliadnutím na $r_{\text{ef}}(\lambda)$.

Existujú dva režimy rozptylu: Rayleigha a Mieov režim.

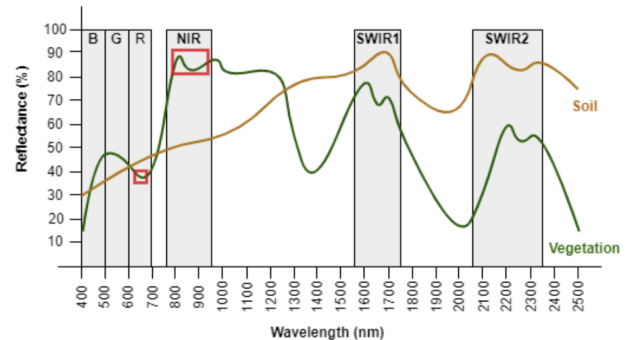
- Rayleigho rozptyl ($r_s \ll \lambda$): r_{ef} sa výrazne mení s λ (presnejšie s pomerom r_s a λ).
- Mieov rozptyl ($r_s \gtrsim \lambda$): $r_{\text{ef}} \approx r_s$, nezávisle na λ .

So silným prípadom Mieovho rozptylu kde $r_s \gg \lambda$ ste sa stretli v RK, kde spôsobovali častice sadze s polomerom $r_s = 3000 \text{ nm}$ rozptyl viditeľného svetla s λ v rozmedzí 400 nm - 700 nm.

Oba režimy rozptylu vidno na dekadicky logaritmickom grafe T9.2i (krivka vľavo), kde na vodorovnej osi je tzv. relatívna frekvencia, definovaná ako $2\pi r_s/\lambda$, a na zvislej osi je tzv. relatívny povrch, definovaný ako $(r_{\text{ef}}/r_s)^2$. V celej úlohe budete môcť vo výpočtoch aproximovať Mieov rozptyl jeho asymptotou pre $r_s \gg \lambda$, a za hranicu medzi Rayleigha a Mieovým režimom môžete považovať priesečník ich asymptót viditeľný na grafe.



(i) log-log krivka pre režimy rozptylu pre rôzne hodnoty relatívnej frekvencie $2\pi r_s/\lambda$.



(ii) spektrálna reflektancia pre rôzne povrchy vo viditeľnej a infračervenej oblasti spektra.

Obr. T9.2: Grafy potrebné na vypracovanie úlohy. Prevzaté 20.4.2025 z

https://en.wikipedia.org/wiki/Mie_scattering,

<https://www.mathworks.com/help/images/spectral-indices.html>.

Úlohy

(a) [15 b] Vyznačte polohy častíc s polomeri $r_s = 30$ nm, 300 nm, 3000 nm na krivke na grafe T9.2i (vľavo) pre viditeľné svetlo s $\lambda = 550$ nm. Stačí len veľmi schematicky načrtnúť krivku a jasne vyznačiť číselné hodnoty súradníc (napr. netrúpte sa či v tej vlnitej časti krivky leží bod na vrchu či v údolí). Do ktorých režimov tieto body spadajú?

(b) [40 b] Z daného grafu (obr. T9.2i) nájdite funkčný vzťah pre efektívny polomer v **Rayleigh** režime v tvare

$$r_{\text{ef}}(\lambda, r_s) = C r_s^A \lambda^B \quad (\text{T9.2})$$

a určte číselné hodnoty A, B, C . Aký je fyzikálny rozmer C ? **Pre výpočty v ďalších úlohách prosím použite číselné hodnoty $A = 3, B = -2, C = 125$.** Na získanie bodov za túto úlohu je nutné jasne ukázať postup.

(c) [25 b] Odvodte spektrálnu intenzitu $J_0(\lambda)$ ktorá dopadá na vrchol zemskej atmosféry zo Slnka. Vyčísľte na vlnových dĺžkach $\lambda = 400$ nm, 500 nm, 600 nm, 700 nm.

Môže sa vám hodiť Planckov zákon pre spektrálnu intenzitu povrchu Slnka ako absolútne čierneho telesa (AČT) v tvare:

$$J_{\odot}(\lambda) = 10^{-9} \cdot \frac{8\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_{\odot}}\right) - 1}, \quad (\text{T9.3})$$

kde h je Planckova konštanta, c je rýchlosť svetla vo vákuu, k_B je Boltzmannova konštanta

a $T_{\odot}$ je efektívna povrchová teplota Slnka. $J_{\odot}(\lambda)$ je v jednotkách $\text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1}$ (ale λ ako také je stále v metroch!)

Graf T9.2ii (vpravo) zobrazuje spektrálnu reflektanciu $\mathcal{R}(\lambda)$, teda pomer odrazeného k prichádzajúcemu žiareniu, pre rôzne typy povrchu: rastliny („vegetation“) a zeminu („soil“), vo viditeľnej a infračervenej oblasti spektra. Na riešenie nasledujúcej úlohy využite vzťah pre Rayleighov rozptyl z úlohy (b).

(d) [70 b] Ak majú všetky sférické častice sadze v atmosfére rovnaké hodnoty r_s , buď 30 nm alebo 300 nm, alebo 3000 nm, vypočítajte na vlnových dĺžkach z predošlej úlohy tieto veličiny (t.j. všetkých 12 kombinácií):

- spektrálnu intenzitu nerozptýleného svetla na povrchu Zeme pohlcovaného rastlinami $J_{\text{absorb}} [\text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1}]$,
- pomer svetla, ktoré sa dostane z vrchu atmosféry na povrch Zeme J_{povrch}/J_0 .

Interpretujte nájsené trendy v závislosti od r_s a λ , predovšetkým pre J_{povrch}/J_0 . Uvažujte, že Slnko je v zenite, a že už nič iné v atmosfére, okrem zmienených častíc sadze, so svetlom neinteraguje.

Pre získanie čiastkových bodov dbajte na dôkladné vysvetlenie svojho postupu a predpokladov, odporúčame odvodiť aj všeobecné vzťahy. Konečné numerické výsledky (d) odporúčame uviesť v prehľadnej tabuľke so stĺpcami r_s , λ , relatívna frekvencia, režim rozptylu, J_{povrch}/J_0 , J_{absorb} , vo vhodných jednotkách.

(e) [10 b] Aj pri správnom postupe je nepravdepodobné, že vaša tabuľka bude presne zodpovedať tej v oficiálnom riešení. Asi akú priemernú chybu očakávate za predpokladu, že máte správny postup a odkiaľ táto chyba pochádza?

T10 Retrográdny Mars

(222b, autor: R. Lascsák & T. Hanáková)

Rado si prezeral spoľahlivé internetové zdroje a dozvedel sa, že *retrográdny pohyb planét a ich umiestnenie v danom čase má mimoriadny vplyv na zostavenie horoskopu*. To ho veľmi zaujalo, no nevedel, ako na to. Pomôžte Radovi pripraviť sa na jeho budúcnosť?

V tejto úlohe považujte dráhy Zeme a Marsu za kružnice, ktoré spolu so Slnkom ležia v jednej rovine. Použite údaje z konštantovníka. Pre polomery dráh $r_{\oplus}, r_{\mars}$ použite hodnoty ich veľkých polos, teda $r_{\oplus} \equiv a_{\oplus}, r_{\mars} \equiv a_{\mars}$. V príklade sa môžete rozhodnúť použiť predpoklad, že sa Mars nepohybuje okolo Slnka, teda je pevne umiestnený v priestore vo vzdialenosti $r_{\mars}$ od Slnka, avšak za každé podzadanie spočítané s týmto predpokladom získate maximálne 20 % bodov.

- (a) [60 b] Počas akého času Δt sa planéta Mars pri pohľade zo Zeme pohybuje po oblohe medzi hviezdami zdanlivo retrográdne (opačným smerom)?
- (b) [30 b] Určte vzdialenosť R Marsu a Zeme na konci retrográdneho pohybu Marsu (v momente zdanlivého zastavenia pri pohľade zo Zeme). Ak sa vám v podzadaní (a) nepodarilo vypočítať Δt , použite hodnotu $\Delta t = 100$ dní.
- (c) [30 b] Vypočítajte zmenu ekliptikálnej dĺžky Marsu $\Delta \lambda$ počas času Δt , teda medzi začiatkom a koncom retrográdneho pohybu. Ak sa vám v podzadaní (a) nepodarilo určiť Δt , použite hodnotu $\Delta t = 100$ dní.
- (d) [30 b] Zistite elongáciu Marsu ε na konci retrográdneho pohybu. Ak sa vám v podzadaní (a) nepodarilo vypočítať Δt , použite hodnotu $\Delta t = 100$ dní.
- (e) [50 b] Pomocou pomeru polomerov dráh Marsu a Zeme $k := r_{\mars}/r_{\oplus}$ a obežnej doby Zeme okolo Slnka $P_{\oplus} = 1 \text{ rok} = 365,25$ dní napíšte čo najjednoduchšie všeobecné vyjadrenia veličín $\Delta t, R, \varepsilon$, ktoré ste vypočítali v podzadaniach (a), (b), (d).
- (f) [20 b] Aké hodnoty nadobúdajú veličiny $\Delta t, R, \varepsilon$ pre k blízke nule a nekonečnu?

Pomôcka: Môžu sa vám hodiť nasledovné trigonometrické identity pre ľubovoľné uhly α, β ;

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$,
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

- (g) [2 b] Na základe vašich výsledkov určte, aké má Rado znamenie. Keďže ešte nesúťažíme na medzinárodnej úrovni, dáme vám na výber z možností:
 - i. Býk,
 - ii. Mečiar,
 - iii. Veľký voz.