

VZOROVÉ RIEŠENIA

Astronomickej olympiády 2025

Kolo: domáce kolo Kategória: stredná škola

1 Röntgenová hviezda (50b)	2
2 Veľké americké zatmenie (70b)	2
3 Pevné kosti (80b)	4
4 Vera Rubin (80b)	6
5 Počítanie hviezd (120b)	11
Zoznam konštánt	18

Dokopy bolo možné získať **400b**.

Zverejnené 12. 02. 2025.

Tento dokument je možné voľne distribuovať nekomerčným spôsobom pre vzdelávacie účely s uvedením zdroja.

Astronomická olympiáda je vedomostná súťaž pre študentov základných a stredných škôl organizovaná na Slovensku už 19-ty rok. Jej cieľom je vzdelávanie v oblasti astronómie a astrofyziky, a výber reprezentantov na Medzinárodnú olympiádu z astronómie a astrofyziky.

Všetky ďalšie dôležité informácie o Astronomickej olympiáde nájdete na stránke www.aosk.sk.

V prípade ľubovoľných otázok nás neváhajte kontaktovať prostredníctvom emailu ao@aosk.sk.



Slovenská ústredná hviezdáreň
v Hurbanove



*Slovenská
Astronomická
Spoločnosť*
pri Slovenskej akadémii vied

Súťaž vyhlasuje Slovenská ústredná hviezdáreň Hurbanovo v spolupráci so SAS pri SAV, s hviezdárňami a planetáriami, astronomickými kabinetmi, osvetovými strediskami, centrami voľného času a regionálnymi kultúrnymi centrami.

1 Röntgenová hviezda

(50b, autor: Samuel Amrich)

Obdobia silnej slnečnej aktivity sa prejavujú mimo iného aj slnečnými erupciami (v angl. *solar flares*). Tie sa zvyknú označovať písmenami A, B, C, M, X, podľa intenzity. Pričom najjasnejšie erupcie typu X, ktoré nie sú až tak výnimočné, dokážu vytvoriť tok v röntgenovej oblasti elektromagnetického spektra na úrovni $F = 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$.

Táto hodnota však môže byť mierne náročná na predstavu. Preto si ju prevedieme na niečo astronomickému oku bližšie. Predstavte si, že celý tento tok F by k nám prichádzal vo viditeľnej oblasti od vzdialenej hypotetickej hviezdy. Akú by mala táto hviezda magnitúdu? Môže sa vám hodiť, že Vega má magnitúdu približne $m_{\text{Vega}} = 0 \text{ mag}$ a vo viditeľnej oblasti z nej zachytávame tok okolo $F_{\text{Vega}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$.

Úloha je vskutku priamočiara. Keďže riešime úlohu s magnitúdami, napíšeme si Pogsonovu rovnicu

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right). \quad (1.1)$$

Pre náš prípad vieme jednoducho do tejto rovnice dosadiť

$$m - m_{\text{Vega}} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_{\text{Vega}}} \right). \quad (1.2)$$

Po dosadení reálnych hodnôt získame výsledok $m \approx -9 \text{ mag}$. Prekvapivé môže byť koľko energie sa počas slnečnej erupcie vyžiarí čisto len v röntgenovej oblasti.

2 Velké americké zatmenie

(70b, autor: R. Lascsák & J. Švrčková)

Výpravu cestovateľov za zatmením Slnka zastihne nepriaznivé počasie, a tak sa rozhodnú mrakom utiecť. Na radarovej predpovedi počasia zistia, že jasná obloha bude počas zatmenia v meste Hot Springs Village. Zaparkovať vedľa pri mexickej reštaurácii El Padrino, ktorá sa nachádza presne jednu hodinu jazdy autom od ich štartovnej polohy.

Podarí sa im tam docestovať pred začiatkom úplného zatmenia, ak v momente ich štartu sa v Hot Springs Village práve začalo čiastočné zatmenie Slnka (kotúč Mesiaca sa zdanlivo na oblohe prvýkrát dotkol kotúča Slnka)? Predpokladajte, že dráhy Zeme a Mesiaca sú kružnice a polomer Mesiaca je 1800 km.

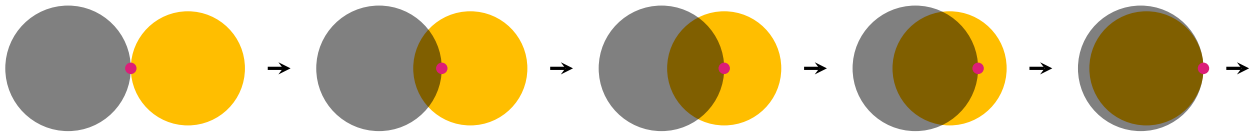
Na vyriešenie tejto úlohy musíme najskôr odpovedať na 2 otázky. Akú uhlovú vzdialenosť α musí Mesiace prejsť medzi začiatkom čiastočného a začiatkom úplného zatmenia? Akou uhlovou rýchlosťou $\omega_{\odot}$ sa Mesiace pohybuje po oblohe vzhľadom na Slnko? Následne čas t , ktorý má výprava na docestovanie pred El Padrino, bude

$$t = \frac{\alpha}{\omega_{\odot}}. \quad (2.1)$$

Počas fázy čiastočného zatmenia Mesiace postupne zakrýva Slnko, ako vidíme na obrázku 2.1. Ružovou farbou je znázornený bod na okraji Mesiaca, ktorý počas doby čiastočného zatmenia putuje popred kotúč Slnka. Znázornili sme takto pohyb Mesiaca po oblohe relatívne k Slnku. Celková prejdená uhlová vzdialenosť počas doby zakrývania Slnka bude α = uhlový priemer Slnka. Ten spočítame priamou úmerou

$$\frac{\text{uhlový priemer Slnka}}{\text{uhlový obvod kruhu}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \approx \frac{2R_\odot}{2\pi a_\oplus} \Rightarrow \alpha = \frac{2R_\odot}{a_\oplus} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 0^\circ 31' 58,455'' . \quad (2.2)$$

Táto jednoduchá priama úmera platí, pretože $R_\odot \ll a_\oplus$ (Slnko je veľmi ďaleko od Zeme v porovnaní s jeho vlastným rozmerom). Presný výpočet vo všeobecnosti vyžaduje trigonometriu. Konkrétne $\sin(\alpha/2) = R_\odot/a_\oplus$, z čoho $\alpha \approx 31' 58,462''$. Rozdiel oproti (2.2) je teda zanedbateľný. To je z dôvodu, že pre malé uhly α platí $\sin x \approx x$ (a takisto $\tan x \approx x$).



Obr. 2.1: Pohyb Mesiaca vzhľadom na Slnko počas fázy čiastočného zatmenia. Ružový bod na okraji Mesiaca (a teda aj jeho stred) prejde uhlovú vzdialenosť rovnú uhlovému priemeru slnečného kotúča.

Zostáva určiť relatívnu uhlovú rýchlosť Mesiaca. Dôležité je, že táto uhlová rýchlosť je voči Slnku, nie voči hviezdám. Preto na jej výpočet budeme potrebovať synodickú obežnú dobu Mesiaca $P_{\zeta, \text{sy}}$. Takisto nebudeme uvažovať rozdielny vplyv rotácie Zeme na zdanlivý pohyb Mesiaca a Slnka. Ten je spôsobený tým, že Mesiace je bližšie ako Slnko. Avšak, tento vplyv pohyb Mesiaca na oblohe spomaľuje, čo znamená, že sa predlžuje čas na zakrytie Slnka t ktorý má výprava na cestu. My preskúmame najhorší scenár (najrýchlejšie zatienenie), ktoré odpovedá situácii ráno alebo večer. Vtedy rotácia Zeme nijak neovplyvňuje zdanlivú rýchlosť Mesiaca na oblohe, keďže rotácia Zeme nemá zložku v tangenciálnom smere voči polohe Mesiaca. Potom

$$\omega_{\zeta\odot} = \frac{\text{obvod kruhu}}{\text{perióda obehu}} = \frac{360^\circ}{P_{\zeta, \text{sy}}} \approx 12,1910^\circ/\text{deň} . \quad (2.3)$$

Na záver stačí dosadiť α a $\omega_{\zeta\odot}$ do (2.1), z čoho vypočítame dobu čiastočného zatmenia

$$t = \frac{\alpha}{\omega_{\zeta\odot}} = \frac{\frac{2R_\odot}{a_\oplus} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}}{\frac{360^\circ}{P_{\zeta, \text{sy}}}} = \frac{R_\odot}{\pi a_\oplus} P_{\zeta, \text{sy}} \approx 63 \text{ minút} . \quad (2.4)$$

Keďže cesta autom trvá 60 minút, tak úplné zatmenie tesne stihnú.

Poznámka: V realite by pre kruhové dráhy Zeme a Mesiaca nastávali iba prstencové zatmenia Slnka. To je dôvod prečo sme do zadania umiestnili predpoklad o polomere Mesiaca tak, aby vytvoril dostatočne veľký tieň. Chceli sme sa vyhnúť potrebe výpočtu uhlovej rýchlosti Mesiaca na eliptickej dráhe. Prípadných záujemcov odkazujeme na rovnicu Vis-viva.

3 Pevné kosti

(80b, autor: Lukáš Hudák)

Pozorovateľ s pevnými kosťami stojaci na nerotujúcej neutrónovej hviezde s hmotnosťou $2,1 M_{\odot}$, vzdialenej 1400 pc od Zeme, pozoruje Slnko. Spektrálnou fotometriou zistil, že maximum toku vyžarovania Slnka je pre $\lambda = 372$ nm. Predpokladajte, že po odčítaní efektu rozpínania vesmíru sú Slnko a neutrónová hviezda vzhľadom na seba v pokoji.

- [25 b] Popíšte a vypočítajte vplyv rozpínania vesmíru (kozmozologického červeného posunu) na vlnovú dĺžku slnečného svetla, ktoré pozoroval pozorovateľ na neutrónovej hviezde.
- [55 b] Určte, či môžeme vplyv rozpínania vesmíru zanedbať voči gravitačnému posunu vlnovej dĺžky a vypočítajte polomer neutrónovej hviezdy.

Fotón si predstavte ako malú guľičku s ekvivalentnou hmotnosťou m_F , ktorá sa pohybuje v gravitačnom poli hmotného objektu (hviezdy). Keďže platí zákon zachovania energie, tak pri vzdalovaní fotónu od hviezdy sa musí predlžovať jeho vlnová dĺžka. Tento efekt voláme gravitačný červený (modrý) posun.

Ako nápovedu uvádzame vzťahy pre kinetickú (E_K) a potenciálnu (E_P) energiu fotónu vo vzdialenosti r od stredu telesa o hmotnosti M .

$$E_K(r) = \frac{hc}{\lambda(r)} \quad , \quad E_P(r) = -G \frac{Mm_F}{r} \quad , \quad m_F = \frac{h}{c\lambda(r)} \quad , \quad (3.1)$$

kde h je Planckova konštanta a c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Pre záujemcov o ďalšie informácie o gravitačnom červenom a modrom posune odporúčame online dostupný zdroj: <https://vixra.org/pdf/1704.0123v1.pdf>

- (a) Keďže sa neutrónová hviezda a Slnko vplyvom rozpínania vesmíru vzdalujú, budeme pozorovať červený posun z , ktorý je definovaný ako

$$z = (\lambda' - \lambda_e)/\lambda_e \quad , \quad (3.2)$$

kde λ' je výsledná vlnová dĺžka a λ_e emitovaná vlnová dĺžka, ktorú môžeme vyjadriť pomocou Wienovho zákona ako

$$\lambda_e = b/T_{\odot}^{(C)} \quad , \quad (3.3)$$

kde b je Wienova konštanta a $T_{\odot}^{(C)}$ je farebná teplota Slnka. Pre malé rýchlosti vzdalovania platí pre červený posun vzťah

$$z = v/c \quad , \quad (3.4)$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu a v je rýchlosť vzdalovania daná Hubble-Lemaîtreovým zákonom

$$v = H_0 \cdot d \quad , \quad (3.5)$$

kde H_0 je Hubble-Lemaîtreova konštanta a d je vzdialenosť neutrónovej hviezdy od Slnka.

Spojením vzťahov (3.2), (3.3), (3.4) a vyjadrením λ' dostávame

$$\lambda' = \lambda_e \frac{H_0 d}{c} + \lambda_e, \quad (3.6)$$

pričom

$$\frac{H_0 d}{c} \approx 3,15 \cdot 10^{-7} \ll 1. \quad (3.7)$$

Z toho vyplýva, že $\lambda' \approx \lambda_e$. Teda vieme povedať, že vplyv rozpínania vesmíru na zmenu vlnovej dĺžky je zanedbateľný.

(b) Predstavme si prázdny vesmír, do ktorého umiestnime Slnko a vyšleme z jeho povrchu fotón. Celková energia fotónu E bude súčtom jeho kinetickej energie E_K a potenciálnej energie E_P , ktoré sú závislé na vzdialenosti r od Slnka. Zákon zachovania energie hovorí

$$E_K(r) + E_P(r) = E = \text{konštanta}. \quad (3.8)$$

Teraz umiestnime ďaleko od Slnka neutrónovú hviezdu zo zadania a sledujme putovanie fotónu medzi týmito dvomi hviezdami. Fotón začne svoju cestu na povrchu Slnka. To je vzdialenosti $r = R_\odot$ od jeho ťažiska, ktoré je centrom gravitačného pôsobenia. Neutrónová hviezda je veľmi ďaleko, takže jej gravitačný efekt môžeme zatiaľ zanedbať.

Následne fotón odletí do medzihviezdneho priestoru, ďaleko od Slnka, teda jeho potenciálna energia bude nulová, $E_P(\infty) = 0$. Po čase sa priblíži k neutrónovej hviezde a začne „cítiť“ jej gravitačné pôsobenie, až dopadne na jej povrch, kedy bude vo vzdialenosti polomeru neutrónovej hviezdy R_N od jej ťažiska.

Keďže je vplyv rozpínania vesmíru zanedbateľný, tak sa celková energia fotónu E zachová počas jeho „letu“. Pomocou (3.8) dostávame

$$\text{konštanta} = E = E_K(R_\odot) + E_P(R_\odot) = E_K(\infty) + E_P(\infty) = E_K(R_N) + E_P(R_N). \quad (3.9)$$

Dosadením vzťahov (3.1) zo zadania dostávame pre povrch Slnka a neutrónovej hviezdy rovnosť

$$\frac{hc}{\lambda_\odot} - \frac{GM_\odot h}{cR_\odot \lambda_\odot} = \frac{hc}{\lambda_N} - \frac{GM_N h}{cR_N \lambda_N}, \quad (3.10)$$

kde λ_N značí pozorovanú vlnovú dĺžku na povrchu neutrónovej hviezdy, M_N je hmotnosť neutrónovej hviezdy, R_N je polomer neutrónovej hviezdy a analogicky index $\odot$ značí Slnko. Vlnovú dĺžku fotónu možno znova vyjadriť pomocou Wienovho zákona (3.3) a po vyjadrení R_N máme

$$R_N = \frac{GM_N}{c^2 - \lambda_N \frac{T_\odot}{b} \left(c^2 - \frac{GM_\odot}{R_\odot} \right)} \approx \frac{GM_N}{c^2 \left(1 - \lambda_N \frac{T_\odot^{(C)}}{b} \right)} \approx 12,8 \text{ km}, \quad (3.11)$$

kde sme využili, že $c^2 \gg GM_\odot/R_\odot$ na aproximovanie zátvorky v menovateli.

4 Vera Rubin

(80b, autor: Samuel Amrich)

V roku 1979 bol podaný článok do časopisu The Astrophysical Journal od astronómky Vera Florence Cooper Rubin a jej kolegov. Článok je prevratný z dôvodu, že v ňom Vera Rubin na základe meraní zo spektrografov odhaľuje jednu zo základných vlastností galaxií, ktorú už v súčasnosti považujeme za nerozporovateľnú, ich ploché rotačné krivky.

Viac o význame tohto objavu je možné nájsť si v jej neskoršom článku v Science z roku 1983 The Rotation of Spiral Galaxies by Vera C. Rubin. My sa ale pozrieme iba na jednu konkrétnu galaxiu a pokúsime sa zreprodukovať rovnaké odhaľovanie výsledkov, akým prechádzala Vera Rubin v 70-tych rokoch.

V tabuľke 4.1 nižšie máte merania orbitálnej rýchlosti v závislosti od vzdialenosti od centra galaxie UGC 2885 na obrázku 4.1, ktorá patrí medzi najväčšie pozorované špirálovité galaxie a zvykne sa niekedy označovať aj ako Rubin's Galaxy (Rubinina galaxia, z angličtiny).



Obr. 4.1: Galaxia UGC 2885, HST.

Tabuľka 4.1: Meranie rotačnej rýchlosti v v galaxii UGC 2885 v závislosti od vzdialenosti od galaktického jadra R . Hodnoty sú prevzaté priamo z prvého článku Astrophysical Journal, Part 1, vol. 238, June 1, 1980, p. 471-487.

Index	R [kpc]	v [km s ⁻¹]	Index	R [kpc]	v [km s ⁻¹]
1	0	0	20	22	250
2	0,5	-	21	24	250
3	1,0	208	22	26	250
4	1,5	272	23	28	255
5	2	287	24	30	263
6	2,5	285	25	32	274
7	3	270	26	34	283
8	4	251	27	38	285
9	5	241	28	42	275
10	6	239	29	46	268
11	7	239	30	48	270
12	8	242	31	52	279
13	9	244	32	56	-
14	10	246	33	62	321
15	12	250	34	66	289
16	14	250	35	70	275
17	16	250	36	74	259
18	18	250	37	78	262
19	20	250	38	82,3	273

Vyriešte nasledujúce úlohy.

- (a) [30 b] Narysujte všetky tieto merania do grafu na milimetrový papier.
- (b) [20 b] Pomocou pravítka a rysovania do grafu určte na akej konštantnej hodnote $y(x) = B$ sa ustáľuje orbitálna rýchlosť galaxie.
- (c) [20 b] Pomocou pravítka a rysovania do grafu určte parametre lineárneho predpisu funkcie $y(x) = A \cdot x$ podľa ktorého sa vyvíja orbitálna rýchlosť v centrálnej časti galaxie.
- (d) [10 b] Určte v akej vzdialenosti od centra galaxie dochádza k splošteniu krivky orbitálnej rýchlosti v galaxii pomocou priesečníka konštantnej funkcie z (a) a lineárnej funkcie z (b).

Pripomínam, že úlohu riešite iba pomocou ručného vynášania bodov do grafu na milimetrový papier a neprogramovateľnej kalkulačky. Pod riešením sa rozumie ručné nakreslenie grafu na milimetrový papier aj s trendovou spojnicou, ktorá sa určuje priamo z bodov na papieri, tak ako je to zvykom na medzinárodnom kole. Analýzou chýb sa nemusíte tentokrát trápiť.

Ak je pre vás úloha na dátovú analýzu doteraz neznáma novinka, môže sa vám hodiť videonávod na www.datova-analyza.aosk.eu alebo riešenie minuloročnej dátovej analýzy domáceho kola v archíve úloh, prípadne skriptá pre dátovú analýzu na stránke AO.

Napísať konkrétny návod, ako postupovať pri dátovej analýze, je náročné a môže byť až kontraproduktívne, dá sa ale povedať, že musíme začať grafom. Ideálne je rozmyslieť si, v akom rozsahu sa nachádzajú hodnoty polomeru a rýchlostí. Taktiež si zistíme veľkosť nášho milimetrového papiera. V našom prípade

$$R \in \langle 0; 82,3 \rangle \text{ kpc} \quad , \quad v \in \langle 0; 321 \rangle \text{ km s}^{-1} \quad , \quad (4.1)$$

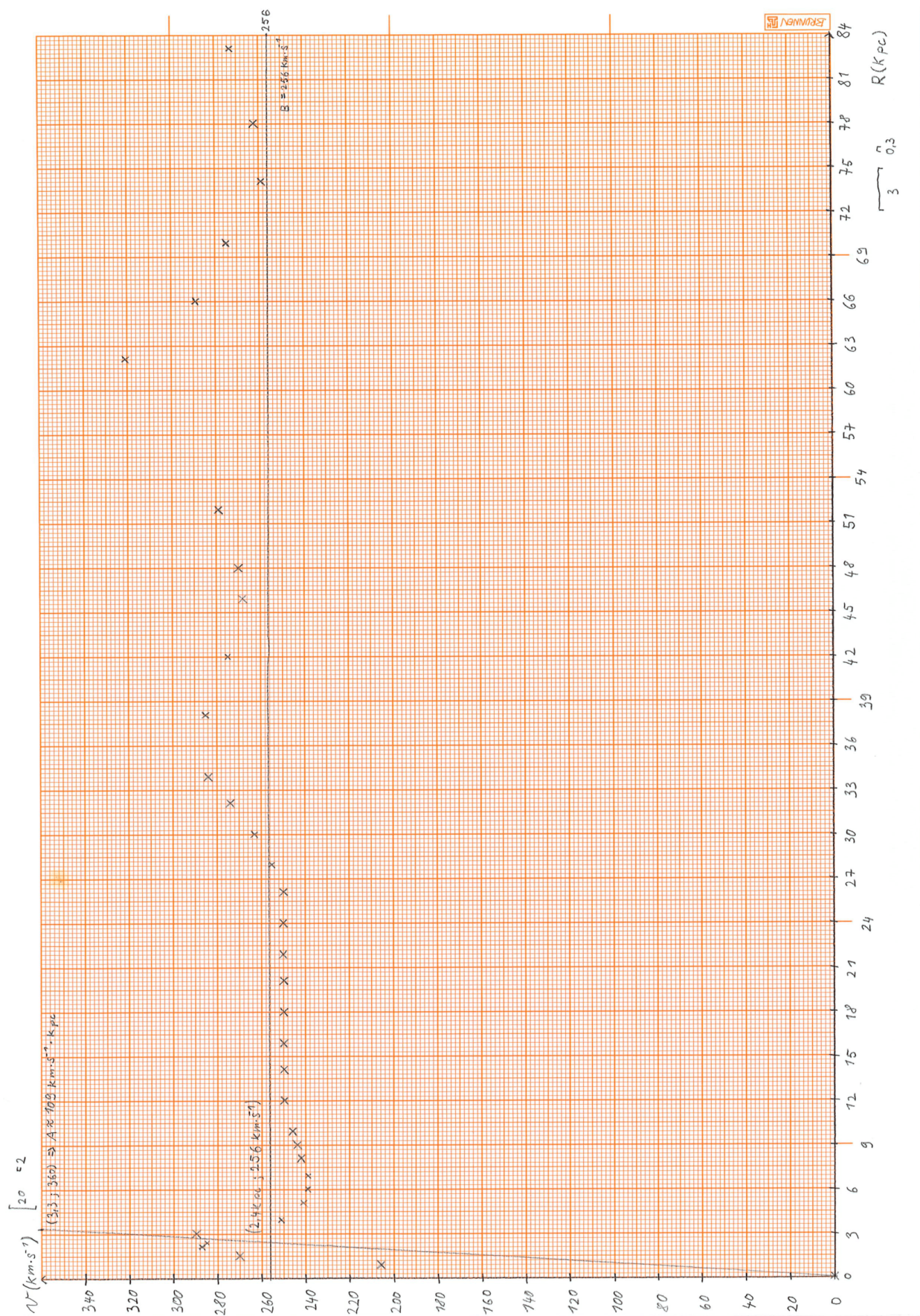
a zároveň dlhšia strana milimetrového papiera má 28 cm a kratšia 18 cm. Keďže chceme vyplniť čo najväčšiu plochu grafu a zároveň pracovať s rozumnými deleniami na štvorčeky, volíme

$$1 \text{ cm} \equiv 3 \text{ kpc} \quad , \quad 1 \text{ cm} \equiv 20 \text{ km s}^{-1} \quad . \quad (4.2)$$

Osi teda vynesieme do grafu, tak ako je zobrazené na obrázku 4.2.

Poznámkový aparát ku grafu je

- vynášame všetky body s maximálnou presnosťou a ostrou písacou potrebou,
- označujeme smer, ktorým daná veličina narastá,
- zapíšeme označenie veličiny a jej jednotku.
- označíme hodnoty pozdĺž osí v rozumných intervaloch,
- využijeme aspoň päťdesiat percent milimetrového papiera.



Obr. 4.2: Ukážkové vynesenie bodov z tabuľky 4.1 do grafu a ich fitovanie.

Dobrou praxou, ale nie hodnotenou, je pripísanie mierky osí do grafu. Pomáha to pri rýchlej práci na vynášaní bodov. V prípade tohto grafu sme uskutočnili ešte jednu šedú praktiku a to, že vieme vynášať body aj so sub-milimetrovou presnosťou. Na zvislej osi zodpovedá jednému milimetru dva kilometre za sekundu, v tabuľke sa ale vyskytujú aj nepárne hodnoty. Pristúpili sme teda k tomu, že sme body vynášali aj uprostred medzi dvojicu čiar. Táto praktika sa dá použiť maximálne v prípade delenia milimetra na polovicu, menšie delenie už prakticky nie je vhodné. Preto, hoci by sa nám hodilo delenie vodorovnej osi na tretiny milimetra (jeden kiloparsek), tak sme k tomuto nepristúpili.

(a) Aby sme splnili zadanie, musíme uskutočniť dva ručné fity v grafe. Pre prvý, konštantný, použijeme pravítko, ktoré je ideálne priehľadné a držíme ho paralelne s vodorovnými čiarami. Snažíme sa mať nad a pod pravítkom rovnaký počet bodov (ignorujeme bod s indexom 1) a zároveň čo najlepšie odhadnúť, kde sa priemerná hodnota nachádza. V našom prípade to pripadlo na hodnotu

$$B = 256 \text{ km s}^{-1}. \quad (4.3)$$

V porovnaní s hodnotou z kalkulačky $B_k = 262 \text{ km s}^{-1}$, je náš fit pomerne presný. Ako plne hodnotený sa bude brať každý konštantný fit s hodnotou $262_{-10}^{+20} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

(b) Druhý, lineárny fit, je o niečo náročnejší, pretože sa dá diskutovať o tom, ktoré body by sa do neho mali započítavať. V prípade tohto vzorového riešenia sme brali do fitu merania jeden až sedem, ktoré sa javia, že podliehajú lineárnemu nárastu. Keďže fitujeme funkciu $y(x) = A \cdot x$, tak fixujeme pravítko v bode $[0 \text{ kpc}; 0 \text{ km s}^{-1}]$. Z fitu získame hodnotu parametra A na základe odčítania krajnej hodnoty na grafe, napríklad na mieste

$$[3,3 \text{ kpc}; 360 \text{ km s}^{-1}]. \quad (4.4)$$

Zo zápisu lineárnej funkcie vidíme, že $A = y(x)/x = v/R$, teda

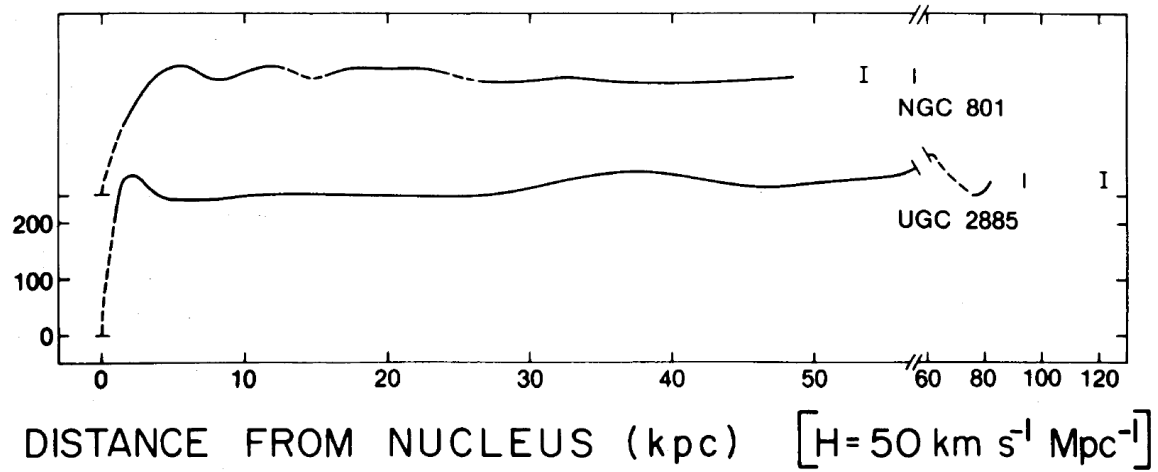
$$A = 109 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}. \quad (4.5)$$

Keďže je toto príliš náročný fit, každý, ktorý vyzerá rozumne a je technicky správne uskutočnený, bude ohodnotený plným počtom bodov.

(c) Tretia úloha je určenie miesta, kde dochádza k splošteniu rotačnej krivky. To je efektívne miesto priesečníku konštantného a lineárneho fitu. Ten jednoducho odčítame z grafu. V našom prípade to predstavuje hodnotu

$$[2,4 \text{ kpc}; 256 \text{ km s}^{-1}]. \quad (4.6)$$

Graf z pôvodného článku si môžeme pozrieť na obrázku 4.3, kde ale naň pravdepodobne aplikovali nejaký druh vyhladzovania.



Obr. 4.3: Pôvodný graf závislosti rotačnej rýchlosti od vzdialenosti od galaktického centra pre galaxiu UGC 2885.

5 Počítanie hviezd

(120b, autor: Samuel Amrich)

Počet viditeľných hviezd na oblohe je veľké číslo, ale bolo by možné ho aspoň odhadnúť? O to sa presne v tejto praktickej úlohe pokúsite. Za pomoci azimutového stolčeka alebo ďalekohľadu na montáži so stupnicou odmerajte súradnice trojice hviezd, ktorá vytvára pekný, pravidelný trojuholník. Zo zistenej trojice súradníc následne vypočítate veľkosti strán tohto sférického trojuholníka podľa vzorca pre azimutálne súradnice (A, h)

$$\Delta_3 = \arccos(\sin(h_1) \sin(h_2) + \cos(h_1) \cos(h_2) \cos(A_1 - A_2)) \quad (5.1)$$

alebo ekvivalentne pre ekvatoriálne súradnice (t, δ)

$$\Delta_3 = \arccos(\sin(\delta_1) \sin(\delta_2) + \cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \cos(t_1 - t_2)) . \quad (5.2)$$

Kde používame klasické značenie súradníc a indexy cyklicky zamieňame. Cyklické zamieňanie znamená, že index 1 zameníme za index 2 ($1 \rightarrow 2$), index 2 za index 3 ($2 \rightarrow 3$) a index 3 za index 1 ($3 \rightarrow 1$). To môžeme spraviť dvakrát a takto dostať všetky tri potrebné permutácie vzťahov vyššie na výpočet všetkých strán sférického trojuholníka $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Pomocou strán sférického trojuholníka je možné vypočítať jeho obsah pomocou vzťahu

$$S = 4 \arctan \left(\sqrt{\tan\left(\frac{d}{2}\right) \tan\left(\frac{d - \Delta_1}{2}\right) \tan\left(\frac{d - \Delta_2}{2}\right) \tan\left(\frac{d - \Delta_3}{2}\right)} \right), \quad (5.3)$$

kde $d = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$.

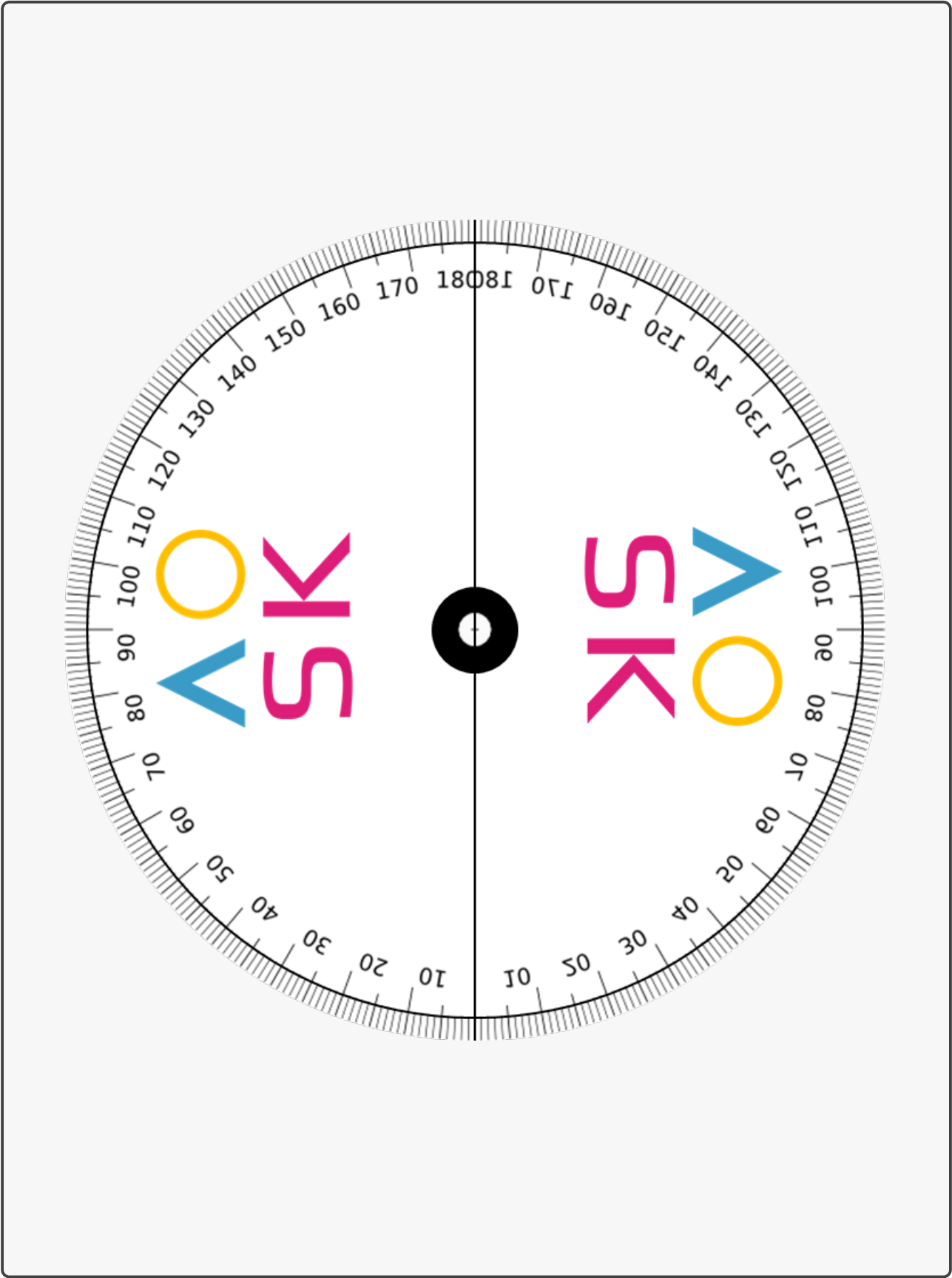
Dôležitá je informácia, že plocha celej sféry je 4π alebo 720° podľa toho, či ste mali pri výpočte vzťahu (5.3) kalkulačku nastavenú na radiány alebo stupne.

Zároveň spočítajte, koľko hviezd vidíte vo vnútri trojuholníka tvoreného danou trojicou hviezd. Teraz, keď viete počet hviezd v zlomku oblohy o známej ploche, vám už nič nebráni určení počtu hviezd na celej oblohe. Celé meranie opakujte toľkokrát, koľko uznáte za vhodné, ale odporúčané je minimálne päťkrát. Výsledky z jednotlivých meraní spojte dokopy metódou, akou uznáte za vhodné. Zároveň nezabudnite na odhad chyby na konci.

Celý proces dokumentujte a vybrané postupy odôvodnite. Zamerajte sa najmä na výber trojuholníkov, odhad vašich schopností pozorovania, meteorologické a astronomické podmienky, presnosť určenia plochy trojuholníka a spôsob spájania výsledkov viacerých meraní dokopy.

Na meranie polôh hviezd si môžete vyrobiť azimutálny stolček z priloženej grafiky. Obrázok so stupnicou $\langle 0^\circ ; 360^\circ \rangle$ je horizontálny a obrázok s dvoma stupnicami $\langle 0^\circ ; 180^\circ \rangle$ po zložení na polovicu slúži ako meradlo vo vertikálnom smere.





Postup merania a výsledky môžu byť pre každého odlišné, preto sa v tomto riešení pokúsime spísať najdôležitejšie body.

Okolité podmienky

Je vhodné, aby sme pozorovali počas bezmesačnej noci. Za dobrého počasia, kedy nie je prítomný žiaden typ oblačnosti a atmosféra je stabilná. Ideálne mimo mesta a celkovo obývanej oblasti, aby sme minimalizovali svetelné znečistenie. Zároveň je ideálne odhadnúť alebo nejakým spôsobom odmerať svoju limitnú magnitúdu, teda hodnotu magnitúdy najslabších objektov, ktoré sme v daných podmienkach schopní pozorovať.

Výber trojuholníkov

Snažíme sa vybrať trojuholníky tvorené jasnými, ľahko pozorovateľnými hviezdami. Čím väčší trojuholník zoberieme, tým menej sa prejaví chyba určenia polôh hviezd a taktiež sa minimalizuje chyba spôsobená nehomogénnym rozložením hviezd. Na druhú stranu narastá chyba určenia hraníc trojuholníku.

Spôsob určenia polôh a následnej plochy

Či už používame dodaný azimutálny stolček, alebo ďalekohľad s montážou, je potrebné určiť polohy hviezd, ktoré tvoria vrcholy trojuholníku, buď v azimutálnych ($A_{[1,2,3]}$; $h_{[1,2,3]}$) alebo ekvatoriálnych súradniciach ($t_{[1,2,3]}$; $\delta_{[1,2,3]}$). Teraz môžeme určiť vzdialenosti $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ medzi týmito hviezdami, ktoré tvoria hrany sférického trojuholníka, a to pomocou vzťahu (5.1) zo zadania, respektíve jeho alternatívou (5.2). Následne výsledné dĺžky Δ dosadíme do vzťahu (5.3) pre plochu S . Dosádzať je vhodné v radiánoch, potom je výsledok v steradiánoch a plocha celej sféry je 4π . Ak by sme zadávali do vzorca (5.3) v stupňoch, potom je výsledok v stupňoch a plocha celej sféry je 720° . Nižšie uvádzame vysvetlenie prečo je uhlová plocha sféry 4π radiánov, respektíve 720° .

Počítanie hviezd

Pred počítaním hviezd je potrebné stráviť minimálne pol hodiny v tme, bez jediného zásahu oka bielym svetlom. Ideálne minimalizujeme aj použitie červeného svetla. Táto doba je potrebná pre odfarbenie svetlocitlivých tyčienok v oku, ktoré sa tak stanú násobne citlivejšími. Hviezdy spočítame v trojuholníku viackrát a môžeme použiť aj metódu bočného videnia. Je to spôsob zapojenia oblasti hustejšie posiatej tyčinkami mimo žltú škvrnu, ktorá je v centre pohľadu. Túto metódu uskutočníme upnutím pohľadu mimo oblasť, kde počítame hviezdy, a snahou rozoznať ich len periférnym pohľadom.

Štatistické vyhodnotenie

V spracovaní nie je asi veľa čo inovovať, a tak sa najviac oplatí hustoty hviezd z jednotlivých trojuholníkov spriemerovať. Za pokus môže stať urobiť vážený priemer, kde váha bude veľkosť trojuholníka. Tým si zabezpečíme, že väčšie trojuholníky, kde sa menej prejavujú chyby merania, budú mať väčší vplyv na výsledok. Dobré kvantifikovateľná chyba je práve chyba rozlohy trojuholníka. Môžeme k tomu pristúpiť min-MAX metódou, rovnicou prenosu chyby (ktorá je

ale náročná na odvodenie) alebo odhadom podľa platnej cifry. Pre zaujímavosť, z Monte Carlo simulácie pre prípad rovnostranného sférického trojuholníka so stranami $10^\circ \pm 1^\circ$ je výsledná relatívna chyba plochy okolo hodnoty 12 %. Pre identický prípad so stranami $20^\circ \pm 1^\circ$ je relatívna chyba plochy približne 6 %.

Poznámka k uhlovej ploche sféry

(autor: Radovan Lascsák)

Plocha sféry v uhlovej miere je netriviálny koncept. Na jeho pochopenie si musíme ako prvé uvedomiť, že uhlové miery nemajú žiadnu fyzikálnu jednotku. Môžeme formálne písať, že daná uhlová veľkosť (miera) je v stupňoch alebo v radiánoch, avšak vždy sa jedná o *pomer*. Bežne sme zvyknutí, že ide o pomer dvoch dĺžok – dĺžky kružnicového oblúku a obvodu celej kružnice. Vieme to však zovšeobecniť aj pre plochy. Plocha sféry je $4\pi r^2$, kde r je polomer sféry. Preto je prirodzené definovať uhlovú plochu sféry ako 4π (teda rovnú ploche pre $r = 1$), podobne ako pri kružnici je prirodzené definovať jej uhlový obvod ako 2π . Takéto uhlové jednotky voláme *radiány*. Ale opäť, nie sú to fyzikálne jednotky, ako metre či sekundy, ide vskutku iba o bezrozmerné čísla. Stále však môže byť užitočné túto uhlovú „jednotku“ písať. Je potom jasné, čo považujeme za uhlový obvod celej kružnice. Keď teda povieme, že uhlová plocha sféry je 720° , máme na mysli to, že jej uhlovú plochu meriame v takých uhlových „jednotkách“, v ktorých je uhlový obvod hlavnej kružnice na sfére rovný 360° . Tu by vás mohlo zarazit, že prečo má plocha aj dĺžka rovnakú jednotku, veď predsa ak je dĺžka napríklad v metroch, tak potom plocha je v metroch štvorcových. Avšak my sa rozprávame *nie* o absolútnych dĺžkach a plochách, ale o tých uhlových. Uhlové miery sú bezrozmerné, a preto nevadí, ak majú rovnakú „jednotku“ lebo v skutočnosti nemajú jednotku *žiadnu*.

Pre stupne platí, že uhlový obvod kružnice je 360. Mohli by ste sa pýtať „360.. a čoho?“, no.. ničoho, jednoducho 360. Ale na to, aby sme predišli zmätkom, budeme tam predsa len písať znak stupňa. Tak teda.. uhlový obvod kružnice je 360° . Uhlová polovica obvodu kružnice je 180° , štvrtina 90° , šestina 60° a tak ďalej. Pre radiány je uhlový obvod kružnice 2π . A opäť čoho? Ničoho. Označenie 2π rad je len, aby sme predišli nedorozumeniam. Uhlová polovica kružnice je potom π rad, štvrtina $\pi/2$ rad, šestina $\pi/3$ rad a tak ďalej. Vidíme jasnú závislosť (prepočet) medzi stupňami a radiánmi, a to $360^\circ = 2\pi$ rad. Vráťme sa teraz naspäť k zavedeniu uhlovej plošnej miery. Zistili sme, že prirodzené by bolo zaviesť uhlovú plochu celej sféry ako 4π rad. To (práve zisteným prepočtom) odpovedá $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$.

Ak vám ale táto úvaha príde neexaktná, vieme sa na to pozrieť aj z inej strany – pomocou výpočtu uhlovej plochy sférického trojuholníka. V konštantovníku máme uvedený vzťah (ktorého odvodenie si môžete overiť na internete) pre sférický exces $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, kde α, β, γ sú vnútorné uhly sférického trojuholníka v radiánoch. Sférický exces je rovný uhlovej ploche daného trojuholníka (v radiánoch). Sférický exces je kladný, pretože súčet uhlov v trojuholníku na sfére je vždy väčší ako súčet uhlov v rovinnom trojuholníku (ktorý je práve π rad, respektíve 180°). Pomocou E spočítajme uhlovú plochu celej sféry. Uvažujme rozdelenie sféry na 8 rovnakých rovnoramenných pravouhlých sférických trojuholníkov (troma na seba kolmými rezmi). Každý z týchto trojuholníkov má všetky strany aj uhly rovné $\pi/2$ rad (respektíve 90°). Súčet uhlov je

teda $(3/2)\pi$ rad (respektíve 270°) a sférický exces je potom $(3/2)\pi$ rad $-\pi$ rad $= \pi/2$ rad (respektíve 90°), čo je podľa spomínaného vzťahu rovné uhlovej ploche daného sférického trojuholníka. Uhlová plocha celej sféry je potom osemnásobok tejto hodnoty, čiže $8 \cdot \pi/2$ rad $= 4\pi$ rad. To potvrdzuje našu intuíciu v prirodzenom zavedení pomocou vzťahu pre plochu sféry $4\pi r^2$.

Ak vzťah pre sférický exces aplikujeme na stupne, dostaneme uhlovú plochu sférických trojuholníkov a celej sféry $8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$. Častou konvenciou býva pre uhlové miery v radiánoch nepísať „jednotku“ a pre uhlové miery v stupňoch „jednotku“ písať. Preto uvádzame plochu sféry ako 4π (bez „jednotky“) a 720° (s „jednotkou“). Rovnako vieme použiť vzťah (5.3) zo zadania. Pre uvažovaný pravouhlý rovnostranný sférický trojuholník do neho dosadíme 90° za všetky 3 uhlové dĺžky strán. Dosadením alebo úpravou dostaneme opäť výsledok $S = 90^\circ$,¹ čo odpovedá už získanému výsledku.

Dôležité je nemýliť si uhlovú plochu v stupňoch so stupňami štvorcovými. $(1^\circ)^2 \equiv 1 \text{ deg}^2$ odpovedá uhlovej ploche sférického štvorca so stranami 1° . Takýchto sférických štvorcov budeme potrebovať na pokrytie oblohy značne viac ako 720. Predstavme si, že máme sféru o polomere $r = 1$ m. Dĺžka hlavnej kružnice na nej bude potom $2\pi r = 2\pi$ m a 1° bude na nej zaberáť $1/360$ obvodu, čo odpovedá $a = (2\pi/360)$ m ≈ 17 mm. Ak aproximujeme sférický štvorec za rovinný, tak jeho plocha bude $S^\square = a^2 = (2\pi/360)^2 \text{ m}^2 \approx 300 \text{ mm}^2$ (symbolom $\square$ značíme, že sa jedná o plochu rovinného štvorca). Celá plocha sféry je $4\pi r = 4\pi$ m, teda potrebujeme vyše 40 tisíc stupňov štvorcových na pokrytie sféry. V stupňoch štvorcových sa zvyknú udávať napríklad rozmery súhvezdí. Hydra ako najväčšie súhvezdie má 1303 deg^2 , teda zaberá asi $1/30$ oblohy.

Navyše, ak spravíme limitnú úvahu, pri ktorej budeme strany štvorca $a \approx 17$ mm postupne zmenšovať ako $a_n = a/n$, kde $n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$, tak sa jeho plocha S bude správať ako $S_n = (a/n)^2$. To je z dôvodu, že zmenšovanie strán sférického štvorca je ekvivalentné „vyfukovaniu“ (zmenšovaniu) celej sféry. Konkrétne, ak pôvodnej dĺžke strany sférického štvorca a odpovedá polomer sféry r , tak zmenšenej dĺžke $a_n = a/n$ bude odpovedať polomer $r_n = r/n$ (pretože obvod kružnice je úmerný r). Avšak plocha je úmerná r^2 , preto $S_n \propto r_n^2 = (r/n)^2$. Preto $S_n \propto 1/n^2$. Ďalej pre všetky $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$ vieme nájsť $n_0 \in \mathbb{N}$, také, že pre všetky $n > n_0$ bude $|S_n - S_n^\square| < \varepsilon$, kde $S_n^\square$ je plocha rovinného štvorca o strane a_n . Inými slovami, aproximácia na rovinný štvorec je presnejšia pre malé štvorčeky a od istého n_0 limitne rovná. Potom ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_n^\square = a_n^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^2 = S_n^2, \quad (5.4)$$

kde posledná rovnosť vyplýva zo správania S_n pri „vyfukovaní“ sféry. To ale teda znamená, že $S_n^\square = S_n$ a to nie len pre $n \rightarrow \infty$, pretože v rovnici (5.4) vieme „zabudnúť“ na prvú rovnosť, ktorá určuje n pre zvyšok rovnice. Ten potom platí pre ľubovoľné n , a teda špeciálne aj pre $n = 1$, kedy $S^\square = S_n^\square = S_n = S$. Z toho vyplýva, že plocha sféry odpovedajúca $(1^\circ)^2$ je $S = S^\square$, čiže jednoduchý aproximačný výpočet, ktorý sme vykonali vyššie, platí dokonca presne, teda

$$\frac{S_{\text{sféra}}}{S} = \frac{4\pi r^2}{S^\square} = \frac{4\pi r^2}{a^2} = \frac{4\pi r^2}{(2\pi r/360)^2} = \frac{360^2}{\pi} \approx 41\,252,96. \quad (5.5)$$

¹Dôkaz ponechávame čtenáři jako cvičení.

Pripomíname, že S predstavuje plochu sférického štvorca so stranou 1° v *absolútnych* jednotkách (napríklad v m^2). Číslo 360 sa vo výpočte zjavuje kvôli tomu, že uhlový obvod kružnice je 360° , teda 1° zaberá $1/360$ kružnice (viď. výpočet vyššie). Ako posledné si všimnime peknú vlastnosť tohto výpočtu pre radiány. Ako sme už spomínali, tie sú *definované* tak, že uhlový obvod kružnice je 2π . Potom $S^\square = a^2 = (2\pi r / (2\pi))^2 = r^2$. Teda plocha sférického štvorca so stranou 1 rad je r^2 . Pekné, nie? Uhlová plocha takéhoto štvorca je 1 rad^2 (keďže to je štvorec so stranou 1 rad) a takýchto radiánov štvorcových potrebujeme 4π aby sme vyplnili celú sféru (každý má absolútnu plochu rovnú r^2 a plocha sféry je $4\pi r^2$). Radiány štvorcové zvykneme volať *steradiány* a hovoríme, že uhlová plocha sféry je 4π steradiánov (skrátene $4\pi \text{ sr}$). Avšak stále nesmieme zabúdať na to, že uhlové miery sú bezrozmerné, čiže to je ekvivalentné tomu povedať, že uhlová plocha sféry je jednoducho iba 4π (alebo $4\pi \text{ rad} = 4\pi \text{ rad}^2 \equiv 4\pi \text{ sr}$). Analogicky pre stupne je uhlová plocha sféry 720 (alebo $720^\circ \approx 41\,252,96 \text{ deg}^2$).

Zoznam konštánt (SŠ)

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	$c = 299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}$
gravitačná konštanta	$G = 6,674 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$
elementárny elektrický náboj	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
Planckova konštanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}$
univerzálna plynová konštanta	$\bar{R} = 8,314\,\text{J K}^{-1}\,\text{mol}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}\,\text{J K}^{-1}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}\,\text{W m}^{-2}\,\text{K}^{-4}$
Wienova posunovacia konštanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3}\,\text{m K}$
Hubble-Lemaîtreova konštanta	$H_0 = 70\,\text{km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}$

Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň = 24 h
siderický (hviezdny) deň	deň ^(sid) = 23 h 56 min 4,1 s
juliánsky rok	rok = 365,25 dní
siderický rok	rok ^(sid) = 365,2564 dní
tropický rok	rok ^(trop) = 365,2422 dní
anomalistický rok	rok ^(anom) = 365,2596 dní
astronomická jednotka	au = 149 597 870 700 m
svetelný rok	ly = 63 241 au
parsek	pc = 3,262 ly
Jansky	Jy = $10^{-26}\,\text{W m}^{-2}\,\text{Hz}^{-1}$

Slnko a Zem

hmotnosť Slnka	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$
polomer Slnka	$R_{\odot} = 6,957 \cdot 10^8\,\text{m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26}\,\text{W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_{\odot} = 5772\,\text{K}$
farebná teplota Slnka nad atmosférou	$T_{\odot}^{(C)} = 5900\,\text{K}$
zdanlivá magnitúda Slnka	$m_{\odot} = -26,74\,\text{mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda Slnka	$m_{\odot\text{bol}} = -26,83\,\text{mag}$
absolútna magnitúda Slnka	$M_{\odot}^{(\text{mag})} = 4,83\,\text{mag}$
absolútna bolometrická magnitúda Slnka	$M_{\odot\text{bol}}^{(\text{mag})} = 4,74\,\text{mag}$
polomer Zeme	$R_{\oplus} = 6378\,\text{km}$
hmotnosť Zeme	$M_{\oplus} = 5,9736 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$
veľká polos dráhy Zeme	$a_{\oplus} = 1\,\text{au}$
excentricita dráhy Zeme	$e_{\oplus} = 0,0167$
Inklinácia rotačnej osi Zeme	$\varepsilon = 23^{\circ}\,26'$

Slnecná sústava

polomer Merkúru
veľká polos dráhy Merkúru

$$R_M = 2440 \text{ km}$$

$$a_M = 0,387 \text{ au}$$

polomer Venuše
veľká polos dráhy Venuše

$$R_V = 6052 \text{ km}$$

$$a_V = 0,723 \text{ au}$$

polomer Mesiaca
veľká polos dráhy Mesiaca
siderická obežná doba Mesiaca
synodická obežná doba Mesiaca
inklinácia orbity Mesiaca voči ekliptike

$$R_{\zeta} = 1737 \text{ km}$$

$$a_{\zeta} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$P_{\zeta, \text{si}} = 27,32 \text{ dní}$$

$$P_{\zeta, \text{sy}} = 29,53 \text{ dní}$$

$$i_{\zeta} = 5,14^\circ$$

polomer Marsu
veľká polos dráhy Marsu

$$R_{\mathcal{M}} = 3393 \text{ km}$$

$$a_{\mathcal{M}} = 1,524 \text{ au}$$

polomer Jupitera
veľká polos dráhy Jupitera

$$R_J = 69\,911 \text{ km}$$

$$a_J = 5,204 \text{ au}$$

polomer Saturnu
veľká polos dráhy Saturnu

$$R_S = 58\,232 \text{ km}$$

$$a_S = 9,583 \text{ au}$$

polomer Uránu
veľká polos dráhy Uránu

$$R_U = 25\,362 \text{ km}$$

$$a_U = 19,191 \text{ au}$$

polomer Neptúna
veľká polos dráhy Neptúna

$$R_N = 24\,764 \text{ km}$$

$$a_N = 30,07 \text{ au}$$

polomer Pluta
veľká polos dráhy Pluta

$$R_P = 1188 \text{ km}$$

$$a_P = 39,481 \text{ au}$$

Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Sférický exces (v radiánoch):

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

= plocha trojuholníka na jednotkovej sfére.

