Astronomická olympiáda 2024

Kolo: **celoslovenské kolo** Kategória: **stredná škola**

Slovenská ústredná hvezdáreň v Hurbanove

Slovenská astronomická spoločnosť pri Slovenskej akadémii vied

Vzorové riešenia

Teoretické úlohy

1.1 Precesia 2
1.2 Starshot 4
1.3 Datovanie Voyageru 6
1.4 Betelgeuze 7
1.5 Liptovská Mara III 9
1.6 Planéta červeného trpaslíka 13

Praktická časť

2.1 Planetárium 19
2.2 Zakresľovanie Mesiaca a planét 21

Dátová analýza

3.1 Planetárne hmloviny 28

Zoznam konštánt 45

Teoretické úlohy

1.1 Precesia

(**60 b**, autor: Radovan Lascsák)

Zem obieha okolo Slnka v rovine, ktorú voláme rovina ekliptiky. Rotačná os Zeme je voči kolmému smeru na rovinu ekliptiky vychýlená o $\varepsilon = 23{,}5°$. Inými slovami, ekliptikálny a nebeský pól sú na nebeskej sfére vzdialené o uhol ε. Severná pologuľa Zeme je najviac priklonená ku Slnku počas letného slnovratu, a najviac odklonená počas zimného slnovratu.

Zemská rotačná os aktuálne mieri do súhvezdia Malý medveď, blízko hviezdy Polárka. Avšak, precesný pohyb rotačnej osi spôsobuje, že krúži okolo kolmého smeru na rovinu ekliptiky, pričom si približne zachováva vychýlenie o ε. Periódu precesie Zeme voláme platónsky rok, ktorý trvá 25 800 rokov. Rovnaký pohyb ako Zem vykonáva rýchlo roztočený vĺčik (peonza), ktorého rotačná os je mierne sklonená a pomaly sa nakláňa do rôznych smerov.

Úlohy:

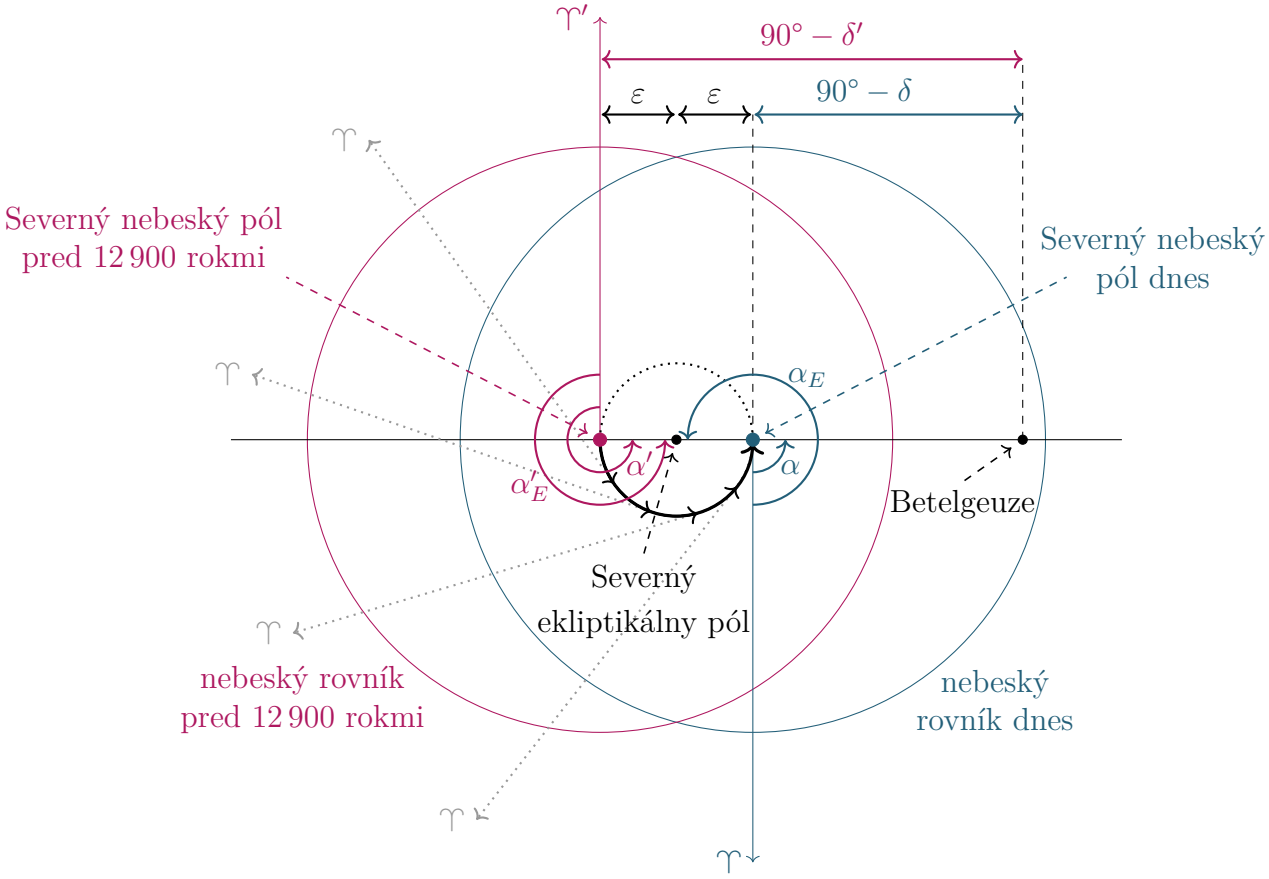
(a) Aká bola rektascenzia ekliptikálneho pólu α'_{E} pred 12 900 rokmi? Jarný bod je vždy definovaný ako priesečník nebeského rovníka a ekliptiky, v ktorom sa Slnko nachádza počas jarnej rovnodennosti. Všimnite si, že 12 900 rokov je polovica platónskeho roka.

(b) Hviezda Betelgeuze má dnes súradnice $\alpha = 6^{\mathrm{h}}$, $\delta = 7°$. Aké boli jej súradnice α', δ' pred 12 900 rokmi? Zanedbajte vlastný pohyb hviezdy a nutáciu.

(c) Bola Betelgeuze pred 12 900 rokmi pozorovateľná zo Slovenska ako cirkumpolárna, zapadajúca, alebo nevychádzajúca hviezda? Uvažujte zemepisnú šírku $\varphi = 49°$.

Pri precesnom pohybe vykonáva nebeský pól kruhový pohyb okolo ekliptikálneho, čo je zobrazené na obrázku 1.1.1. Dôležité je uvedomiť si, že sa pohybuje celý ekvatoriálny súradnicový systém voči statickému ekliptikálnemu. To znamená, že sa posúva poloha jarného bodu ♈ pozdĺž ekliptiky. Preto znamenia horoskopu nesedia s polohou Slnka medzi hviezdami. Astrológovia ich definovali v čase, kedy bolo všetko posunuté o približne mesiac v porovnaní so súčasnosťou.

Keďže v tejto úlohe vyšetrujeme situáciu pred 12 900 rokmi, čo je polovica platónskeho roka, tak nám bude stačiť rovinná geometria. Severný nebeský pól bol pred 12 900 romi na opačnej strane voči ekliptikálnemu pólu ako je dnes. Stále však v uhlovej vzdialenosti ε. Zároveň, jarný bod bol presne oproti jeho dnešnej polohe. Postupné posúvanie jarného bodu je zobrazené na obrázku 1.1.1 sivými prerušovanými čiarami.



Obr. 1.1.1: Schéma precesie nebeského pólu okolo ekliptikálneho pólu.
Ružovou je zobrazená situácia pred 12 900 rokmi a modrou situácia dnes.

(a) Ako prvé určme rektascenziu severného ekliptikálneho pólu α_E v súčasnosti. V deň letného slnovratu je rotačná os Zeme priklonená k Slnku. Kolmica na rovinu ekliptiky, ktorá mieri do severného ekliptikálneho pólu, je voči rotačnej osi na opačnej strane ako Slnko. To znamená, že rektascenzia severného ekliptikálneho pólu je o 12^h väčšia ako rektascenzia Slnka počas letného Slnovratu.

Rektascenzia je uhlová vzdialenosť meraná od jarného bodu pozdĺž nebeského rovníka v smere ročného pohybu Slnka. To sa v jarnom bode nachádza počas jarnej rovnodennosti, čo je štvrťroka pred letným slnovratom, teda posun rektascenzie na 6^h. Potom $\alpha_E = 18^\mathrm{h}$.

Avšak, rektascenzia severného ekliptikálneho pólu sa počas precesného pohybu nemení. To je preto, lebo jarný bod, od ktorého rektascenziu meriame, sa posúva spolu s ekvatoriálnou súradnicovou sústavou, na ktorú je „pripevnená“ rotačná os Zeme. Jarný bod totižto stále definujeme rovnako, ako priesečník nebeského rovníka a ekliptiky, a tento priesečník je „ťahaný“ medzi hviezdami pri precesnom pohybe.

Preto $\alpha'_\mathrm{E} = \alpha_\mathrm{E} = 18^\mathrm{h}$.

(b) Z obrázku 1.1.1 vidíme, že ak je dnes rektascenzia Betelgeuze $\alpha = 6^{\mathrm{h}}$ (modrý uhol), tak po prerotovaní severného nebeského pólu a jarného bodu na opačnú stranu bude jej rektascenzia $\alpha' = 18^{\mathrm{h}}$ (ružový uhol).

Deklináciu δ' určíme takisto na základe obrázku 1.1.1. Vidíme, že platí

$$90^\circ - \delta' = \varepsilon + \varepsilon + (90^\circ - \delta)\,. \tag{1.1.1}$$

Vyjadrením a dosadením dostávame

$$\delta' = \delta - 2\varepsilon = 7^\circ - 2 \cdot 23{,}5^\circ = -40^\circ\,. \tag{1.1.2}$$

(c) Z deklinácie je zrejmé, že hviezda Betelgeuze sa pred 12 900 rokmi nachádzala na južnej oblohe. Na Slovensku dokážeme pozorovať hviezdy južnej oblohy, keďže nebeský rovníky vychádza $90^\circ - \varphi = 41^\circ$ nad obzor. To znamená, že Betelgeuze bola stále tesne pozorovateľná, kulminovala vo výške 1°. Nazvali by sme ju teda zapadajúcou.

Poznámka: V skutočnosti ročný pohyb a nutácia spôsobili, že Betelgeuze nebola pozorovateľná z geografickej šírky 49° pred 12 900 rokmi. Aj po zarátaní atmosférickej refrakcie, sa dostala najvyššie $7'$ pod horizont. Z vyvýšeného miesta by ste ju však uvideli.

1.2 Starshot

(**60 b**, autor: Samuel Amrich)

Jeden z konceptov ako preskúmať iné hviezdne systémy je projekt `Breakthrough Starshot`, ktorý využíva veľmi malé sondy so solárnymi plachtami, urýchľované pomocou laseru. Typicky sa so sondami vo vesmíre komunikujeme pomocou rádiového žiarenia, i keď v prípade Starshotu to bude pravdepodobne pomocou optického laseru.

V reálnom svete je množstvo prenesenej informácie pomocou elektromagnetického žiarenia závislé od použitej frekvencie. K výpočtu sa používa Nyquistov teorém, podľa ktorého maximálne množstvo prenesenej informácie za sekundu je rovné polovici použitej frekvencie (ak $f = 100\,\mathrm{MHz}$, potom maximálny tok informácií je $\mu = 50\,\mathrm{Mbit/s}$).

Predstavte si, že Starshot urýchlená na rýchlosť $v = 0{,}2\,\mathrm{c}$ vysiela na frekvencií $f = 2{,}3\,\mathrm{GHz}$. Vypočítajte akú maximálnu prenosovú rýchlosť dokáže sonda vysielať a akú maximálnu prenosovú rýchlosť dokážeme zachytiť na Zemi?

Dôležité je ešte poznamenať, že keď používame predpony kilo- (k-), mega- (M-) a giga- (G-) v spojení s digitálnymi jednotkami, myslíme celočíselné násobky tisícky, nie 1024. Pre násobky 1024 sa používajú predpony kibi- (Ki-), mebi- (Mi-) a gibi- (Gi-).

Riešenie úlohy je značne priamočiare, ak sa človek nenechá nachytať pri prepočtoch z frekvencie na prenosovú rýchlosť a opačne. Celá úloha sa týka zmeny frekvencie z dôvodu rýchleho pohybu, čo nás samozrejme ihneď navádza na Dopplerov posun. Keďže sa pohybujeme nezanedbateľnou rýchlosťou voči rýchlosti svetla, je potrebné použiť relativistický vzťah

(Poznámka: použitie klasického vzťahu nám pri $v = 0{,}2\,\mathrm{c}$ ešte neurobí veľkú chybu a tak jeho použitie je penalizované mierne.)

$$f = f_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\,. \tag{1.2.1}$$

Kde f_0 je vyžarovaná frekvencia žiarenia, f je zachytená frekvencia, v je rýchlosť pohybu vyžarujúceho telesa preč od prijímacieho. V klasickom prípade vyzerá rovnica nasledovne

$$f = f_0\frac{1}{1 + v/c}\,. \tag{1.2.2}$$

Ideálne je si aj zapísať ako vyzerá škálovanie alebo prevod medzi frekvenciou a prenosovou rýchlosťou. To je jednoducho dané nasledovným vzťahom

$$\mu = \frac{f}{2}\left[\frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}\right]\,. \tag{1.2.3}$$

Teraz len jednoducho zodpovieme na otázky zo zadania. Prvá je akou prenosovou rýchlosťou dokáže sonda vysielať. To vypočítame jednoducho cez prevodový vzťah (1.2.3) ako

$$\mu = \frac{f}{2}\left[\frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}\right] = \frac{2{,}3\,\mathrm{GHz}}{2}\left[\frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}\right] = 1{,}15\,\mathrm{Gbit/s}\,. \tag{1.2.4}$$

Druhá otázka je, akou maximálnou prenosovou rýchlosťou môže vysielať, aby sme to dokázali stále zachytiť na Zemi. K tomu musíme najprv použiť vzťah pre relativistický Dopplerov posun v tvare (1.2.1)

$$f = f_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = 2{,}3\,\mathrm{GHz}\sqrt{\frac{1 - 0.2}{1 + 0.2}} \approx 1{,}88\,\mathrm{GHz}\,. \tag{1.2.5}$$

Čo ešte musíme skonvertovať do prenosovej rýchlosti nasledovne

$$\mu = \frac{1}{2}f_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\left[\frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}\right] \approx 0{,}939\,\mathrm{Gbit/s}\,. \tag{1.2.6}$$

Takže maximálna prenosová rýchlosť je na úrovni približne $\approx 0{,}94\,\mathrm{Gbit/s}$ za použitia relativistického vzťahu. Ak použijeme nerelativistický, získame hodnotu $\approx 0{,}96\,\mathrm{Gbit/s}$.

1.3 Datovanie Voyageru

(**60 b**, autor: Samuel Amrich)

Predstavte si situáciu, že mimozemská rasa odchytila v medzihviezdnom priestore sondu Voyager. Táto mimozemská civilizácia sa rozhodne preskúmať sondu a zistiť jej vek. To je možné aj vďaka tomu, že boli schopní odhaliť, že jej zdroj energie je RTG (rádioizotopový termoelektrický generátor). To nie je nič iné ako valec silne rádioaktívneho materiálu, ktorého atómy sa prirodzene rozpadajú a uvoľnená tepelná energia sa premieňa na elektrickú. Pričom z prekladu nápisov na RTG odhalili, že na začiatku obsahoval 100% ^{238}Pu (ale hmotnosť tam neudali). Rozpadová rada je zložitá, ale v podstate sa dá zjednodušiť na

$$^{238}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{234}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{206}\mathrm{Pb}\,.$$

Prvý rozpad je v podstate okamžitý, teda polčas rozpadu je $T\left({}^{238}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{234}\mathrm{U}\right) \approx 0\,\mathrm{rokov}$. Druhý rozpad je významný so svojím polčasom rozpadu $T\left({}^{234}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}\mathrm{Th}\right) = 244\,900\,\mathrm{rokov}$. A tretí sa opäť udeje okamžite, teda $T\left({}^{230}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{206}\mathrm{Pb}\right) \approx 0\,\mathrm{rokov}$. Aktuálne v RTG Voyagera našli

$$m\left({}^{206}\mathrm{Pb}\right) = 0{,}32\,\mathrm{kg} \quad , \quad m\left({}^{234}\mathrm{U}\right) = 1{,}11\,\mathrm{kg}\,.$$

Vypočítajte ako dlho sa Voyager nachádzal vo vesmíre a koľko plutónia ^{238}Pu mal na začiatku. Pomôcť vám môže aj znalosť, že v súčasnosti sa polčas rozpadu nazýva čas polpremeny.

Z hľadiska skúmania hmotností izotopov nezabúdajte, že sa pri rozpade uvoľňujú α častice (respektívne jadrá hélia ^{4}He), ktoré ale unikli z kontajnera udržiavajúceho rádioizotopy. Iné častice pri rozpade zanedbajte. Predpokladajte, že hmotnosť protónu je rovná hmotnosti neutrónu a hmotnosť elektrónu je prakticky nulová. Predpokladajte, že hmotnosť izotopu je určená čisto počtom nukleónov v jadre. Vplyv kozmického žiarenia zanedbajte.

Ako prvé si uvedomíme, že celá úloha sa točí okolo rádioaktívnych rozpadov. Preto potrebujeme poznať základný vzťah pre vývoj hmotnosti rádioaktívnej látky v čase

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = m_0 \cdot e^{-\ln(2)\frac{t}{T}}\,. \tag{1.3.1}$$

Kde $m(t)$ je hmotnosť rádioaktívnej látky v čase t, m_0 je hmotnosť látky na začiatku (v čase $t = 0$) a T je polčas rozpadu (správne po novom čas polpremeny) danej látky.

V tejto úlohe musíme postupovať postupne a dávať pritom pozor na presnosť. Jediný rozpad, ktorý nás zaujíma je $^{234}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}\mathrm{Th}$. Pretože ostatné prebiehajú okamžite. Ale poznáme iba hmotnosť $m\left({}^{234}\mathrm{U}\right)$ a nie $m\left({}^{230}\mathrm{Th}\right)$ (nesmieme zabudnúť na stratenú α časticu). Hmotnosť $m\left({}^{230}\mathrm{Th}\right) + m\left({}^{4}\mathrm{He}\right)$ ale vieme poľahky vypočítať z hmotnosti $m\left({}^{206}\mathrm{Pb}\right)$ ako

$$m\left({}^{230}\mathrm{Th}\right) + m\left({}^{4}\mathrm{He}\right) = m\left({}^{206}\mathrm{Pb}\right) \cdot \frac{230+4}{206} \approx 0{,}363\,\mathrm{kg}\,. \tag{1.3.2}$$

Kde využívame znalosti zo zadania. Teda, že hmotnosť protónu je rovná hmotnosti neutrónu,

hmotnosť elektrónu je nulová a, že hmotnosť izotopu je určená čisto počtom nukleónov v jadre. Preto hmotnosť daného izotopu Tória plus hmotnosť héliového jadra je rovná hmotnosti daného izotopu olova krát pomer ich nukleových čísel.

Teraz už môžeme vypočítať čas t, ktorý satelit bol vo vesmíre podľa rovnice

$$m\left(^{234}\mathrm{U}\right) = \left[m\left(^{234}\mathrm{U}\right) + m\left(^{230}\mathrm{Th}\right) + m\left(^{4}\mathrm{He}\right)\right] \cdot 2^{-\frac{t}{T\left(^{234}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}\mathrm{Th}\right)}}\,, \tag{1.3.3}$$

odvodený od rovnice (1.3.1). $m(t)$ je stotožnené s $m\left(^{234}\mathrm{U}\right)$, pretože je to hmotnosť uránu, ktorý ostal po čase t. Na pravej strane rovnice (1.3.1) stotožníme hmotnosť m_0 s hmotnosťou $m\left(^{234}\mathrm{U}\right) + m\left(^{230}\mathrm{Th}\right) + m\left(^{4}\mathrm{He}\right)$, pretože je to celková hmotnosť uránu ktorá musela byť na začiatku. Jednoduchými úpravami rovnice 1.3.3 získame vzťah

$$t = -T\left(^{234}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}\mathrm{Th}\right) \cdot \log_2\left(\frac{m\left(^{234}\mathrm{U}\right)}{m\left(^{234}\mathrm{U}\right) + m\left(^{230}\mathrm{Th}\right) + m\left(^{4}\mathrm{He}\right)}\right) \approx 100\,000\,\mathrm{rokov}\,. \tag{1.3.4}$$

Kde len dôležité upozornenie je, že $\log_2$ je logaritmus pri základe dva. Čo zhodou náhod zodpovedá dobe za ktorú Voyager pri svojej aktuálnej rýchlosti doletí k Proxime Centauri.

Ak ešte potrebujeme vypočítať koľko bolo plutónia na začiatku. k tomu využijeme v podstate rovnaký vzťah ako (1.3.2)

$$m(\mathrm{Pu}_{238}) = \left[m\left(^{234}\mathrm{U}\right) + m\left(^{230}\mathrm{Th}\right) + m\left(^{4}\mathrm{He}\right)\right] \cdot \frac{238}{230+4} \approx 1{,}5\,\mathrm{kg}\,. \tag{1.3.5}$$

1.4 Betelgeuze

(**80 b**, autor: Ondrej Juhás)

Betelgeuze (α Ori) je červený nadobor a druhá najjasnejšia hviezda súhvezdia Orión. Pôvodne veľmi horúca hviezda hlavnej postupnosti sa aktuálne nachádza v poslednom štádiu svojho života, a predpokladá sa, že počas najbližších 100 000 rokov vybuchne ako supernova. Betelgeuze je pulzujúca polopravidelná premenná hviezda, a jej zdanlivá magnitúda typicky kolíše medzi hodnotami $m_{\mathrm{max}} = 0{,}28\,\mathrm{mag}$ a $m_{\mathrm{min}} = 1{,}11\,\mathrm{mag}$. Bolometrická korekcia pre hviezdu Betelgeuze je $\mathrm{BC} = -1{,}30\,\mathrm{mag}$.

Pri výpočtoch budete potrebovať nasledujúce údaje o hviezde Betelgeuze

$$\begin{aligned} \text{Vzdialenosť od Zeme:} \quad & d_{\mathrm{Bet}} = 494\,\mathrm{ly}\,, \\ \text{Polomer:} \quad & R_{\mathrm{Bet}} = 764 R_{\odot}\,. \end{aligned}$$

(a) Vypočítajte, aký je žiarivý tok na povrchu Zeme v momente, keď je hviezda najjasnejšia a keď je najmenej jasná.

(b) Vypočítajte absolútnu magnitúdu Betelgeuze vo viditeľnom spektre v momente, keď

je v minime.

Na prelome rokov 2019 a 2020 došlo k udalosti nazvanej „Great dimming“, kedy sa zdanlivá magnitúda Betelgueze drasticky znížila až na $m_{\mathrm{dim}} = 1{,}59\,\mathrm{mag}$. Populárna bola hypotéza, že povrchová teplota hviezdy prudko klesla, a jej zánik môže prísť oveľa skôr ako sa predpokladalo.

(c) Zistite, o koľko kelvinov by sa musela zmeniť povrchová teplota, aby magnitúda poklesla z m_{min} na m_{dim}. Uvažujte zjednodušený model, kde sa pri meniacej teplote nemení bolometrická korekcia pre hviezdu.

Toto „stmavnutie“ bolo však zrejme spôsobené vyvrhnutím materiálu samotnou hviezdou Betelgeuze (tzv. Surface Mass Ejection), ktorý pohlcoval časť žiarenia hviezdy, čo bolo skutočnou príčinou výrazného poklesu zdanlivej magnitúdy.

(a) Využijeme Pogsonovu rovnicu a porovnanie so Slnkom. Nemôžeme však zabudnúť na pripočítanie bolometrickej korekcie a taktiež dosadzujeme bolometrickú magnitúdu Slnka. Pre tok na Zemi, keď je Betelgeuze v maxime máme

$$m_{\mathrm{max}} + BC - m_{\odot\mathrm{bol}} = -2{,}5 \log \left(\frac{f_{\mathrm{max}}}{\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}} \right) . \tag{1.4.1}$$

Po úpravách a vyjadrení toku f_{max} dostávame

$$f_{\mathrm{max}} = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} 10^{\frac{m_{\mathrm{max}} + BC - m_{\odot\mathrm{bol}}}{-2{,}5}} . \tag{1.4.2}$$

Výpočet toku pri minime bude úplne analogický a výsledný vzťah je až na magnitúdu Betelgeuze identický. Po dosadení konštánt a zadaných hodnôt dostávame $f_{\mathrm{max}} = 6{,}45 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, resp. $f_{\mathrm{min}} = 3{,}00 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

(b) Využijeme tzv. modul vzdialenosti, ktorý upravíme do tvaru

$$M_{\mathrm{V}} = m_{\mathrm{V}} + 5 - 5 \log d_{\mathrm{Bet}} , \tag{1.4.3}$$

kde za m_{V} dosadzujeme hodnotu zdanlivej magnitúdy v minime, teda m_{min}, a za d_{Bet} vzdialenosť od Zeme v parsekoch. Po dosadení dostávam e výslednú hodnotu $M_{\mathrm{V}} = -4{,}79\,\mathrm{mag}$.

(c) Keďže potrebujeme zistiť teplotu, ktorá súvisí so žiarivým tokom a magnitúdou, opäť začneme Pogsonovou rovnicou

$$(m_{\mathrm{dim}} + BC) - (m_{\mathrm{min}} + BC) = m_{\mathrm{dim}} - m_{\mathrm{min}} = -2{,}5 \log \left(\frac{f_{\mathrm{dim}}}{f_{\mathrm{min}}} \right) . \tag{1.4.4}$$

V tomto prípade uvažujeme samozrejme bolometrické magnitúdy, ale keďže používame rovnakú

bolometrickú korekciu, tá sa v konečnom dôsledku odčíta, preto sú v rovnici len magnitúdy vo viditeľnom spektre. Keďže porovnávame toky na zemský povrch f z rovnakej hviezdy, tak ich môžeme jednoducho nahradiť tokmi na povrchu hviezdy označené F. Potom platí použitím Stefan-Boltzmannovho zákona

$$m_{\mathrm{dim}} - m_{\mathrm{min}} = -2{,}5 \log\left(\frac{F_{\mathrm{dim}}}{F_{\mathrm{min}}}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{\sigma(T_{\mathrm{min}} - \Delta T)^4}{\sigma T_{\mathrm{min}}^4}\right) = -10 \log\left(1 - \frac{\Delta T}{T_{\mathrm{min}}}\right) . \quad (1.4.5)$$

Vyjadríme si hľadaný rozdiel teplôt

$$\Delta T = T_{\mathrm{min}}\left(1 - 10^{\frac{m_{\mathrm{dim}} - m_{\mathrm{min}}}{-10}}\right) . \quad (1.4.6)$$

Potrebujeme ešte zistiť teplotu T_{min}, teda teplotu Betelgeuzu pri magnitúde m_{min}. Tú zistíme na základe faktu, že poznáme toky z podzadania (a). Pre tok f_{min} máme

$$f_{\mathrm{min}} = \frac{L_{\mathrm{Bet}}}{4\pi d_{\mathrm{Bet}}^2} = \frac{\sigma T_{\mathrm{min}}^4 4\pi R_{\mathrm{Bet}}^2}{4\pi d_{\mathrm{Bet}}^2} . \quad (1.4.7)$$

Teraz si už môžeme vyjadriť teplotu T pri minime cyklu hviezdy

$$T_{\mathrm{min}} = \sqrt[4]{\frac{f_{\mathrm{min}} d_{\mathrm{Bet}}^2}{\sigma R_{\mathrm{Bet}}^2}} . \quad (1.4.8)$$

Po dosadení do rovnice (1.4.6) a dosadení hodnôt dostávame výsledok $\Delta T \approx 260\,\mathrm{K}$ (teplota pri minime je približne rovná $T_{\mathrm{min}} \approx 2500\,\mathrm{K}$).

1.5 Liptovská Mara III

(**150 b**, autor: Samuel Buranský)

Počas roka dochádza na Zemi k striedaniu ročných období. Dôvodom je naklonenie roviny zemského rovníka o uhol $\varepsilon = 23{,}4°$ voči rovine ekliptiky. Zem zároveň obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe, to znamená, že raz je k Slnku, bližšie inokedy ďalej. To spôsobuje, že na dané miesto na Zemi dopadá v rôzne dni rôzne množstvo žiarivej energie zo Slnka. Vypočítajte pomer žiarivých energií zo Slnka, ktoré dopadnú na celú plochu Liptovskej Mary za 1 s na pravé poludnie celoštátneho kola AO (2. 5. 2024) a na poludnie pri zverejnení úloh domáceho kola AO (15. 1. 2024). Poloha Liptovskej Mary je 49,1° N, 19,5° E a plocha $A = 27\,\mathrm{km}^2$.

Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe s excentricitou $e = 0{,}0167$. Prechod perihéliom tento rok nastáva 3. 1. 2024 a prechod aféliom 5. 7. 2024. Pre prípadné medzivýpočty môžete využiť slnečnú konštantu, ktorej hodnota je uvedená v zozname konštánt. Slnečná konštanta predstavuje množstvo energie, ktoré prejde za 1 s plochou $1\,\mathrm{m}^2$ orientovanou

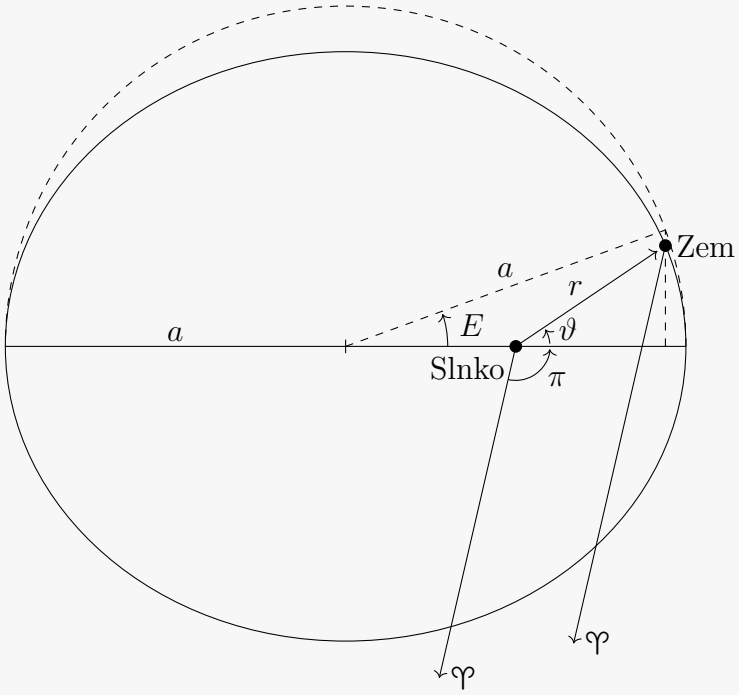
kolmo na slnečné lúče vo vzdialenosti 1 au od Slnka bez extinkcie (absorpcie). Pri výpočte zanedbajte vplyv atmosféry. Počas jedného dňa považujte deklináciu Slnka za konštantnú.

Budete potrebovať rovnicu elipsy v polárnych súradniciach, teda vzťah medzi vzdialenosťou od ohniska r a pravou anomáliou ϑ

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}\,, \quad \text{kde } p = a(1-e^2)\,. \tag{1.5.1}$$

Dĺžka perihélia je $\pi = 103°$. Význam ϑ a π je zrejmý z obrázka 1.5.1. Takisto sa vám budú hodiť vzťahy z regionálneho kola AO

$$r = a(1 - e\cos E) \quad , \quad M = E - e\sin E \quad , \quad M = n(t-T) \quad , \quad n = \frac{2\pi}{P}\,. \tag{1.5.2}$$



Obr. 1.5.1: Schéma elementov dráhy Zeme.

Pre pomer slnečných energií využijeme rovnicu z regionálneho kola

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{CK}}}{\mathcal{E}_{\mathrm{DK}}} = \frac{At\sin\left(90° - \varphi + \delta_{\odot(\mathrm{CK})}\right)}{At\sin\left(90° - \varphi + \delta_{\odot(\mathrm{DK})}\right)} \cdot \frac{\dfrac{L_\odot}{4\pi r_{\mathrm{CK}}^2}}{\dfrac{L_\odot}{4\pi r_{\mathrm{DK}}^2}}\,, \tag{1.5.3}$$

pričom po skrátení a úprave dostaneme rovnicu

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{CK}}}{\mathcal{E}_{\mathrm{DK}}} = \frac{\sin\left(90^\circ - \varphi + \delta_{\odot(CK)}\right)}{\sin\left(90^\circ - \varphi + \delta_{\odot(DK)}\right)} \cdot \frac{r_{DK}^2}{r_{CK}^2} \,. \tag{1.5.4}$$

Excentrická anomália

Vypočítame si stredný denný pohyb $n = 2\pi/365{,}2596\,\mathrm{dňa} = 0{,}017\,201\,971\,\mathrm{rad/deň}$, kde sme použili ako periódu anomalistický rok. Vypočítame si čas od prechodu perihéliom pre domáce kolo (DK) a celoštátne kolo (CK)

$$\Delta t(CK) = 120\,\text{dnzz-Solarna-(ne)}\acute{\text{k}}\text{onstanta-III.tex}\,, \tag{1.5.5}$$

$$\Delta t(DK) = 12\,\text{dnzz-Solarna-(ne)}\acute{\text{k}}\text{onstanta-III.tex}\,. \tag{1.5.6}$$

Podľa zadaného vzťahu určíme stredné anomálie

$$M_{\mathrm{CK}} = 118{,}272\,204\,8^\circ = 2{,}064\,239\,387\,\mathrm{rad}\,, \tag{1.5.7}$$

$$M_{\mathrm{DK}} = 11{,}827\,204\,8^\circ = 0{,}206\,423\,938\,7\,\mathrm{rad}\,. \tag{1.5.8}$$

Pomocou Keplerovej rovnice upravenej do tvaru

$$E_{\mathrm{n}} = M + e\sin(E_{\mathrm{n}-1})\ , \tag{1.5.9}$$

ktorý je vhodný pre iteráciu (ako prvý odhad zvolíme $E_0 = M$), určíme excentrické anomálie

$$E_{\mathrm{CK}} = 2{,}078\,830\,221\,\mathrm{rad} = 119{,}108\,198^\circ\,, \tag{1.5.10}$$

$$E_{\mathrm{DK}} = 0{,}209\,903\,645\,2\,\mathrm{rad} = 12{,}026\,592\,98^\circ\,. \tag{1.5.11}$$

Vzdialenosť a deklinácia

Pomocou excentrickej anomálie E určíme pravú anomáliu ϑ a z nej vzdialenosť r. Využitím polárnej rovnice elipsy dostávame

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta} = a(1-e\cos E)\,, \tag{1.5.12}$$

odkiaľ si vyjadríme ϑ ako

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}\right). \tag{1.5.13}$$

Podľa odvodeného vzťahu vypočítame obe pravé anomálie

$$\vartheta_{\mathrm{CK}} = 2{,}093\,362\,781\,\mathrm{rad} = 119{,}940\,852\,3^\circ\,, \tag{1.5.14}$$
$$\vartheta_{\mathrm{DK}} = 0{,}213\,412\,246\,6\,\mathrm{rad} = 12{,}227\,621\,03^\circ\,. \tag{1.5.15}$$

Z pravých anomálií vypočítame vzdialenosti od Slnka

$$r_{\mathrm{CK}} = 1{,}008\,123\,889\,\mathrm{au}\,, \tag{1.5.16}$$
$$r_{\mathrm{DK}} = 0{,}983\,666\,548\,4\,\mathrm{au}\,. \tag{1.5.17}$$

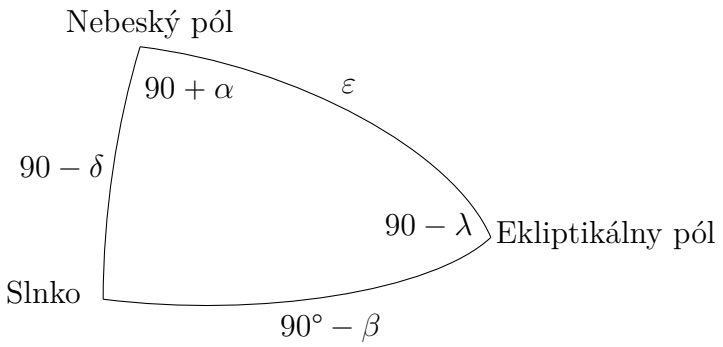
Deklinácia

Deklináciu určíme transformáciou ekliptikálnych súradníc, pričom ekliptikálna šírka je $\beta = 0^\circ$ a ekliptikálnu dĺžku λ určíme podľa už zisteniej pravej anomálie ϑ.

Z obrázku 1.5.1 (v zadaní) odvodíme vzťah medzi ekliptikálnou dĺžkou a pravou anomáliou $\lambda = 180^\circ + \pi + \vartheta$. Dostávame ekliptikálne dĺžky Slnka

$$\lambda_{\mathrm{CK}} = 402{,}940\,852\,3^\circ \equiv 42{,}940\,852\,33^\circ\,, \tag{1.5.18}$$
$$\lambda_{\mathrm{DK}} = 295{,}227\,621\,03^\circ\,. \tag{1.5.19}$$

Na prevod ekliptikálnych súradníc na rovníkové využijeme sférický trojuholník podobný nautickému. Zobrazený je na obrázku 1.5.2.



Obr. 1.5.2: Sférický trojuholník na prevod rovníkových a ekliptikálnych súradníc.

Platia v ňom sférické vzťahy

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}\,, \tag{1.5.20}$$
$$\cos a = \cos b\,\cos c + \sin b\,\sin c\,\cos \alpha\,, \tag{1.5.21}$$

z čoho po dosadení dostaneme

$$\cos\delta\,\cos\alpha = \cos\beta\,\cos\lambda\,, \tag{1.5.22}$$
$$\sin\delta = \sin\beta\,\cos\varepsilon + \cos\beta\,\sin\varepsilon\,\sin\lambda\,, \tag{1.5.23}$$

keďže v oboch prípadoch platí $\beta = 0°$, vzťahy sa upravia do tvaru

$$\cos\delta\,\cos\alpha = \cos\lambda\,, \tag{1.5.24}$$
$$\sin\delta = \sin\varepsilon\,\sin\lambda\,. \tag{1.5.25}$$

Keďže nás zaujíma iba deklinácia, tak pre ňu dostaneme vzťah

$$\delta = \arcsin(\sin\varepsilon\,\sin\lambda)\,. \tag{1.5.26}$$

Z odvodeného vzťahu vypočítame deklináciu Slnka v príslušné dni

$$\delta_{CK} = 15{,}697\,248\,95°\,, \tag{1.5.27}$$
$$\delta_{DK} = -21{,}055\,284\,76°\,. \tag{1.5.28}$$

Záver

Medzivýsledky, ktoré sme dostali, dosadíme do vzťahu (1.5.4)

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{CK}}}{\mathcal{E}_{\mathrm{DK}}} = \frac{\sin(90° - \varphi + \delta_{\mathrm{CK}})}{\sin(90° - \varphi + \delta_{\mathrm{DK}})} \cdot \frac{r_{\mathrm{DK}}^2}{r_{\mathrm{CK}}^2} = 2{,}341302272 \doteq 2{,}34\,. \tag{1.5.29}$$

1.6 Planéta červeného trpaslíka (**190 b**, autor: Martin Okánik)

V súčasnosti je známych vyše 5600 potvrdených exoplanét. Predmetom špeciálneho záujmu sú tie, ktoré môžu mať povrchové teploty umožňujúce existenciu vody v kvapalnom skupenstve.

Uvažujme hviezdu hlavnej postupnosti spektrálnej triedy M, tzv. červeného trpaslíka. Pre potreby tohto príkladu predpokladajme, že hviezda vyžaruje ako absolútne čierne teleso (AČT) s teplotou 3000 K, a Slnko vyžaruje ako AČT s teplotou 6000 K. Polomer hviezdy je 0,2 polomeru Slnka.

Na kruhovú obežnú dráhu tejto hviezdy umiestnime hypotetickú planétu Corusant do takej vzdialenosti, aby bol celkový žiarivý tok dopadajúci kolmo na meter štvorcový v danej vzdialenosti od hviezdy rovnaký ako pre Zem od Slnka (slnečná konštanta). Polomer a hmotnosť Corusantu sú tiež rovnaké ako Zeme, a je stále prípustné uvažovať že Corusant

je podstatne menej hmotný ako jeho centrálna hviezda.

Táto úloha má tri podúlohy s dôrazom na žiarivé toky, nebeskú mechaniku a podmienky na planéte.

Žiarivé toky (50b)

(a) V akej vzdialenosti od červeného trpaslíka musí byť podľa týchto kritérií Corusant?

Rozdeľme elektromagnetické žiarenie na tri oblasti: krátkovlné (KV) s vlnovou dĺžkou $\lambda <$ 400 nm, viditeľné (V) 400 nm $< \lambda <$ 750 nm, dlhovlnné (DV) $\lambda >$ 750 nm.

(b) Doplňte do troch viet za odrážkami nižšie namiesto trojbodiek slová „väčšia“, „menšia“, „rovnaká“. Jedno slovo môžete použiť nula, jeden alebo viac krát. Zanedbajte efekty atmosfér Zeme alebo Corusantu. V tejto úlohe nie je nutné nič počítať.

- Zdanlivá magnitúda červeného trpaslíka v KV oblasti z Corusantu je ...
  ... ako Slnka zo Zeme.
- Zdanlivá magnitúda červeného trpaslíka v DV oblasti z Corusantu je ...
  ... ako Slnka zo Zeme.
- Zdanlivá bolometrická magnitúda červeného trpaslíka z Corusantu je ...
  ... ako Slnka zo Zeme.

Poznámka: Magnitúdy tu porovnávame ako reálne čísla, teda veta „m_1 je väčšia než m_2“ znamená jednoducho $m_1 > m_2$.

Nebeská mechanika (50b)

Pre hviezdy nízkej hmotnosti platí približný vzťah medzi ich svietivosťou L (teda celkovým žiarivým výkonom hviezdy vo wattoch) a hmotnosťou M, v porovnaní so Slnkom ($L_\odot$, $M_\odot$).

$$\frac{L}{L_\odot} = 0{,}23\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2{,}3} . \tag{1.6.1}$$

(c) Na základe tohto vzťahu odhadnite aká bude gravitačná sila pôsobiaca na Corusant, v pomere ku gravitačnej sile Slnka pôsobiaceho na Zem. Odhadnite tiež pomer slapových síl z materskej hviezdy na Zemi a Corusante.

Pomôcka: slapová sila je daná ako rozdiel gravitačnej sily hviezdy pôsobiacej na privrátenú a odvrátenú stranu planéty. Polomer Corusantu R môžte považovať za rovný polomeru Zeme a podstatne menší než vzdialenosť k materskej hviezde a, takže $(a \pm R)^n \approx a^n\left(1 \pm \frac{nR}{a}\right)$.

Podmienky na planéte (90b)

V predchádzajúcej úlohe ste mali možnosť zistiť, že gravitačná a slapová sila hviezdy pôsobiace na Corusant sú podstatne vyššie ako na Zemi, čo je cena za to, že na Corusant dopadá rovnaké množstvo žiarivej energie z podstatne menej jasnej hviezdy. Toto však nezostalo bez následkov, a v priebehu miliónov rokov sa rotácia Corusantu dostala do slapovej rezonancie 1:1 s jeho dobou obehu okolo hviezdy. To znamená, že Corusant vzhľadom na vzdialené hviezdy rotuje s periódou rovnou jeho orbitálnej perióde a vyzerá tak, akoby sa vzhľadom na svoju materskú hviezdu vôbec neotáčal.

Sklon orbitálnej a rovníkovej roviny je rovný nule . Na rovníku na privrátenej strane sa nachádza tzv. substelárny bod (SB), kde je materská hviezda vždy v zenite, a na rovníku na odvrátenej strane sa nachádza tzv. antistelárny bod (AB), kde je hviezda vždy v nadire, teda priamo pod nohami. Tieto body vám môžu v časti (f) pomôcť pri formulovaní vhodného systému súradníc.

(d) Ako rýchlo sa otáča Corusant okolo osi? Rotačnú periódu uveďte v pozemských dňoch.

(e) Keby mal celý povrch Corusantu homogénnu teplotu, aká by bola? Môžte uvažovať, že Corusant pohlcuje žiarenie zo svojej hviezdy ako absolútne čierne teleso. Prečo je homogénna povrchová teplota v tomto prípade veľmi nerealistický predpoklad?

(f) V prípade, že by bol každý bod povrchu Corusantu v žiarivej rovnováhe s naň dopadajúcim žiarením z hviezdy, a nevymieňal si energiu s inými bodmi na Corusante, aké by bolo rozloženie teploty na povrchu? Uvažujte nad symetriou tohto problému – a na základe tejto symetrie navrhnite vhodný systém súradníc, v ktorom úlohu vyriešite. Vhodnou voľbou súradníc bude totiž teplota na celom povrchu planéty funkciou len jednej premennej.

Bonus: Podľa vás ktoré procesy (okrem skleníkového efektu) vedú k tomu, že realistický povrch Corusantu bude niečo medzi extrémnymi prípadmi (e) a (f) ?

Žiarivé toky

Vychádzame zo vzťahu pre žiarivý výkon $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Túto rovnicu aplikujeme pre hviezdu Corusantu (index „HC“). Žiarivý výkon na plochu vo vzdialenosti a od zdroja je

$$S = \frac{L}{4\pi a^2} \propto \frac{R^2 T^4}{a^2} \,. \tag{1.6.2}$$

S je tiež známe ako solárna konštanta. Požadujeme rovnosť solárnych konštánt Zeme ($S_\oplus$)

a Corusantu (S_C). Z toho vyplýva

$$\frac{R_{\mathrm{HC}}^2 T_{\mathrm{HC}}^4}{a_{\mathrm{C}}^2} = \frac{R_\odot^2 T_\odot^4}{a_\oplus^2}\,. \tag{1.6.3}$$

Z tohto chceme vyjadriť a_{C}.

$$a_{\mathrm{C}} = \frac{R_{\mathrm{HC}}}{R_\odot}\left(\frac{T_{\mathrm{HC}}}{T_\odot}\right)^2 a_\oplus = \frac{1}{5}\left(\frac{3000}{6000}\right)^2 \mathrm{au} = 0{,}05\,\mathrm{au}\,. \tag{1.6.4}$$

Hviezda je chladnejšia než Slnko. Planéty sú v takej vzdialenosti od hviezd, aby bol bolometrický tok na Zemi a Corusante rovnaký. To znamená, že bolometrické magnitúdy sú rovnaké.

Keďže chladnejšie hviezdy vyžarujú väčšie percento energie v dlhovlnnej oblasti, bude pri rovnakom bolometrickom žiarivom toku tok v dlhovlnnej oblasti väčší pre chladnejšiu hviezdu Corusantu v porovnaní so Slnkom, čo znamená, že magnitúda v dlhovlnnej oblasti bude nižšia. Opak platí pre krátkovlnnú oblasť.

Nebeská mechanika

Vychádzame zo vzťahu hmotnosť-žiarivosť uvedeného v zadaní

$$\frac{L_{\mathrm{HC}}}{L_\odot} = 0{,}23\left(\frac{M_{\mathrm{HC}}}{M_\odot}\right)^{2{,}3}\,. \tag{1.6.5}$$

Chceme získať pomer gravitačných síl, takže musíme využiť Newtonov gravitačný zákon

$$F_{\mathrm{g}} = \frac{GMm}{a^2} \propto \frac{M}{a^2}\,. \tag{1.6.6}$$

Tu sme zvýraznili závislosť gravitačnej sily na hmotnosti hviezdy ($\propto M$) a veľkej polosi ($\propto a^{-2}$). Dosadíme rovnicu pre žiarivý výkon do vzťahu hmotnosť-žiarivosť a ten dosadíme do tejto závislosti. Tým dostaneme pre pomer síl

$$\frac{F_{\mathrm{g,C}}}{F_{\mathrm{g},\oplus}} = \frac{M_{\mathrm{HC}}}{M_\odot}\left(\frac{a_\oplus}{a_{\mathrm{C}}}\right)^2 \tag{1.6.7}$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}23}\frac{L_{\mathrm{HC}}}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{2{,}3}}\left(\frac{a_\oplus}{a_{\mathrm{C}}}\right)^2 \tag{1.6.8}$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}23}\frac{R_{\mathrm{HC}}^2}{R_\odot^2}\frac{T_{\mathrm{HC}}^4}{T_\odot^4}\right)^{\frac{1}{2{,}3}}\left(\frac{a_\oplus}{a_{\mathrm{C}}}\right)^2 \tag{1.6.9}$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}23}0{,}2^2 0{,}5^4\right)^{\frac{1}{2{,}3}}\left(\frac{1}{0{,}05}\right)^2 \tag{1.6.10}$$

$$\approx 56\,. \tag{1.6.11}$$

Tiež sa hodí zaznačiť si, že $\frac{M_{\mathrm{HC}}}{M_\odot} \approx 0{,}14$. Slapová sila na rozdiel od gravitačnej klesá s treťou mocninou vzdialenosti ($F_\odot \propto Ma^{-3}$). Inak postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom

prípade.

$$\frac{F_{\mathrm{s,C}}}{F_{\mathrm{s},\oplus}} = \frac{M_{\mathrm{HC}}}{M_\odot}\left(\frac{a_\oplus}{a_{\mathrm{C}}}\right)^3 \tag{1.6.12}$$

$$= \frac{a_\oplus}{a_{\mathrm{C}}}\frac{F_{\mathrm{g,C}}}{F_{\mathrm{g},\oplus}} \tag{1.6.13}$$

$$\approx 1100\,. \tag{1.6.14}$$

Poznamenávame, že to, že slapová sila klesá s treťou mocninou vzdialenosti, je dôležitý koncept, ktorý by mal astronóm mať na pamäti. Matematicky zdatní riešitelia, ktorí si tento fakt nepamätajú, si ho môžu pomerne rýchlo odvodiť z pomôcky poskytnutej v zadaniach:

$$F_s = F_g(a-R) - F_g(a+R) \tag{1.6.15}$$

$$= GMm\left[\frac{1}{(a-R)^2} - \frac{1}{(a+R)^2}\right] \tag{1.6.16}$$

$$= \frac{GMm}{a^2}\left[\left(1-\frac{R}{a}\right)^{-2} - \left(1+\frac{R}{a}\right)^{-2}\right] \tag{1.6.17}$$

$$\approx \frac{GMm}{a^2}\left[1-\left(-2\frac{R}{a}\right) - \left(1-2\frac{R}{a}\right)\right] \tag{1.6.18}$$

$$= \frac{4GMmR}{a^3}\,. \tag{1.6.19}$$

Z výsledku vyplýva, že pri rovnakej hmotnosti m a polomere R planéty je slapová sila závislá len na hmotnosti centrálnej hviezdy M a polomeru dráhy a: $F_s \propto \frac{M}{a^3}$.

Podmienky na planéte

Podmienka 1:1 slapovej rezonancie je $P_{\text{rotácia}} = P_{\text{orbitálna}}$, pričom obe budeme označovať ako P. 3. Keplerov zákon hovorí $P^2 \propto a^3 M^{-1}$. Odtiaľ

$$P_{\mathrm{C}} = P_\oplus\left(\frac{a_{\mathrm{C}}}{a_\oplus}\right)^{3/2}\left(\frac{M_{\mathrm{HC}}}{M_\odot}\right)^{-1/2} \tag{1.6.20}$$

$$= 365{,}25\,\text{dňa}\cdot(0{,}05)^{3/2}\cdot(0{,}14)^{-1/2} \tag{1.6.21}$$

$$\approx 10{,}9\,\text{dnzzz-Planeta-cerveneho-trpaslika.tex} \tag{1.6.22}$$

Tok žiarivej energie S_{C} dopadá na efektívny povrch πR_{C}^2, čo je priemet gule na rovinu kolmú k dopadajúcim lúčom. Žiarivá energia je uvoľňovaná tepelným vyžarovaním planéty z celého povrchu $4\pi R_{\mathrm{C}}^2$ rovnomerne, keďže predpoklad je, že planéta má rovnomernú teplotu. Zachovanie energie si teda vyžaduje

$$\pi R_{\mathrm{C}}^2 S_{\mathrm{C}} = 4\pi R_{\mathrm{C}}^2 \sigma T_{\mathrm{C}}^4\,. \tag{1.6.23}$$

Odtiaľ dostávame pre rovnomernú teplotu povrchu

$$T_\mathrm{C} = \left(\frac{S_\mathrm{C}}{4\sigma}\right)^{1/4} \approx 278\ \mathrm{K}\,. \tag{1.6.24}$$

Kľúčová pre riešenie úlohy je valcová symetria okolo spojnice hviezda – substelárny bod – antistelárny bod. Zadefinujme polárny uhol θ okolo tejto osi so stredom v strede planéty, pričom $\theta = 0^\circ$ zodpovedá substelárnemu bodu a $\theta = 180^\circ$ antistelárnemu bodu. Všetky body v prstenci povrchu v tesnej blízkosti daného uhla θ budú mať rovnaký dopadajúci výkon rovný $S_\mathrm{C}\cos\theta$. Vztiahnuté na 1 meter štvorcový povrchu na dennú pologuľu ($0^\circ \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$), $S_\mathrm{C}\cos\theta = \sigma T(\theta)^4$, pričom na nočnú pologuľu ($90^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$) je ľavá strana rovnice rovná nule. Získavame preto nasledujúcu funkciu

$$T(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{S_\mathrm{C}\cos\theta}{\sigma}\right)^{1/4}, & 0^\circ \leqslant \theta \leqslant 90^\circ \\ 0, & 90^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ \end{cases}\,. \tag{1.6.25}$$

Variácia tejto funkcie je čisto vďaka kosínusovému členu na privrátenej strane planéty. Maximum $\left(\frac{S_\mathrm{C}}{\sigma}\right)^{1/4} \approx 393$ K je pre $\theta = 0^\circ$, na odvrátenej strane model predpovedá absolútnu nulu.

Poznámka: integráciou cez celý povrch planéty možno overiť že v tomto riešení stále platí zachovanie energie.

Poznámky a bonus:

Takýto profil je v praxi nepravdepodobný, keďže predpoklad zo zadania, že „body na povrchu si vzájomne nevymieňajú teplo“, neplatí. Pravdepodobný je výskyt veľkoškálového atmosférického prúdenia, ktoré prenáša teplo z denného strany na nočnú. Za zmienku tiež stojí, že v prípade, že by teplotný profil ako v poslednej podúlohe naozaj existoval, atmosféra na nočnej strane by zamrzla a skondenzovaná spadla na povrch. Toto by viedlo k poklesu tlaku na nočnej strane, vzniknutý tlakový gradient by viedol k presunu vzdušnej hmoty z denného strany na nočnú, kde by tento nový vzduch tiež v krátkom čase vychladol a zamrzol atď. Vo výsledku by celá atmosféra skončila zamrznutá na nočnej strane planéty.

Praktická časť

2.1 Planetárium

(**100 b**, autor: Samuel Buranský a Jana Švrčková)

Predstavte si, že ste sa po skončení AO so stratou pamäti zobudili na neznámom opustenom mieste. Chcete zistiť, kde sa práve nachádzate, no pri sebe nemáte nič okrem hodiniek, ktoré ukazujú LSEČ (UT+2) a mapy/atlasu oblohy, z ktorého ste sa učili na súťaž. Rozhodnete sa teda, že svoju polohu určíte podľa hviezd. Kvôli strate pamäti si nie ste úplne istí ani aký je dátum, preto sa ho na základe oblohy pokúsite aspoň odhadnúť.

Planetárium zobrazuje otáčajúcu sa oblohu počas troch po sebe nasledujúcich dní. Vašou úlohou je s presnosťou na celé stupne určiť **zemepisnú šírku**, **zemepisnú dĺžku** a aktuálny **kalendárny mesiac**.

Na začiatok máte 10 minút na prečítanie zadania. Po ich uplynutí sa spustí simulácia. Simulácia bude zobrazovať 3 po sebe nasledujúce dni (72 hodín). Následne budete mať 10 minút na zapísanie údajov, výpočty a rozmyslenie ďalšieho postupu. Následne sa rovnaká simulácia spustí znova. Na koniec budete mať posledných 10 minút na spísanie riešenia.

Nezabudnite aspoň stručne popísať aj postup, ako ste sa k výsledným hodnotám dopracovali. V prípade, že dostanete nesprávne výsledky, môžete dostať aspoň čiastkové body za správny postup či nápad na riešenie.

Na riešenie existuje viacero možných prístupov. Uvádzame preto iba niektoré z nich. Na úvod je vhodné si všimnúť že sa nachádzame na južnej a západnej pologuli. Západnú pologuľu určíme podľa toho, že Slnko kulminuje po 14:00 LSEČ a južnú podľa viditeľnosti južných súhvezdí a rotácie oblohy okolo južného svetového pólu.

Pri určovaní zemepisnej šírky môžeme postupovať tak, že nájdeme hviezdu, ktorá sa pri dolnej kulminácii dotýka horizontu (v našej simulácii to bol napríklad Gacrux). Na základe deklinácie tejto hviezdy je možné určiť zemepisnú šírku. Pre deklináciu a zemepisnú šírku je možné napísať vzťah

$$\varphi = -90 - \delta\,, \tag{2.1.1}$$

ktorý platí pre južnú pologuľu a južné súhvezdia ($\varphi < 0$, $\delta < 0$).

Body je možné získať podľa nasledujúcich intervalov presnosti: na stupeň presné určenie - 30b, chyba do 2° - 25b, chyba do 5° - 15b, chyba do 10° - 5b.

Na určenie zemepisnej dĺžky je možné určiť čas poludnia alebo čas polnoci. Čas poludnia vieme určiť ako stred medzi východom a západom Slnka. Počas simulácie nastane spln Mesiaca, čas

polnoci preto môžeme odhadnúť ako stred medzi východom a západom Mesiaca ale taktiež ako stred medzi východom a západom ľubovoľnej hviezdy. LSEČ je vhodné si prepočítať do UT, pre ktorý platí

$$\mathrm{UT} = \mathrm{LSEČ} - 2\,\mathrm{h}\,, \tag{2.1.2}$$

Následne je zemepisná dĺžka daná časovým rozdielom medzi polnocou v UT a miestnou polnocou, pričom jedna časová hodina zodpovedá 15° v dĺžke. Je možné použiť aj časový rozdiel medzi miestnou polnocou a polnocou v UT, je treba si ale uvedomiť, že LSEČ zodpovedá zemepisnej dĺžke 30° (a nie 15° ako to je v prípade SEČ).

Body je možné získať podľa nasledujúcich intervalov presnosti: na stupeň presné určenie - 40b, chyba do 5° - 25b, chyba do 10° - 15b, chyba do 15° - 5b.

Pre určenie mesiaca bolo možné si všimnúť, že jarný bod kulminuje približne o polnoci. Slnko sa preto musí nachádzať v blízkosti jesenného bodu. To znamená, že simulácia sa odohráva v blízkosti jesennej rovnodennosti a je teda mesiac september.

Plný počet bodov (30b) je možné získať za presné určenie mesiaca a polovicu bodov (15b) za chybu 1 mesiac.

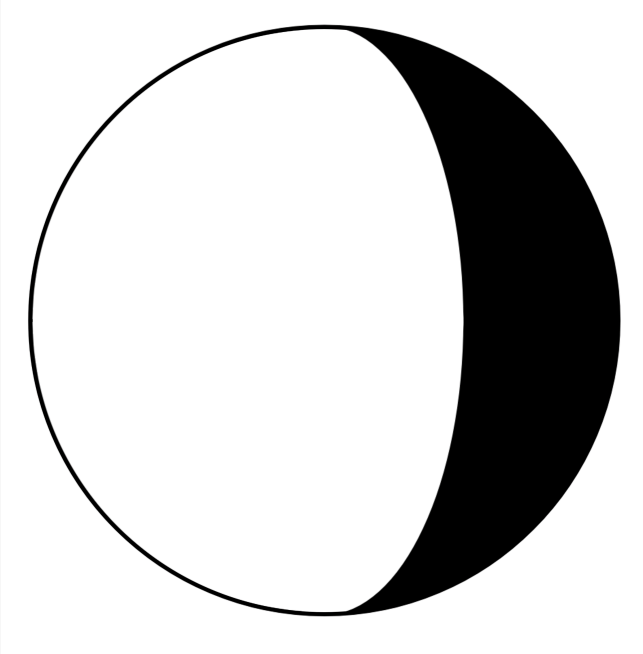
Správna poloha bola $\varphi = -32°44'56''$, $l = -52°38'54''$ (západná pologuľa) a dátum prvého dňa 17. 09. Body bolo možné získať aj nezávisle na intervaloch presnosti, na základe spísaných postupov a myšlienok v riešení.

2.2 Zakresľovanie Mesiaca a planét (**100 b**, autor: Jana Švrčková)

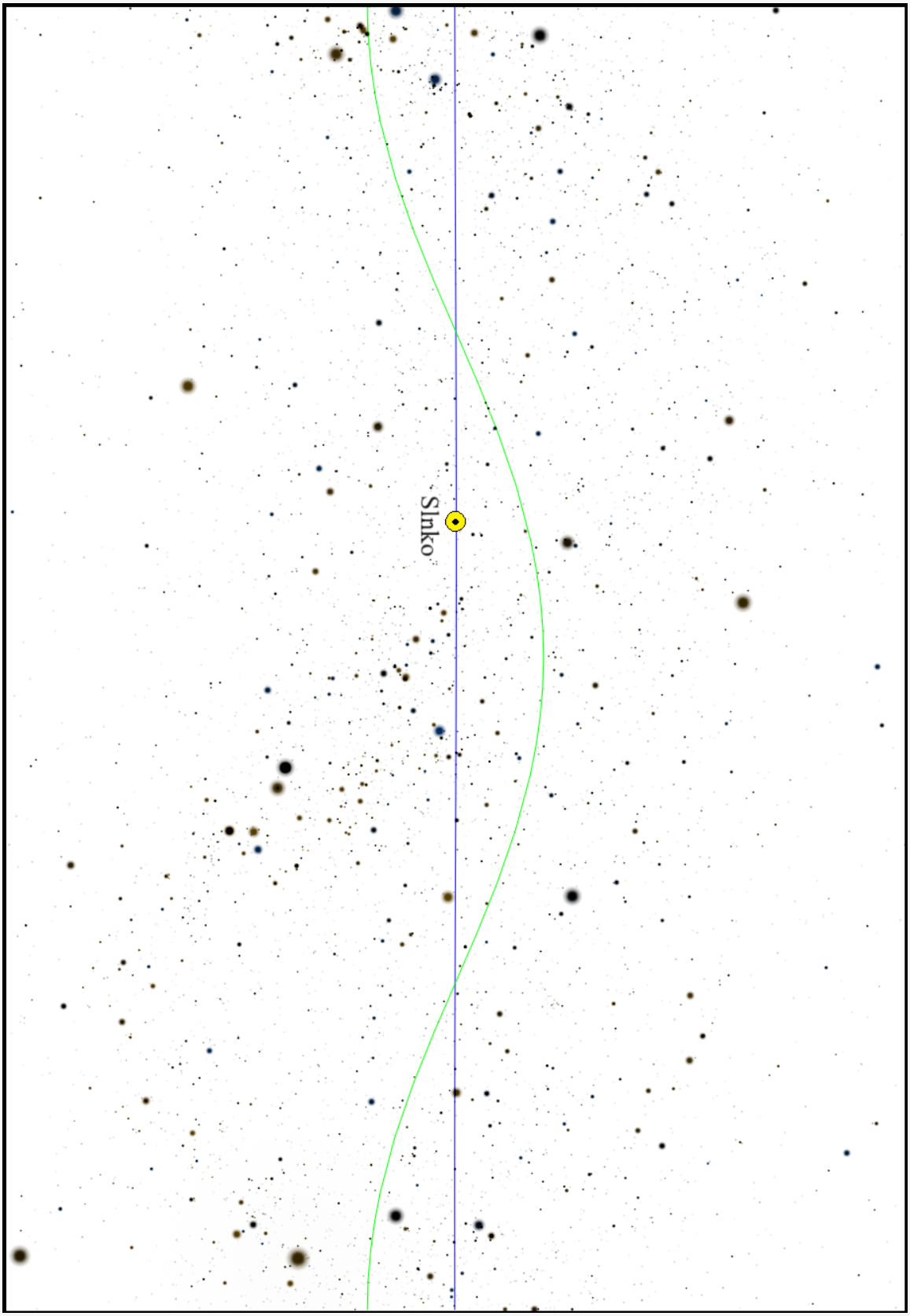
V tejto úlohe máte k dispozícii mapu celej oblohy v Mercatorovej projekcii, v ktorej sú ekliptikálne súradnice zobrazené ako pravouhlá sieť. Na mape je vyznačená ekliptika, svetový rovník a poloha Slnka. Miestny hviezdny čas je 14 h 30 min. Vašou úlohou je zakresliť polohy planét a Mesiaca do mapy, pričom môžete predpokladať, že sa všetky tieto objekty v danom čase nachádzajú na ekliptike. Využiť môžete nasledujúce informácie.

- **Merkúr** sa nachádza v najideálnejšej možnej polohe na to, aby ho bolo možné pozorovať ráno pred východom Slnka.
- **Venuša** má fázu ako na obrázku 2.2.1 (horná časť obrázka smeruje na sever).
- **Mesiac** je v prvej štvrti.
- **Mars** pozorujeme s uhlovým priemerom 17,9″.
- **Jupiter** pozorujeme s uhlovým priemerom 31,1″.
- **Saturn** má ekliptikálnu dĺžku 150°.
- **Urán** má rektascenziu 12^{h}.
- **Neptún** sa nachádza najvyššie nad obzorom.

Pre každý jeden objekt aspoň stručne odôvodnite váš postup.



Obr. 2.2.1: Schéma fázy Venuše.



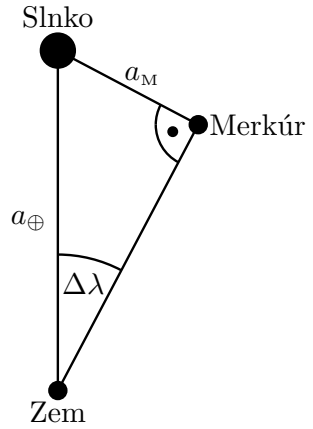
Obr. 2.2.2: Mapa hviezdnej oblohy. Prevzaté z programu Stellarium.

Modrá čiara na mape je ekliptika a zelená je rovník. Vďaka Mercatorovej projekcii sú ekliptikálne dĺžky zobrazené rovnomerne, čo výrazne zjednoduší zakresľovanie objektov do mapy. Stačí len určiť uhlovú vzdialenosť planét a Mesiaca od Slnka a prepočítať ju do vzdialenosti od Slnka v cm na mape.

Merkúr

Ideálne podmienky na pozorovanie Merkúru sú vtedy, keď je v maximálnej elongácii. Pozorujeme ho ráno pred východom Slnka, je preto na západ od Slnka, teda v maximálnej západnej elongácii. Dráha Merkúru má veľkú excentricitu, aktuálna vzdialenosť Merkúru od Slnka preto výrazne ovplyvňuje, do akej maximálnej uhlovej vzdialenosti od Slnka sa môže dostať pri pohľade zo Zeme. Zaujímajú nás ideálne podmienky, tie nastanú pri najväčšej možnej uhlovej vzdialenosti Merkúru od Slnka. Merkúr vtedy musí byť v aféliu, jeho vzdialenosť od Slnka je

$$r_\mathrm{a} = a_\mathrm{M}(1 + e_\mathrm{M})\,. \tag{2.2.1}$$



Obr. 2.2.3: Výpočet polohy Merkúru.

Uhlovú vzdialenosť Merkúru od Slnka vypočítame na základe obr. 2.2.3

$$\sin\Delta\lambda = \frac{r_a}{a_\oplus} = \frac{a_\mathrm{M}}{a_\oplus}(1 + e_\mathrm{M})\,. \tag{2.2.2}$$

Vychádza $\Delta\lambda \approx 28°$.

Venuša

Z fotky Venuše zistíme jej fázový uhol, z čoho sa následne dá určiť uhlová vzdialenosť Venuše od Slnka. Najskôr odmeriame priemer disku Venuše $2r$ a vzdialenosť r'. Polomer Venuše na obrázku je $r = 2{,}8\,\mathrm{cm}$ (samozrejme, záleží to na škále, v akej je obrázok vytlačený). Vzdialenosť hranice medzi svetlom a tieňom od stredu disku Venuše je $r' = 1{,}3\,\mathrm{cm}$.

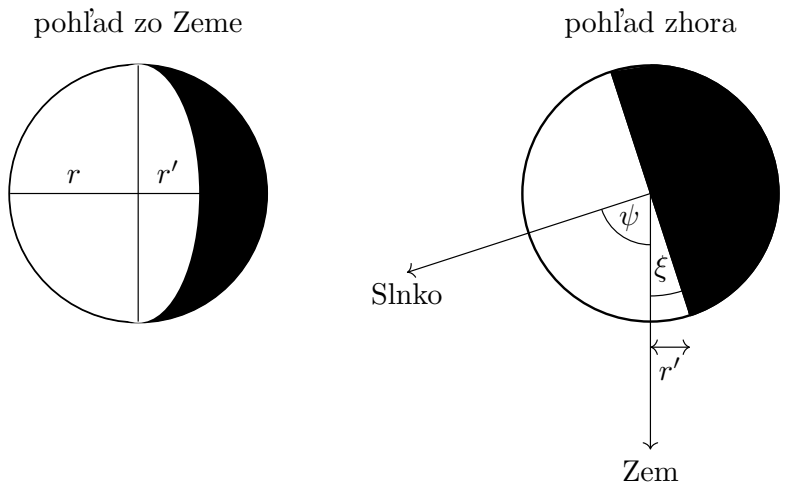
Na obrázku 2.2.4 je schematický nákres pohľadu na Venuše zo Zeme a zhora. Uhol ξ vypočítame ako

$$\sin\xi = \frac{r'}{r}\,. \tag{2.2.3}$$

Priamka smerujúca k Slnku je kolmá na hranicu svetla a tieňa, preto je súčet uhla ξ a fázového uhla ψ rovný 90°. Pre fázový uhol preto platí

$$\cos\psi = \frac{r'}{r}\,. \tag{2.2.4}$$

Číselne dostaneme $\psi \approx 62°$.



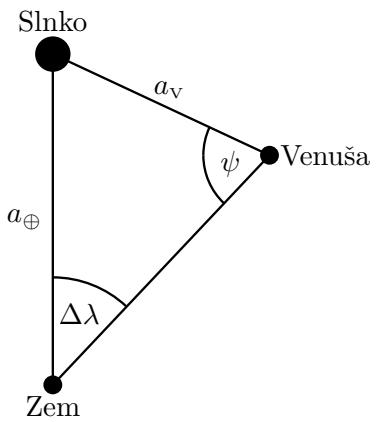
Obr. 2.2.4: Výpočet fázového uhla Venuše.

Uhlovú vzdialenosť Venuše a Slnka dostaneme zo sínusovej vety pre trojuholník Slnko-Zem-Venuša, viď obr. 2.2.5,

$$\frac{a_\mathrm{V}}{\sin\Delta\lambda} = \frac{a_\oplus}{\sin\psi}\,, \tag{2.2.5}$$

$$\Delta\lambda = \arcsin\left(\frac{a_\mathrm{V}}{a_\oplus}\sin\psi\right) \approx 40^\circ\,. \tag{2.2.6}$$

Ako bolo uvedené v zadaní, na obrázku je sever smerom nahor. Tieň sa nachádza na pravej strane, z čoho vyplýva, že Venuša sa nachádza na západ od Slnka.



Obr. 2.2.5: Výpočet polohy Venuše z jej fázového uhla.

Mesiac

Mesiac je v prvej štvrti, to znamená, že sa nachádza 90° na východ od Slnka.

Mars

V prípade Marsu a Jupitera poznáme iba ich uhlový priemer. Vyskúšame vypočítať ich uhlové priemery vo významných aspektoch, či sa budú zhodovať s uvedenými hodnotami. Skúsime najskôr opozíciu a konjunkciu, v nich majú planéty najväčší a najmenší uhlový priemer. Pre Mars vychádza

$$\theta_{♂,\mathrm{k}} = \frac{2R_♂}{a_♂ + a_\oplus} = 1{,}80\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad} = 3{,}7''\,, \tag{2.2.7}$$

$$\theta_{♂,\mathrm{o}} = \frac{2R_♂}{a_♂ - a_\oplus} = 8{,}66\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad} = 17{,}9''\,. \tag{2.2.8}$$

Vidíme, že uhlový priemer Marsu v opozícii sa zhoduje s hodnotou uvedenou v zadaní. Mars je teda o 180° vzdialený od Slnka.

Jupiter

Uhlový priemer Jupitera v konjunkcii a opozícii je

$$\theta_{\mathrm{Ju,k}} = \frac{2R_{\mathrm{Ju}}}{a_{\mathrm{Ju}} + a_{\oplus}} = 1{,}51 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 31{,}1'' \,, \tag{2.2.9}$$

$$\theta_{\mathrm{Ju,o}} = \frac{2R_{\mathrm{Ju}}}{a_{\mathrm{Ju}} - a_{\oplus}} = 2{,}22 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 45{,}8'' \,. \tag{2.2.10}$$

Hodnota v zadaní sa zhoduje s uhlovým priemerom Jupitera v konjunkcii, na mape bude preto Jupiter na rovnakom mieste ako Slnko.

Saturn

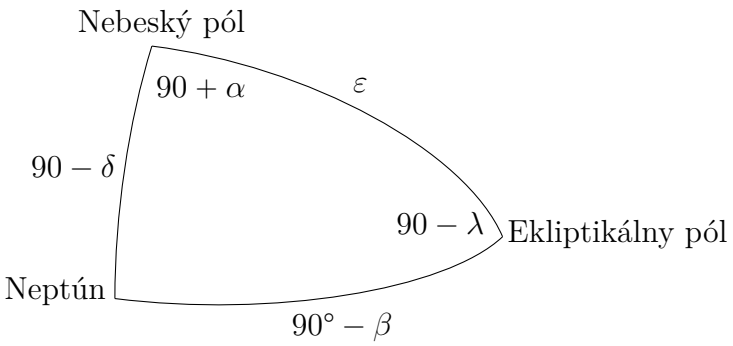
Saturn má ekliptikálnu dĺžku 150°, stačí teda na mape odmerať vzdialenosť zodpovedajúcu 150°. Ekliptikálna dĺžka sa meria od jarného bodu smerom na východ. Vzdialenosť od jarného bodu po okraj mapy nie je dostačujúca, Saturn sa preto bude nachádzať pri jej pravom okraji.

Urán

Urán má rektascenziu 12^{h}, čo znamená, že sa nachádza v jesennom bode. Ten je v súhvezdí Panny, v mieste, kde sa pretína ekliptika s rovníkom.

Neptún

Zo zadania vyplýva, že Neptún práve kulminuje, nachádza sa na meridiáne. Polohu meridiánu vieme buď odhadnúť (menej presné) alebo vypočítať zo sférických vzorcov. Hodinový uhol objektov na meridiáne je 0^{h}, preto je ich rektascenzia rovná hviezdnemu času, teda $\alpha = 14^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{min}} = 217{,}5°$. Rektascenzia sa síce nerovná ekliptikálnej dĺžke, ale môžeme ju aspoň použiť ako odhad, a Neptún zakresliť na ekliptikálnej dĺžke $\lambda = 217{,}5°$. Obidve veličiny by mali mať podobné hodnoty. Na získanie presnej hodnoty λ je potrebné použiť vzorce zo sférickej trigonometrie.



Obr. 2.2.6: Sférický trojuholník na prevod rovníkových a ekliptikálnych súradníc.

Na obrázku 2.2.6 je sférický trojuholník, ktorý použijeme na prepočet medzi ekliptikálnymi a rovníkovými súradnicami. V zadaní je predpoklad, že sa všetky planéty nachádzajú presne na ekliptike, teda ich ekliptikálna šírka je $\beta = 0°$. Poznáme β a α aj sklon ekliptiky ε, využijeme preto kosínusovú vetu

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon\cos(90° + \alpha)\,, \tag{2.2.11}$$

ktorú s využitím $\sin\beta = 0$ ešte môžeme upraviť na

$$\tan\delta = \tan\varepsilon\cos(90° + \alpha)\,. \tag{2.2.12}$$

Vďaka vlastnostiam funkcií sínus a kosínus sa tento výraz dá ešte ďalej zjednodušiť

$$\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha) = -\sin\alpha\,, \tag{2.2.13}$$

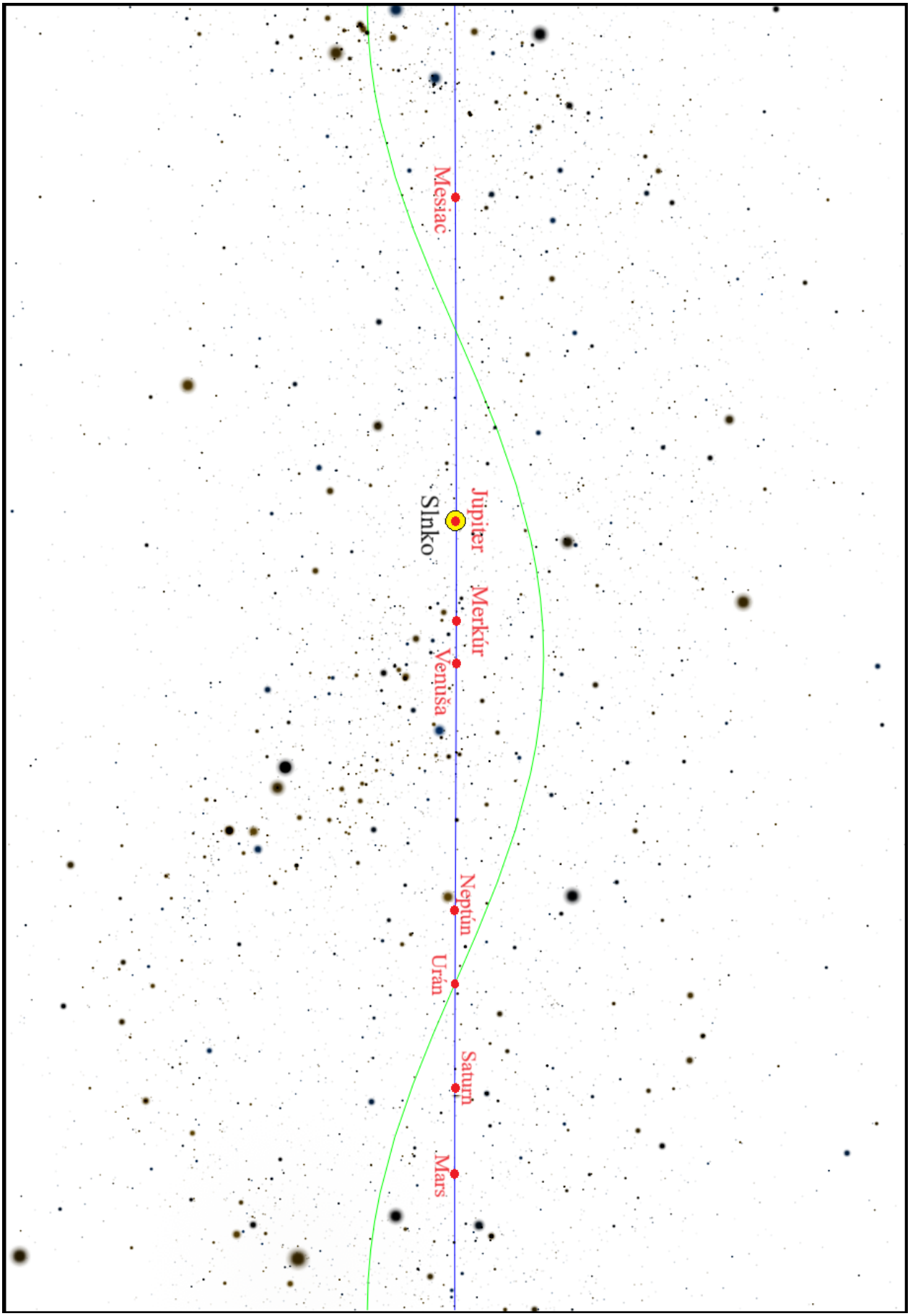
$$\tan\delta = \tan\varepsilon\sin\alpha\,. \tag{2.2.14}$$

Deklinácia Neptúna je $\delta = -15°$. Ekliptikálnu dĺžku vypočítame zo sínusovej vety (na úpravy sme opäť využili vlastnosti sínusu a kosínusu)

$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta}{\cos\beta}\cos\alpha\,. \tag{2.2.15}$$

Funkcia arccos nám na kalkulačke dá $\lambda' = 140°$, čo ešte nie je správny výsledok, ten by mal mať hodnotu blízku rektascenzii. Opäť využijeme vlastnosti kosínusu $\cos x = \cos(360° - x)$ a dostaneme $\lambda = 220°$. Vidíme, že od rektascenzie sa líši iba o 2,5°, takže $\lambda = \alpha$ by bola celkom dobrá aproximácia. Pri zakresľovaní do mapy by totiž rozdiel v týchto dvoch polohách bol minimálny.

Všetky planéty a Mesiac sú zakreslené v mape 2.2.7 na ďalšej strane.



Obr. 2.2.7: Mapa so zakreslenými planétami a Mesiacom. Prevzaté z programu Stellarium.

Dátová analýza

3.1 Planetárne hmloviny

(**200 b**, autor: Samuel Amrich)

Pozorovanie planetárnych hmlovín je skvelý nástroj na porozumenie dejov odohrávajúcich sa vo vesmíre. Je ale potrebné z meraní vždy zistiť čo najviac základných informácií o týchto objektoch. Dvojica najzákladnejších je elektrónová hustota n_e a elektrónová teplota T_e.

Vašou úlohou je teda vyskúšať si takéto určenie z priloženého spektra planetárnej hmloviny NGC 6881 a zistiť na základe priložených vzorcov a grafov elektrónovú hustotu n_e a elektrónovú teplotu T_e. Laboratórne vlnové dĺžky čiar, ktoré pozorujeme sú (Å $= 10^{-10}$ m)

$$\text{pre raz ionizovaný kremík [SiII]: } \Lambda_{6716} = 6716\,\text{Å}\,,\ \Lambda_{6731} = 6731\,\text{Å}\,,$$

$$\text{pre dvakrát ionizovaný kyslík [OIII]: } \Lambda_{4959} = 4959\,\text{Å}\ \ \Lambda_{5007} = 5007\,\text{Å}\,,\ \Lambda_{4363} = 4363\,\text{Å}\,.$$

Pomery intenzít, ktoré budete potrebovať pre riešenie úlohy sú

$$P_\mathrm{I} = \frac{F_{6716}}{F_{6731}} \quad , \quad P_\mathrm{II} = \frac{F_{4959} + F_{5007}}{F_{4363}} \tag{3.1.1}$$

Zároveň budete potrebovať semiempirický vzťah na odhad reálnej intenzity. Ten je odvodený z predpokladu, že všetky spektrálne čiary sú v tvare Gaussovej funkcie s rovnakým rozšírením. Pre náš prípad musíme k odmeranej maximálnej intenzite (ktorú zobrazujeme na osi y) pripočítať hodnotu Δ_y. Chybu maximálnej intenzity označíme σ_y.

$$\Delta_y = y\left[1 - \exp\left(\frac{-\Delta_x^2}{20\,\text{Å}^2}\right)\right] \quad , \quad \sigma_y = \frac{\Delta_x}{10\,\text{Å}^2}(y - \Delta_y)\,\sigma_x\,, \tag{3.1.2}$$

kde hodnota 20 Å^2 je empirická konštanta pre náš príklad a Δ_x je rozdiel odhadnutej hodnoty vlnovej dĺžky (ktorú zobrazujeme na osi x) pre maximálnu intenzitu a bodu s nameranou maximálnou intenzitou. Vlnovú dĺžku maximálnej intenzity zistite najpresnejšie ako je možné.

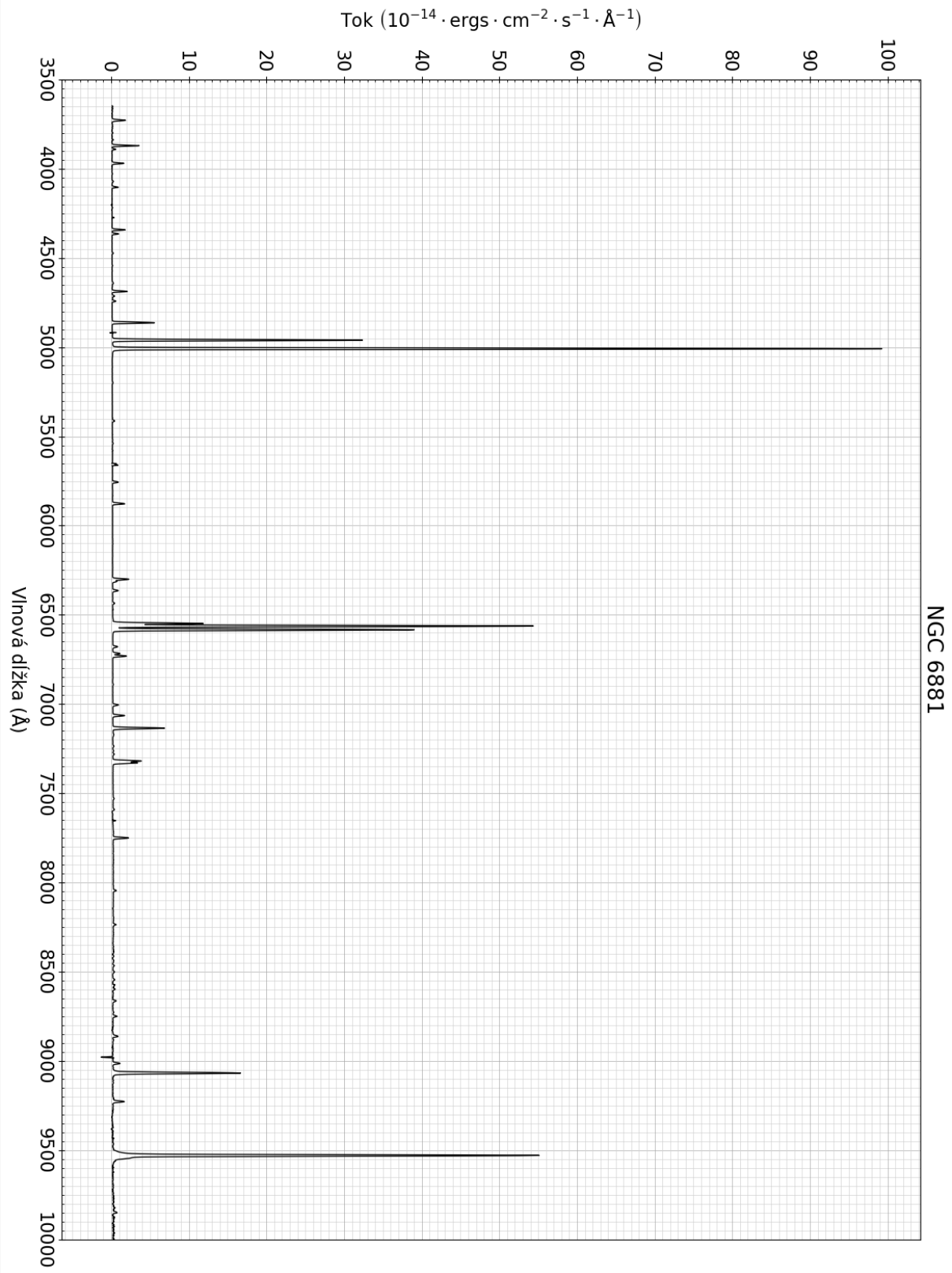
Úlohy

(a) **Identifikujte všetky zadané vlnové dĺžky spektrálnych čiar.**
Máte zadaných 5 vlnových dĺžok ktoré budú pre ďalšie úlohy zaujímavé. Zaznačte ich polohu do priložených grafov celého spektra planetárnej hmloviny NGC 6881, resp. zaznačte spektrálnu čiaru ktorá zodpovedá danej vlnovej dĺžke.

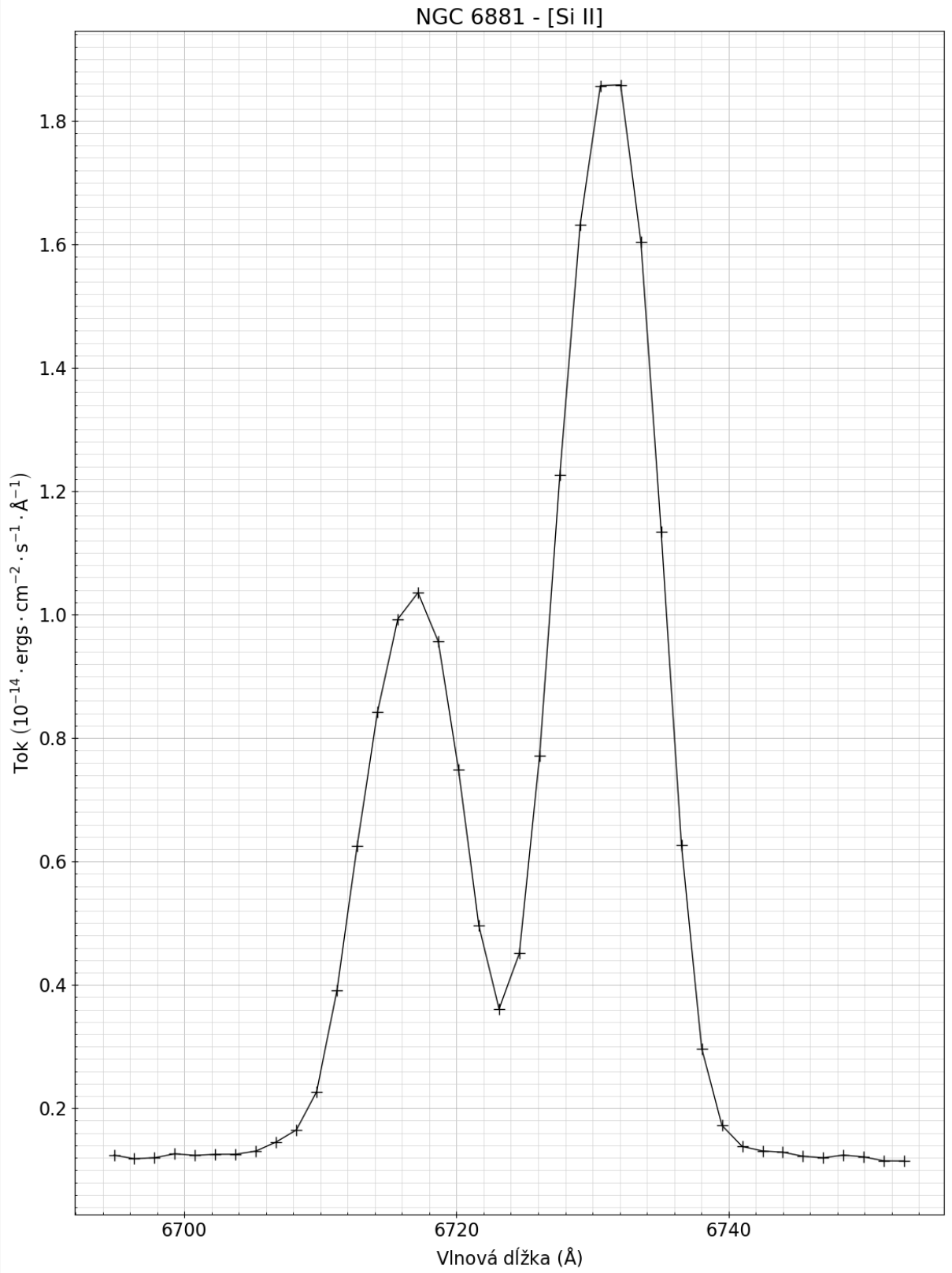
(b) **Určite elektrónovú hustotu n_e planetárnej hmloviny.**
Budete potrebovať vypočítať pomer P_I a použiť graf na obrázku 3.1.6. Nezabudnite na kalibráciu toku voči kontinuu (dôležitá je intenzita nad úrovňou konštantného toku) a na analýzu chýb merania (metóda a presnosť je na vás). Snažte sa zdokumentovať váš postup riešenia tak aby bolo jasné, ako ste jednotlivé hodnoty získali a ako ste získali chyby merania.

(c) **Určite elektrónovú teplotu T_e planetárnej hmloviny.**
Budete potrebovať vypočítať pomer P_{II}. Nezabudnite na kalibráciu toku voči kontinuu a na analýzu chýb merania. Výslednú hodnotu môžete získať buď riešením rovnice priloženej v grafe 3.1.7 (budete potrebovať výsledok predchádzajúcej úlohy alebo použiť tabuľkovú hodnotu $n_e = 1$ [všetky hodnoty hustoty sa používajú s jednotkou cm^{-3}] a využiť nejakú jednoduchú metódu numerického riešenia rovníc) alebo využijete graf 3.1.7, ktorý bol nakreslený pre $n_e = 1$ (keďže ale odčítanie z grafu je už predmetom úlohy (b), tak tento postup bude ohodnotený menším počtom bodov). Snažte sa zdokumentovať váš postup riešenia tak, aby bolo jasné, ako ste jednotlivé hodnoty získali a ako ste získali chyby merania.

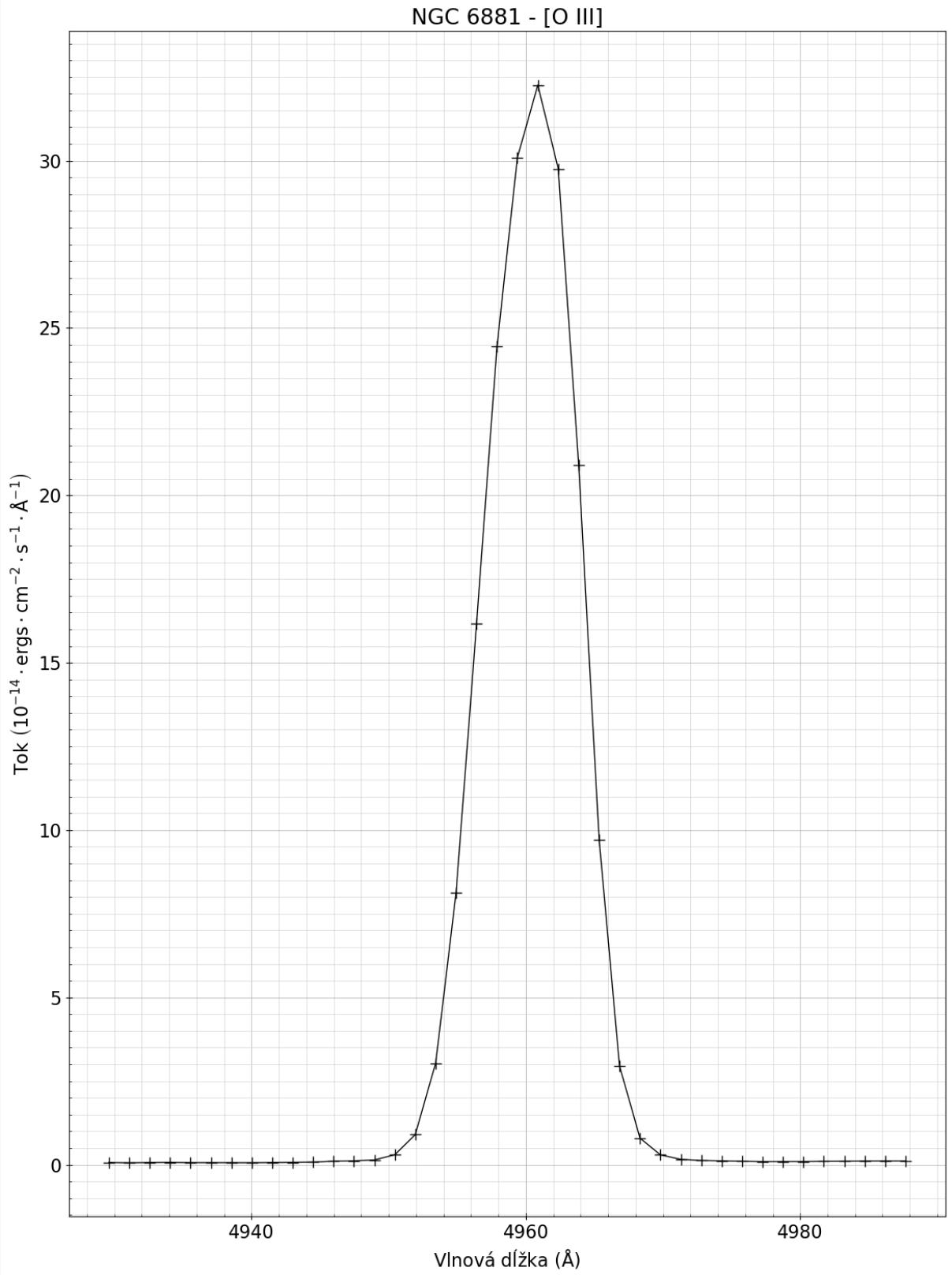
Snažte sa o maximálnu možnú presnosť výsledku a výslednej chyby, pretože sú hodnotené.



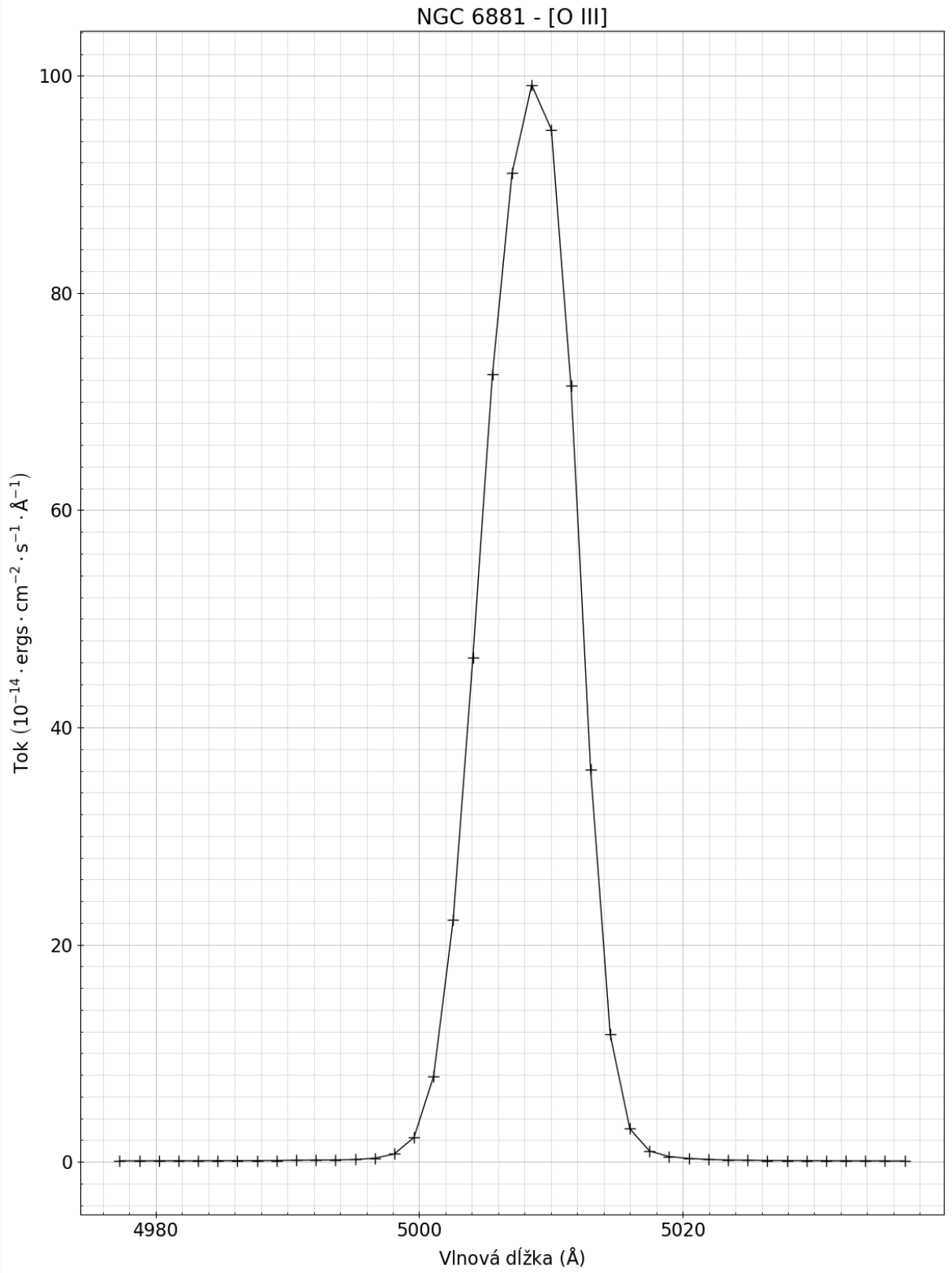
Obr. 3.1.1: Graf celého spektra planetárnej hmloviny NGC 6881.
Dáta Prevzaté z: Williams College and the University of Oklahoma
`https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/`.



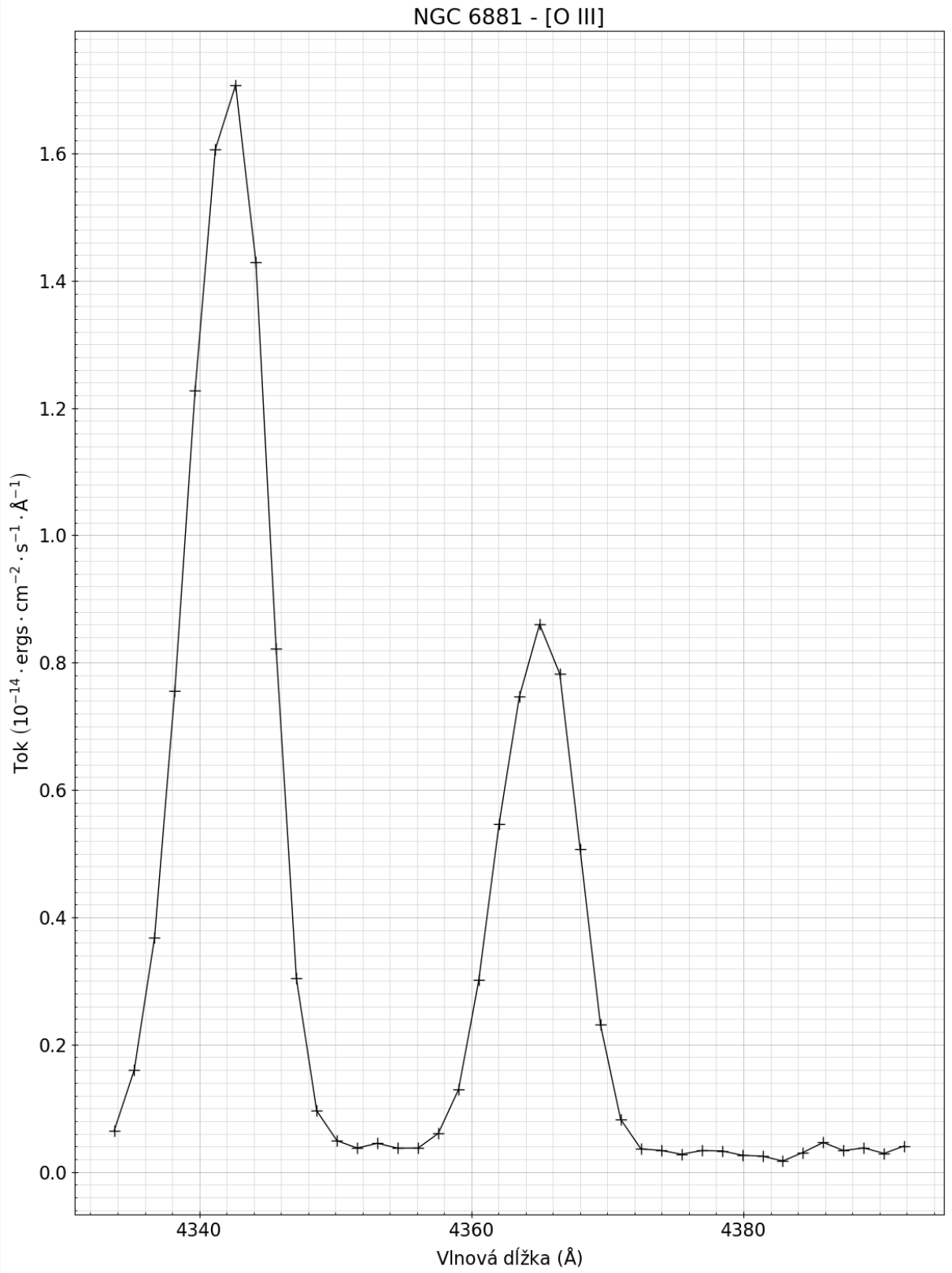
Obr. 3.1.2: Spektrum okolo vlnových dĺžok [Si II] 6716 Å a 6731 Å pre NGC 6881.
Dáta Prevzaté z: Williams College and the University of Oklahoma `https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/`.



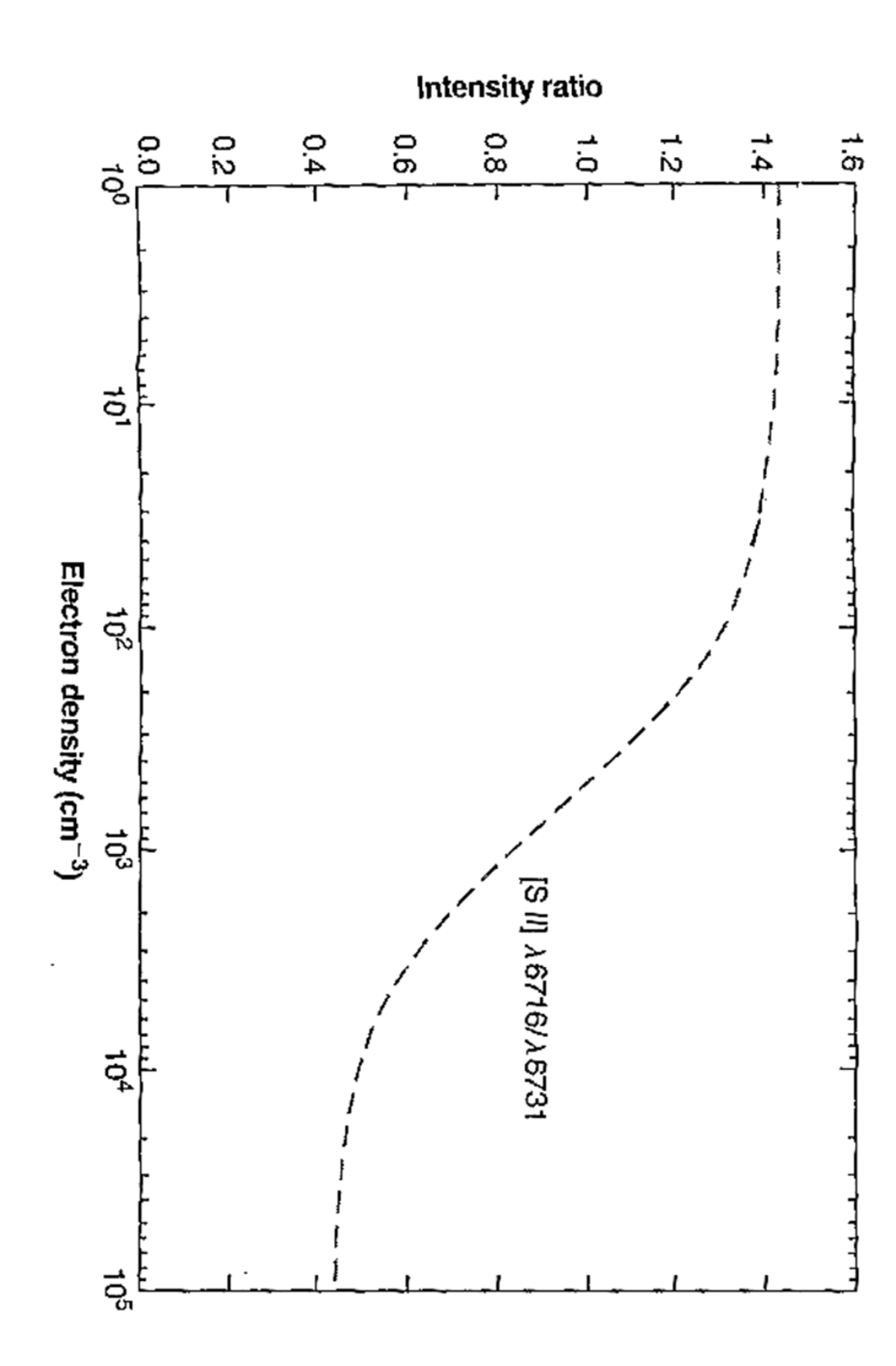
Obr. 3.1.3: Spektrum okolo vlnovej dĺžky [O III] 4959 Å pre NGC 6881. Dáta Prevzaté z: Williams College and the University of Oklahoma `https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/`.



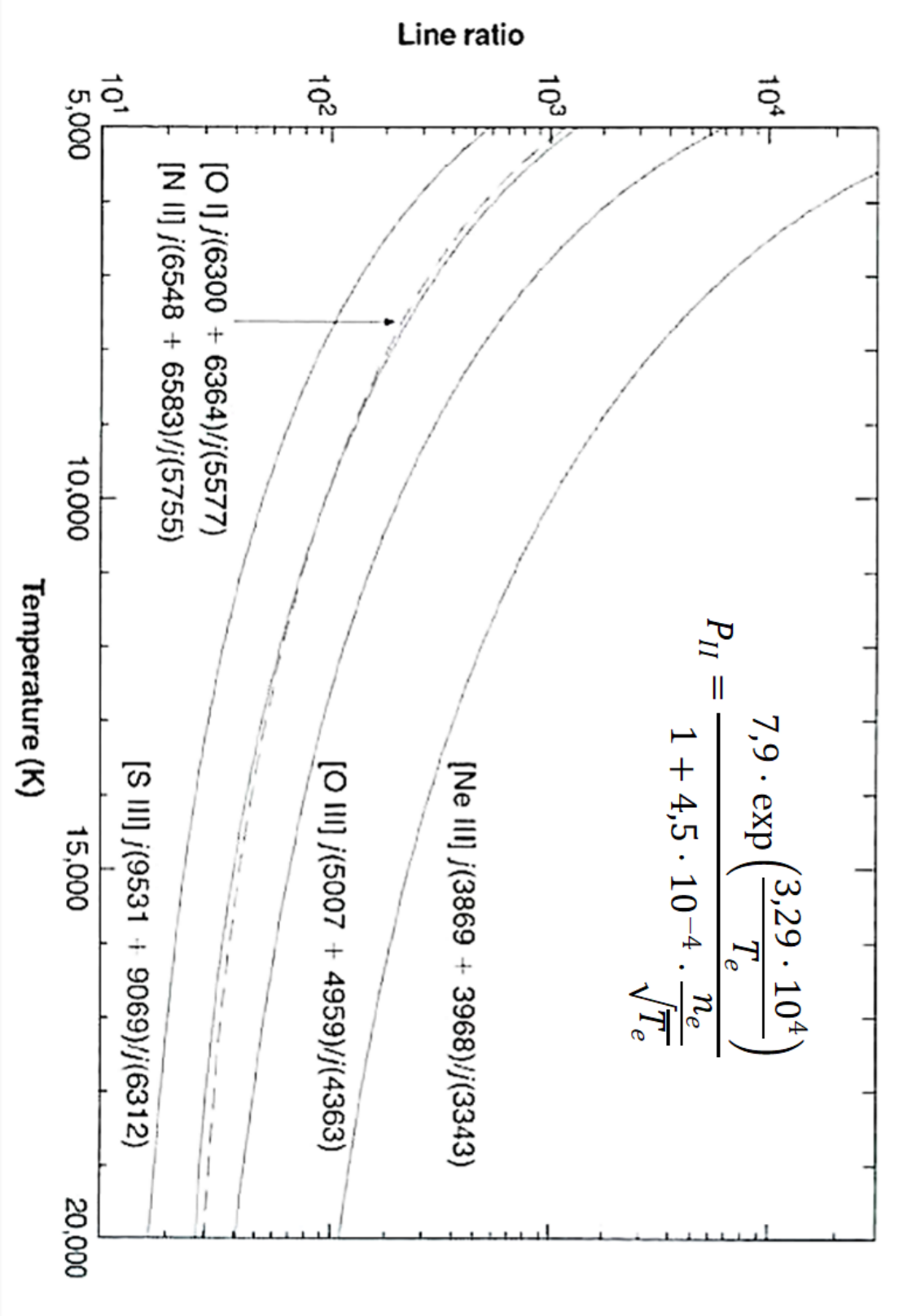
Obr. 3.1.4: Spektrum okolo vlnovej dĺžky [O III] 5007 Å pre NGC 6881. Dáta Prevzaté z: Williams College and the University of Oklahoma `https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/`.



Obr. 3.1.5: Spektrum okolo vlnovej dĺžky [O III] 4363 Å pre NGC 6881. Dáta Prevzaté z: Williams College and the University of Oklahoma `https://web.williams.edu/Astronomy/research/PN/nebulae/`.



Obr. 3.1.6: Graf závislosti intenzity P_{I} od elektrónovej hustoty.



Obr. 3.1.7: Graf závislosti intenzity P_{II} od elektrónovej teploty.

Prvou úlohou je identifikácia jednotlivých spektrálnych čiar v grafe 3.1.1, kde riešenie je celkom priame a jednoduché. Riešenie je viditeľné na grafe 3.1.8.

Následne pokračujeme na jednotlivé grafy, kde je potrebné určiť konkrétne intenzity pre skúmané spektrálne čiary. Pre jednoduchosť zápisov si definujeme skrátenie jednotky toku, ktorý sa vyskytuje na grafoch. Nech teda

$$1\,\mathrm{S} = 10^{-14}\,\mathrm{ergs}\cdot\mathrm{cm}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{\AA}^{-1}\,. \tag{3.1.3}$$

Následne určíme škálu vertikálnej aj horizontálnej osi, pretože jedna jednotka na grafe nezodpovedá celočíselnému násobku milimetrov na papieri. Táto škála nám následne poslúži na presnejšie odčítavanie hodnôt z grafov.

Ak chceme analyzovať chybu určenia vlnovej dĺžky λ, tak si musíme povšimnúť, že na grafe je jasne viditeľná diskretizácia hodnôt (meraná vlnová dĺžka môže nadobúdať iba určitých konkrétnych hodnôt). Preto musíme odmerať najlepšie vzdialenosť cez viac bodov diskretizácie a pomocou škály na vodorovnej ose určiť, aký je najmenší dielik Δ_λ posunu vo vlnových dĺžkach. Následne je možné povedať, že smerodajná odchýlka určenia vlnovej dĺžky σ_λ je jedna polovica najmenšieho dieliku. Je to z dôvodu, že akákoľvek iná chyba pri odčítavaní je rádovo menšia ako táto chyba diskretizácie.

Pre presné určenie maximálnej intenzity, tak ako je popísané v zadaní, je potrebné určiť maximálnu hodnotu, ktorá sa na grafe vyskytuje. To je jednoducho uskutočnené pohľadom a následným odčítaním zo zvislej osi. Taktiež potrebujeme odhad vlnovej dĺžky maxima. Jedna z možných, presných metód, je na niekoľkých miestach urobiť vodorovné rezy skúmanou krivkou a určiť stred toho rezu vkrivke, potom môžeme všetky tieto stredy „fitnúť“ zvislou čiarou, ktorá určuje odhad vlnovej dĺžky maximálnej intenzity. Je to z dôvodu, že predpokladáme osovú symetriu spektrálnej čiary.

Teraz už môžeme za pomoci rovníc (3.1.2) určiť hodnotu maximálnej intenzity pre všetky skúmané vlnové dĺžky. Nesmieme ale zabudnúť na odčítanie kontinua, ktoré sme nafitovali vodorovnou čiarou a jeho smerodajnú odchýlku odhadli ako polovicu dielika pravítka, ktorým meriame hodnoty na zvislej osi.

Takto získané hodnoty si následne spíšeme ako

$$F_{6716} = (0{,}91 \pm 0{,}01)\,\mathrm{S}\,, \tag{3.1.4}$$
$$F_{6731} = (1{,}760 \pm 0{,}007)\,\mathrm{S}\,, \tag{3.1.5}$$
$$F_{4959} = (32{,}2 \pm 2{,}0)\,\mathrm{S}\,, \tag{3.1.6}$$
$$F_{5007} = (100 \pm 3)\,\mathrm{S}\,, \tag{3.1.7}$$
$$F_{4363} = (0{,}85 \pm 0{,}02)\,\mathrm{S}\,. \tag{3.1.8}$$

Teraz už môžeme určiť požadované pomery P_I a P_II spolu s ich smerodajnými odchýlkami.

Potrebujeme vedieť vzorce pre prenesenú chybu pre jednotlivé pomery P_{I} a P_{II}

$$\sigma_{P_{\mathrm{I}}}^2 = \left(\frac{1}{F_{6731}}\right)^2 \cdot \sigma_{F6716}^2 + \left(\frac{F_{6716}}{F_{6731}^2}\right)^2 \cdot \sigma_{F6731}^2 \,, \tag{3.1.9}$$

$$\sigma_{P_{\mathrm{II}}} = \left(\frac{1}{F_{4363}}\right)^2 \cdot \sigma_{F4959}^2 + \left(\frac{1}{F_{4363}}\right)^2 \cdot \sigma_{F5007}^2 + \left(\frac{F_{4959}+F_{5007}}{F_{4363}^2}\right)^2 \cdot \sigma_{F4363}^2 \,. \tag{3.1.10}$$

Čím získame hodnoty

$$P_I = 0{,}517 \pm 0{,}006 \,, \tag{3.1.11}$$

$$P_{II} = 156 \pm 6 \,. \tag{3.1.12}$$

Teraz hodnotu P_{I} môžeme nájsť na grafe 3.1.6, pričom hľadáme hodnotu nie len P_{I} ale aj $P_{\mathrm{I}}+\sigma_{P_I}$ a $P_{\mathrm{I}}-\sigma_{P_I}$, aby sme zistili smerodajnú odchýlku určenia elektrónovej hustoty σ_{n_e}. Musíme mať na mysli, že hodnotu elektrónovej hustoty odrátavame z vodorovnej osi, ktorá je logaritmická. Preto je výsledná hodnota

$$n_e = 7230\,^{+1002}_{-879}\ \mathrm{cm}^{-3} \doteq 7000\,^{+1000}_{-900}\ \mathrm{cm}^{-3} \,. \tag{3.1.13}$$

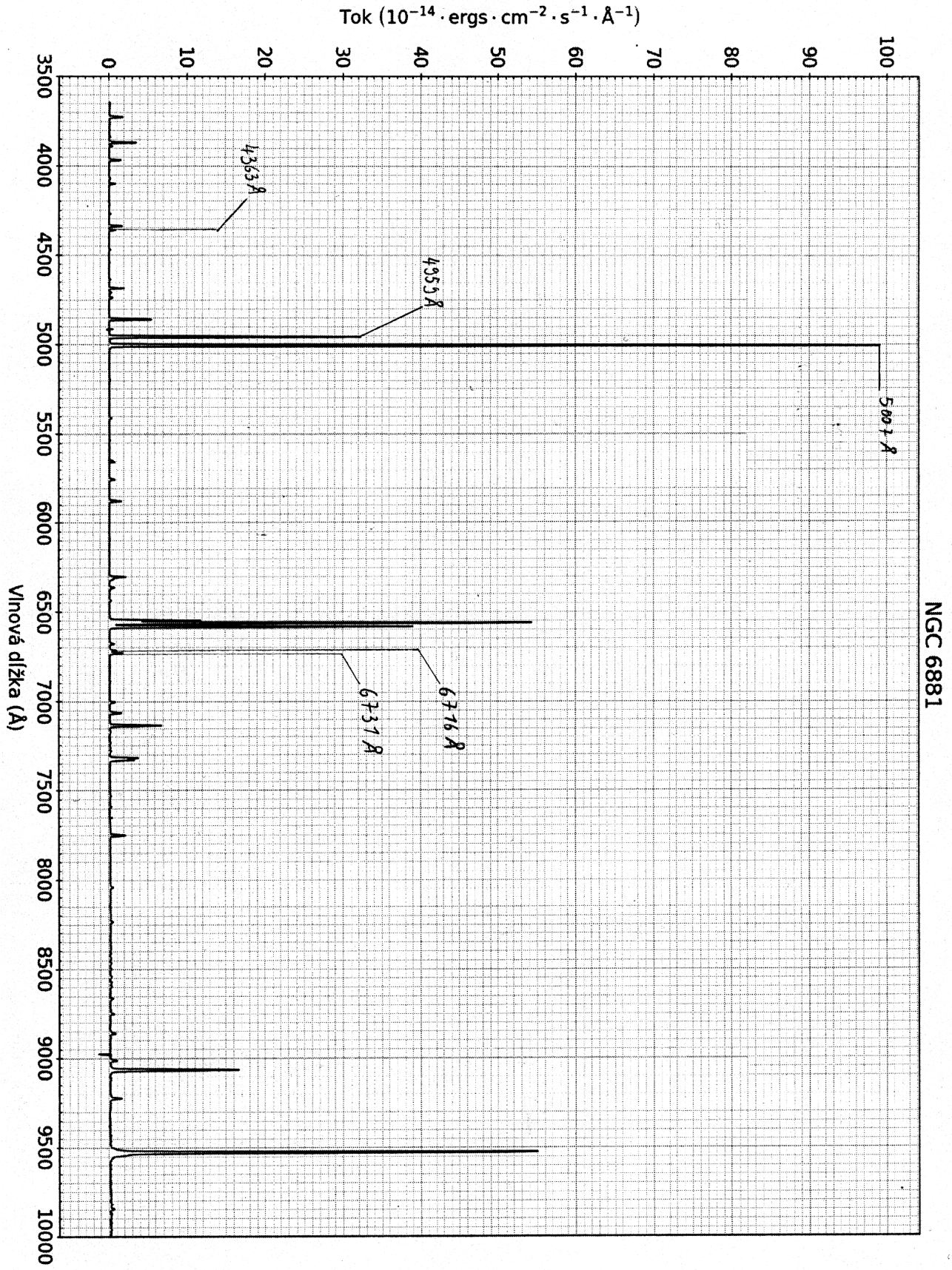
Kde je hlavné si povšimnúť, že smerodajná odchýlka už nie je symetrická, ale je rozdielna pre kladné a záporné hodnoty.

Ako posledným krok je určenie elektrónovej teploty T_e a jej smerodajná odchýlka. K tomuto využijeme neanalyticky riešiteľný vzťah, ktorý je na grafe 3.1.7. Ten je potrebné upraviť do tvaru, kde máme T_e osamotené na jednej strane

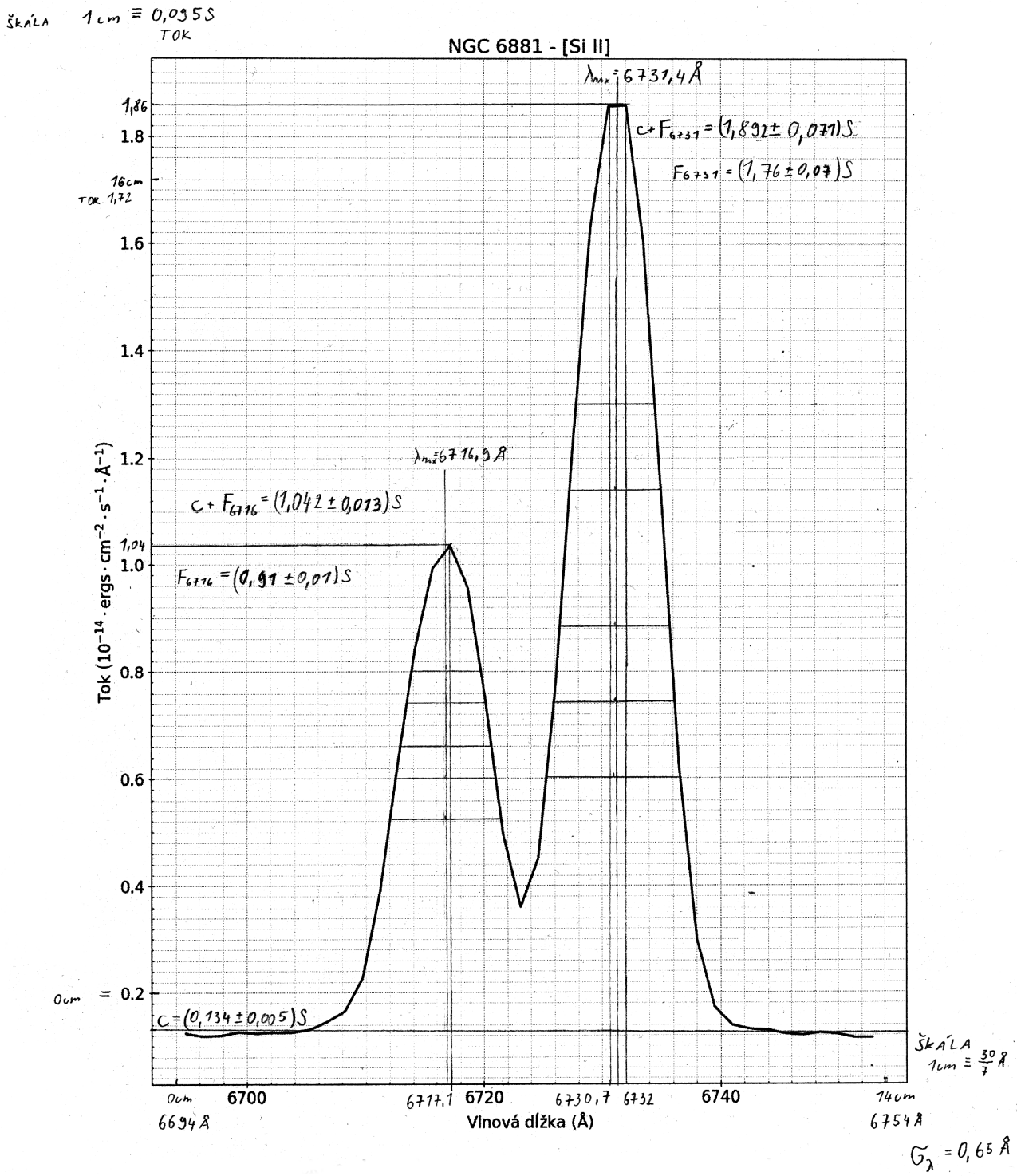
$$T_e = \frac{3{,}29 \cdot 10^4}{\ln\left[\frac{P_{II}}{7{,}9}\left(1 + 4{,}5 \cdot 10^{-4}\frac{n_e}{\sqrt{T_e}}\right)\right]} \,. \tag{3.1.14}$$

Keďže je to neanalytický vzťah, je potrebné ho riešiť numericky a najjednoduchšie je riešiť ho iteratívne. Teda skúsime odhadnúť prvotné riešenie a to dosadíme do pravej strany rovnice. Získané nové T_e dosadíme opäť do rovnice a takto opakujeme pokiaľ sa výsledné T_e už nemení. Keď chceme zistiť smerodajnú odchýlku, dosadíme do vzťahu hodnoty P_{II} a n_e také, ktoré vracajú maximálne/minimálne T_e. Takto získaný výsledok je rovný

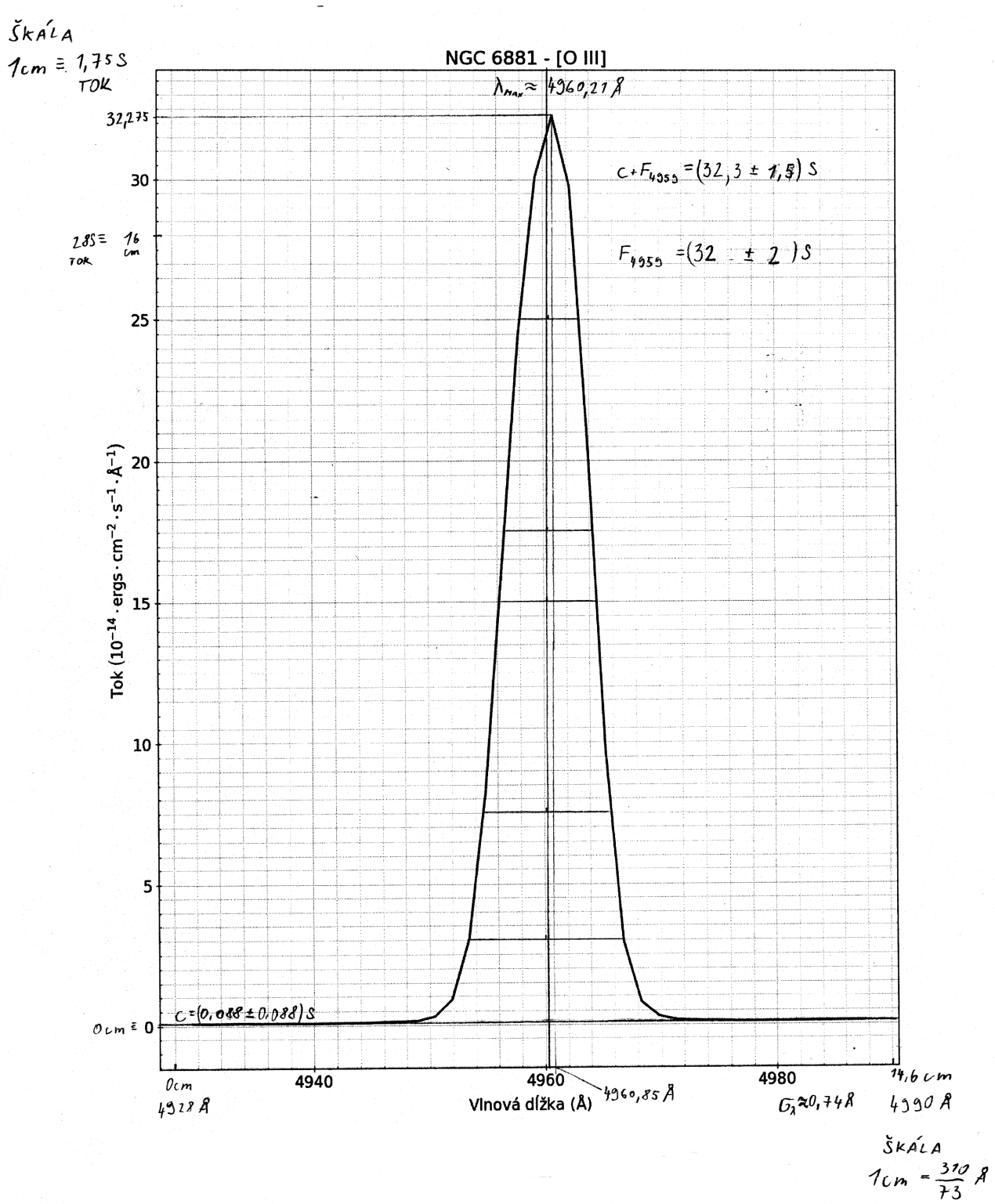
$$T_e = 10917\,^{+100}_{-151}\ \mathrm{K} \,. \tag{3.1.15}$$



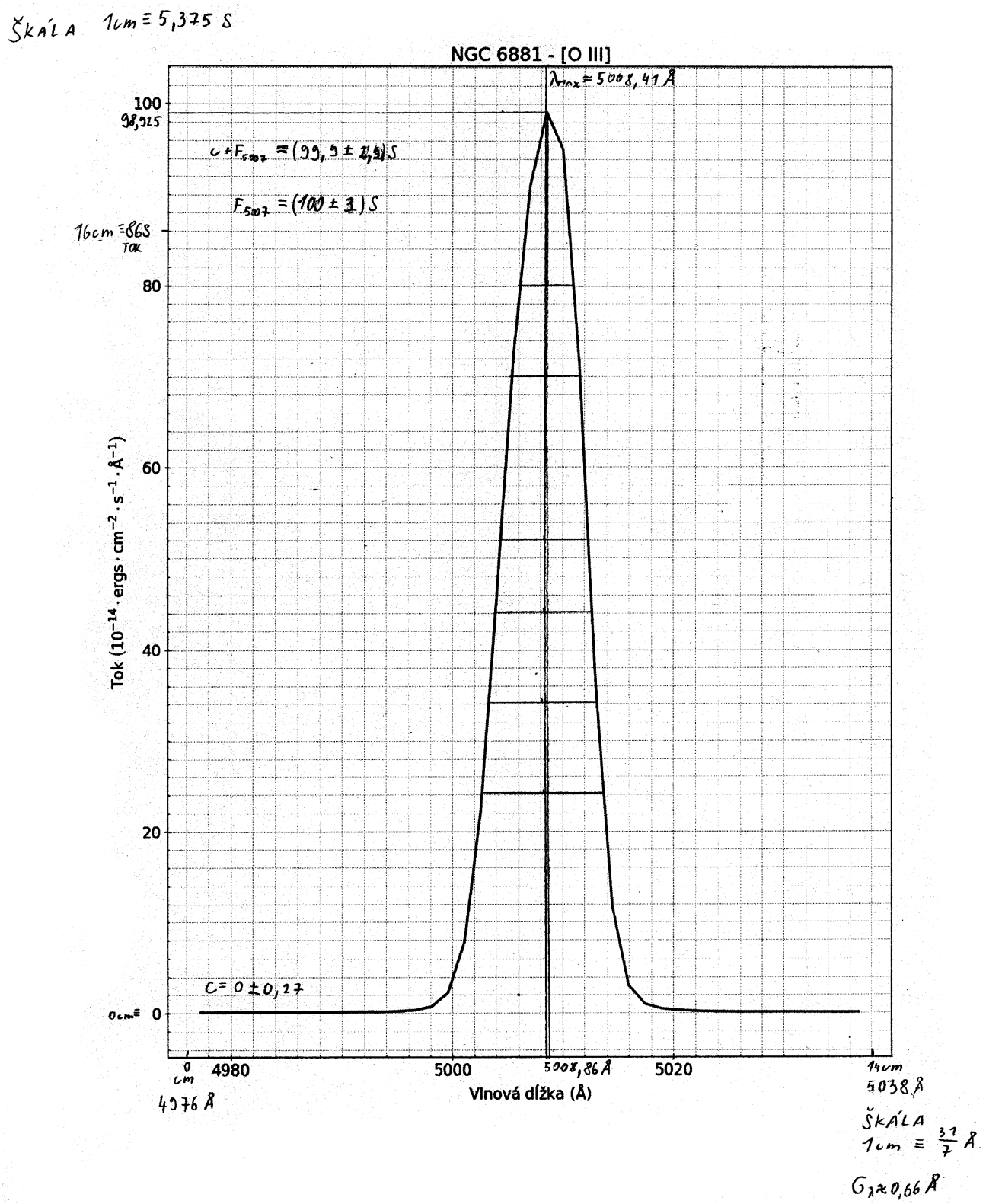
Obr. 3.1.8: Graf celého spektra planetárnej hmloviny NGC 6881 doplnený o riešenie a poznámky.



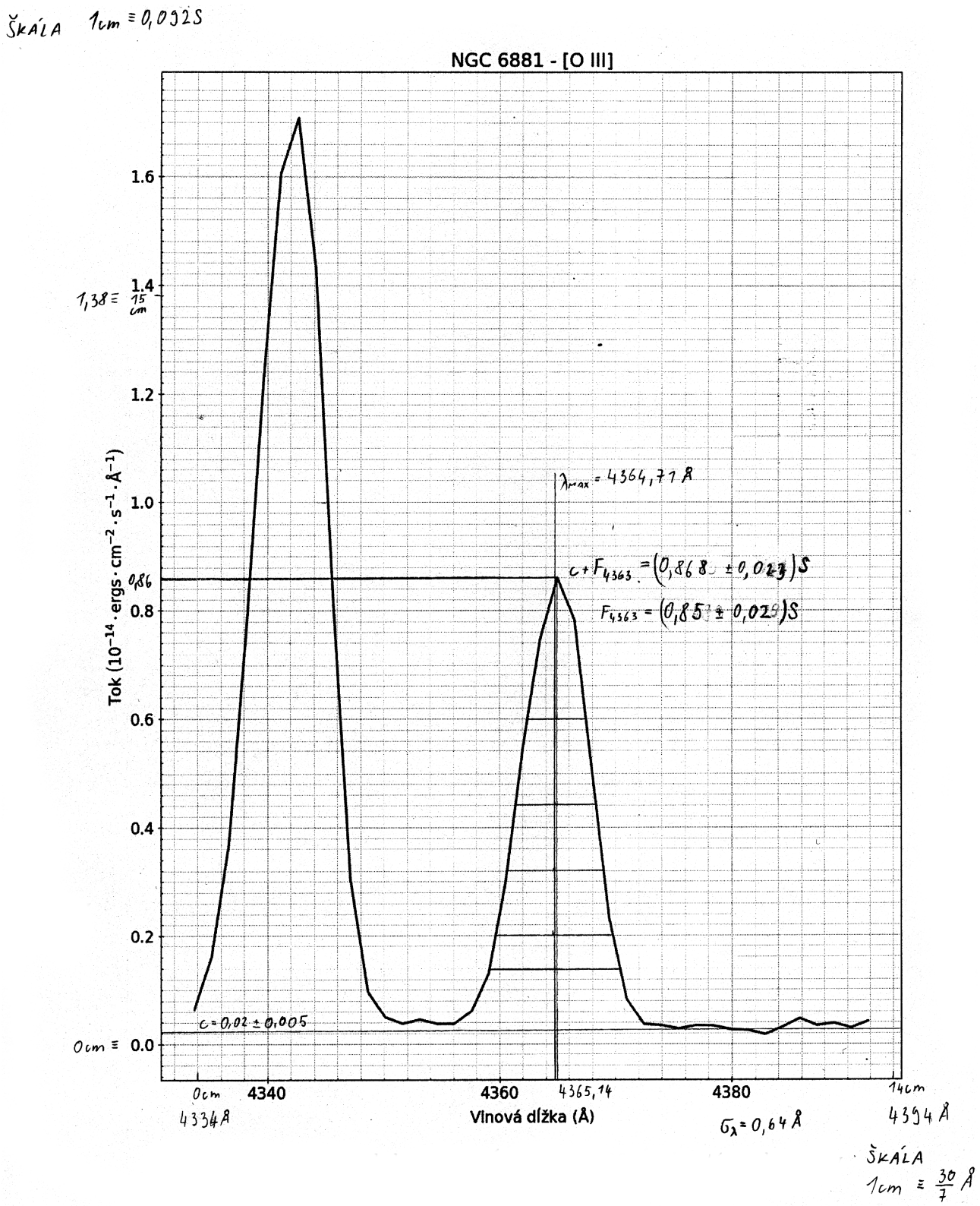
Obr. 3.1.9: Graf spektra okolo vlnových dĺžkok [Si II] 6716 Å a 6731 Å planetárnej hmloviny NGC 6881 doplnený o riešenie a poznámky.



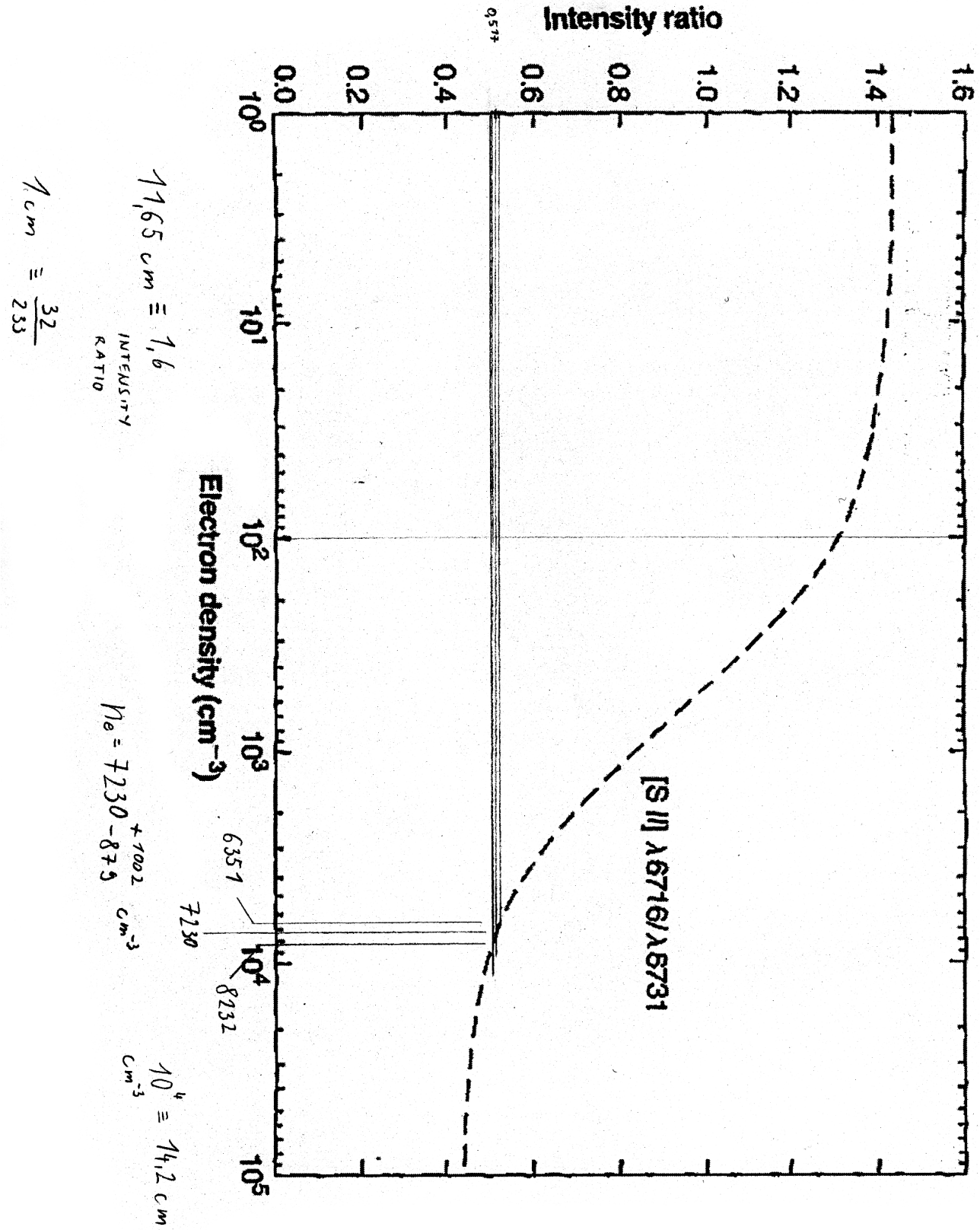
Obr. 3.1.10: Graf spektra okolo vlnovej dĺžky [O III] 4959 Å planetárnej hmloviny NGC 6881 doplnený o riešenie a poznámky.



Obr. 3.1.11: Graf spektra okolo vlnovej dĺžky [O III] 5007 Å planetárnej hmloviny NGC 6881 doplnený o riešenie a poznámky.



Obr. 3.1.12: Graf spektra okolo vlnovej dĺžky [O III] 4363 Å planetárnej hmloviny NGC 6881 doplnený o riešenie a poznámky.



Obr. 3.1.13: Graf závislosti intenzity P_{I} od elektrónovej hustoty doplnený o riešenie a poznámky.

Zoznam konštánt pre SŠ

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Gravitačná konštanta	G	$=$	$6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
elementárny elektrický náboj	e	$=$	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Planckova konštanta	h	$=$	$6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmannova konštanta	k_B	$=$	$1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	σ	$=$	$5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Wienova posunovacia konštanta	b	$=$	$2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
Hubblova konštanta	H_0	$=$	$70\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$

Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň	$=$	$24\,\mathrm{h}$
siderický deň	deň$^{(\mathrm{sid})}$	$=$	$23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}\ 4{,}1\,\mathrm{s}$
juliánsky rok	rok	$=$	$365{,}25$ dňa
siderický rok	rok$^{(\mathrm{sid})}$	$=$	$365{,}2564$ dňa
tropický rok	rok$^{(\mathrm{trop})}$	$=$	$365{,}2422$ dňa
anomalistický rok	rok$^{(\mathrm{anom})}$	$=$	$365{,}2596$ dňa
astronomická jednotka	au	$=$	$149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$
svetelný rok	ly	$=$	$63\,241$ au
parsek	pc	$=$	$3{,}262$ ly
Jansky	Jy	$=$	$10^{-26}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$

Ďalšie konštanty a veličiny

polomer galaxie Mliečna cesta	r_G	$=$	$50\,000$ ly
vzdialenosť Slnka od centra Mliečnej cesty	r_S	$=$	$27\,000$ ly

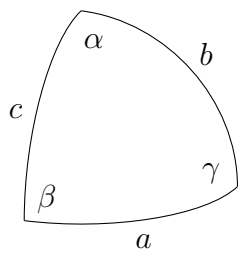
Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \cos a$$



Slnko

hmotnosť	$M_\odot$	=	$1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
polomer	$R_\odot$	=	$6{,}957 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_\odot$	=	$3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_\odot$	=	$5772\,\mathrm{K}$
Slnečná konštanta	$k_\odot$	=	$1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}$
zdanlivá magnitúda	$m_\odot$	=	$-26{,}73\,\mathrm{mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda	$m_{\odot\mathrm{bol}}$	=	$-26{,}83\,\mathrm{mag}$
absolútna magnitúda	$M_\odot$	=	$4{,}82\,\mathrm{mag}$
absolútna bolometrická magnitúda	$M_{\odot\mathrm{bol}}$	=	$4{,}72\,\mathrm{mag}$

Slnečná sústava

polomer Merkúru	R_M	=	$2440\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Merkúru	a_M	=	$0{,}387\,\mathrm{au}$
excentricita dráhy Merkúru	e_M	=	$0{,}206$
polomer Venuše	R_V	=	$6052\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Venuše	a_V	=	$0{,}723\,\mathrm{au}$
excentricita dráhy Venuše	e_V	=	$0{,}006\,77$
polomer Zeme	$R_\oplus$	=	$6378\,\mathrm{km}$
hmotnosť Zeme	$M_\oplus$	=	$5{,}9736 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
veľká polos dráhy Zeme	$a_\oplus$	=	$1\,\mathrm{au}$
excentricita dráhy Zeme	$e_\oplus$	=	$0{,}0167$
polomer Mesiaca	$R_☾$	=	$1737\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Mesiaca	$a_☾$	=	$3{,}844 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
siderická obežná doba Mesiaca	$P_{☾,\mathrm{si}}$	=	$27{,}3217\,\mathrm{dňa}$
synodická obežná doba Mesiaca	$P_{☾,\mathrm{sy}}$	=	$29{,}5306\,\mathrm{dňa}$
inklinácia orbity Mesiaca voči ekliptike	$i_☾$	=	$5{,}14°$
polomer Marsu	$R_♂$	=	$3393\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Marsu	$a_♂$	=	$1{,}524\,\mathrm{au}$
polomer Jupitera	R_Ju	=	$69\,911\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Jupitera	a_Ju	=	$5{,}204\,\mathrm{au}$
polomer Saturnu	R_S	=	$58\,232\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Saturnu	a_S	=	$9{,}583\,\mathrm{au}$
polomer Uránu	R_U	=	$25\,362\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Uránu	a_U	=	$19{,}191\,\mathrm{au}$
polomer Neptúna	R_N	=	$24\,764\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Neptúna	a_N	=	$30{,}07\,\mathrm{au}$
polomer Pluta	R_P	=	$2370\,\mathrm{km}$
veľká polos dráhy Pluta	a_P	=	$39{,}481\,\mathrm{au}$