Astronomická olympiáda 2024

Kolo: **regionálne kolo** Kategória: **základná škola**

Slovenská ústredná hvezdáreň v Hurbanove

Slovenská Astronomická Spoločnosť pri Slovenskej akadémii vied

Vzorové riešenia

Teoretické úlohy

Praktická časť

Teoretické úlohy

1.1. Hviezdokopa

(**80 b**, autor: Jana Švrčková)

Otvorená hviezdokopa sa skladá z 10 000 hviezd, každá z hviezd má magnitúdu 18. Vypočítajte celkovú magnitúdu hviezdokopy. Je možné ju pozorovať voľným okom?

Na riešenie nám stačí využiť fakt, že 100-násobný pomer jasností zodpovedá rozdielu 5 magnitúd. 100 hviezd 18. magnitúdy je 100-krát jasnejších ako jediná hviezda 18. magnitúdy. Týchto 100 hviezd bude mať dohromady 13. magnitúdu, lebo $18 - 5 = 13$. Celá hviezdokopa má až 10 000 hviezd, takže je ešte 100-krát jasnejšia ako 100 hviezd. Magnitúda hviezdokopy je preto $13 - 5 = 8$.

Úloha sa dá riešiť aj s využitím Pogsonovej rovnice

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) , \tag{1.1.1}$$

kde $m_2 = 18$ je magnitúda jednej hviezdy, m_2 je magnitúda celej hviezdokopy a $\frac{I_1}{I_2} = 10\,000$ je pomer jasností hviezdokopy a jedinej hviezdy. Po dosadení čísel nám opäť vyjde $m_1 = 8$.

1.2. Neapochromat

(**90 b**, autor: Samuel Amrich)

Predstavte si klasický šošovkový ďalekohľad Keplerovho typu, zložený z dvoch spojných šošoviek. Objektív je vyrobený z nekvalitného skla a tak má veľkú farebnú chybu. Čo znamená, že má rozdielne indexy lomu n pre rôzne vlnové dĺžky a teda rôzne farby svetla.

Červená: $n_{\text{red}} = 1{,}6\,.$
Modrá: $n_{\text{blue}} = 1{,}7\,.$

Pre červené svetlo bola zistená ohnisková vzdialenosť objektívu $f_{\text{red}} = 1{,}2\,\text{m}$. O koľko cm je potrebné posunúť okulár, aby bol obraz zaostrený pre modré svetlo?

Predpokladajte index lomu vzduchu $n_{\text{air}} = 1$ a že objektív je tenká šošovka, pre ktorej ohniskovú vzdialenosť platí nasledujúci vzťah (R_1 a R_2 sú polomery krivosti šošovky)

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{air}}} - 1\right) \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] . \tag{1.2.1}$$

Vzťah pre tenkú šošovku je

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\mathrm{air}}} - 1\right) \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]. \tag{1.2.2}$$

Kde f je ohnisková vzdialenosť, n_{air} je index lomu okolia (vzduchu), n je index lomu šošovky a R_1, R_2 sú polomery krivosti prvej a druhej strany šošovky.

V našom prípade máme stále tú istú geometriu šošovky, takže polomery krivosti sa nemenia a celú hranatú zátvorku môžeme zameniť za konštantu neznámu k.

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\mathrm{air}}} - 1\right) \cdot k. \tag{1.2.3}$$

Čo po prepísaní pre dvojicu vlnových dĺžok zo zadania, a po dosadení $n_{\mathrm{air}} = 1$, dostaneme

$$\frac{1}{f_{\mathrm{red}}} = (n_{\mathrm{red}} - 1) \cdot k, \tag{1.2.4}$$

$$\frac{1}{f_{\mathrm{blue}}} = (n_{\mathrm{blue}} - 1) \cdot k. \tag{1.2.5}$$

Vidíme, že poznáme všetko okrem k a f_{blue}, ktoré chceme zistiť. Keďže máme 2 rovnice, vieme sa k zbaviť. Využijeme pritom poznatok, že

$$x = ya = b \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}. \tag{1.2.6}$$

Potom ak to aplikujeme na rovnice (1.2.4) a (1.2.5), dostaneme výraz ktorý vyzerá najprv zložito ale následne sa jednoducho vyrieši.

$$\frac{\frac{1}{f_{\mathrm{red}}}}{\frac{1}{f_{\mathrm{blue}}}} = \frac{(n_{\mathrm{red}} - 1) \cdot k}{(n_{\mathrm{blue}} - 1) \cdot k}. \tag{1.2.7}$$

Kde vyriešime zložený zlomok naľavo ako $\frac{f_{\mathrm{blue}}}{f_{\mathrm{red}}}$ a k napravo vykrátime, potom

$$\frac{f_{\mathrm{blue}}}{f_{\mathrm{red}}} = \frac{(n_{\mathrm{red}} - 1)}{(n_{\mathrm{blue}} - 1)}. \tag{1.2.8}$$

Z čoho jednoducho zistíme riešenie

$$f_{\mathrm{blue}} = f_{\mathrm{red}} \cdot \frac{(n_{\mathrm{red}} - 1)}{(n_{\mathrm{blue}} - 1)} \approx 1{,}03\,\mathrm{m}. \tag{1.2.9}$$

A teda je potrebné posunúť okulár o $\triangle = f_{\mathrm{red}} - f_{\mathrm{blue}} \approx 0{,}17\,\mathrm{m}$ bližšie ku šošovke.

1.3. Objav asteroidu

(**140 b**, autor: Samuel Buranský)

Predstavte si, že ste objavili nový asteroid. Podarilo sa vám uskutočniť iba jedno pozorovanie, pri ktorom ste zaznamenali asteroid vychádzať na východe presne o polnoci pravého slnečného času. Zároveň sa vám podarilo zmerať jeho vzdialenosť od Zeme v tom čase, $s = 6{,}321\,\mathrm{au}$. Dodatočne ste zistili, že sa vtedy nachádzal v perihéliu. Pri výpočtoch považujte dráhu Zeme za kruhovú.

(a) Určte, či sa jedná o asteroid na vonkajšej alebo vnútornej orbite voči Zemi a presne nazvite aspekt, v ktorom sa nachádzal v čase pozorovania.

(b) Vypočítajte ako ďaleko od Slnka sa asteroid v čase pozorovania nachádzal.

Na úplné informácie o asteroide toto jedno pozorovanie nestačilo. Začali ste prehľadávať svoj pozorovateľský denník a zistili ste, že tento asteroid ste v rovnakej pozícií pozorovali pred časom $T = 1{,}046\,\mathrm{roka}$.

(c) Vypočítajte obežnú dobu asteroidu.

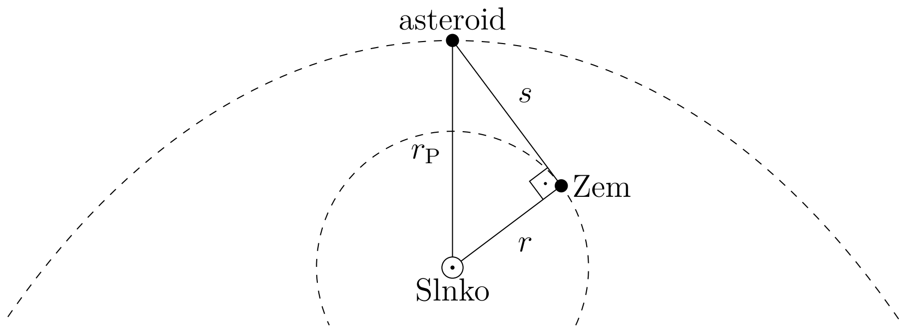
(d) Vypočítajte veľkú polos jeho dráhy.

(e) Zistite ako najďalej od Slnka sa môže dostať od Slnka a určite excentricitu jeho dráhy.

(a) Polnoc pravého slnečného času znamená v iných slovách dolnú kulmináciu Slnka. Východ (západ) objektu v čase kulminácie Slnka znamená, že smery k nim zvierajú pravý uhol. Z toho môžeme usúdiť, že objekt sa nachádza v kvadratúre a nakoľko sa nachádza od Slnka na západ, tak v **západnej kvadratúre**. V kvadratúre sa môže nachádzať iba **vonkajší asteroid**.

(b) Situácia je zobrazená na obrázku 1.3.1. Keďže sa asteroid nachádza v kvadratúre, môžeme využiť pravouhlý trojuholník, kde prepona je vzdialenosť asteroidu od Slnka (ktorú označíme r_P nakoľko sa nachádza v perihéliu). Odvesny sú vzdialenosť asteroidu od Zeme s a vzdialenosť Zeme od Slnka r. Tieto strany sú zviazané Pytagorovou vetou

$$r_\mathrm{P} = \sqrt{r^2 + s^2} = 6{,}400\,\mathrm{au}\,. \tag{1.3.1}$$



Obr. 1.3.1: Schéma dráh Zeme a asteroidu v západnej kvadratúre.

(c) Zadaná perióda T je obežná doba z pohľadu zo Zeme, teda synodická obežná doba. Táto je pre vonkajší asteroid so siderickou zviazaná vzťahom

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_\oplus} - \frac{1}{P}\,, \tag{1.3.2}$$

kde $P_\oplus$ a P sú siderické obežné periódy Zeme a asteroidu. Vyjadrením dostávame $P = 22{,}739$ roka.

(d) Veľkú polos asteroidu vypočítame z 3. Keplerovho zákona

$$a^3 = P^2\,, \tag{1.3.3}$$

kde veľká polos je v au a obežná perióda v rokoch. Po dosadení dostaneme

$$a = \sqrt[3]{P^2} \approx 8{,}026\,\mathrm{au}\,. \tag{1.3.4}$$

(e) Najďalej od Slnka je asteroid v aféliu, pre ktoré platí

$$2a = r_\mathrm{A} + r_\mathrm{P}\,, \tag{1.3.5}$$

odkiaľ $r_\mathrm{A} = 9{,}652\,\mathrm{au}$. Excentricita dráhy je daná vzťahom

$$e = \frac{a - r_\mathrm{P}}{a} \approx 0{,}203\,. \tag{1.3.6}$$

1.4. HST vs JWST

(**140 b**, autor: Samuel Amrich)

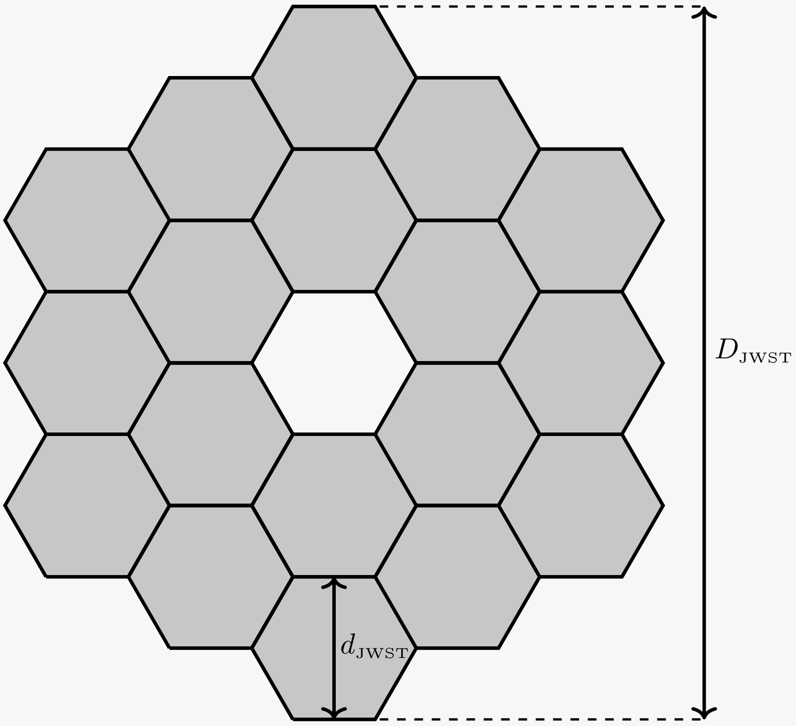
Na konci roka 2021 bol do vesmíru vypustený vesmírny ďalekohľad Jamesa Webba (JWST). Ten je v určitom zmysle nasledovník Hublovho vesmírneho ďalekohľadu (HST). Vašou úlohou je preskúmať o koľko je JWST lepší ako HST.

Hlavné zrkadlo je zložené JWST je zložený z 18-tich, 6-uholníkových zrkadiel usporiadaných podľa obrázku 1.4.1. Každé z malých zrkadiel má vzdialenosť protiľahlých hrán $d_\mathrm{JWST} = 1{,}32\,\mathrm{m}$. Pre účely počítania rozlišovacej schopnosti je možné považovať toto zložené zrkadlo za kruhové zrkadlo s priemerom rovným najväčšej vzdialenosti dvoch paralelných hrán D_JWST. JWST pozoruje vlnové dĺžky v rozmedzí $\lambda_\mathrm{JWST} = (600;\,28000)\mathrm{nm}$.

HST má jedno monolitické kruhové zrkadlo s priemerom $D_\mathrm{HST} = 2{,}4\,\mathrm{m}$, pričom pozoruje vlnové dĺžky $\lambda_\mathrm{HST} = (100;\,2500)\mathrm{nm}$.

(a) Vypočítajte a porovnajte maximálnu teoretickú rozlišovaciu schopnosť JWST a HST.

(b) Predpokladajte, že na oba ďalekohľady dopadá rovnaký tok fotónov (počet fotónov na meter štvorcový za sekundu) s najmenšou vlnovou dĺžkou, ktorú je daný ďalekohľad zachytiť. Ktorý z nich zachytí viac energie za sekundu?



Obr. 1.4.1: Znázornenie zloženého zrkadla JWST s popisom jednotlivých veľkostí.

Na výpočet budete potrebovať vedieť, že energia jedného fotónu s frekvenciou f je

$$E = hf\,, \tag{1.4.1}$$

kde h je Planckova konštanta.

Nultým krokom je vypočítať si aký je efektívny priemer JWST, teda vzdialenosť najvzdialenejších rovnobežných hrán. Podľa nákresu vidíme, že medzi medzi hranami celého JWST je päť šesťuholníkových plôch. Každá má $d_{\text{JWST}} = 1{,}32\,\text{m}$ a teda celkovo mám

$$D_{\text{JWST}} = 5 \cdot d_{\text{JWST}} = 6{,}6\,\text{m}\,. \tag{1.4.2}$$

Pre riešenie zadania si ako prvé pripomenieme, že rozlišovacia schopnosť φ je daná nasledujúcim vzorcom (ktorého odvodenie je trochu náročná úloha a tak je vhodné si vzorec pamätať)

$$\varphi = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,. \tag{1.4.3}$$

Kde λ je vlnová dĺžka svetla ktoré pozorujeme a D je priemer použitého ďalekohľadu.

Ďalšia dôležitá myšlienka je, že lepšia rozlišovacia schopnosť znamená menší uhol φ, ktorý vieme rozoznať. To znamená, že ak hľadáme maximálnu teoretickú rozlišovaciu schopnosť pre

JWST a HST, tak použijeme ich maximálny priemer ale minimálnu vlnovú dĺžku ($\lambda_{\text{HST; min}}$ a $\lambda_{\text{JWST; min}}$). Čo pre jednotlivé ďalekohľady predstavuje hodnoty

$$\varphi_{\text{HST}} = 1{,}22\frac{\lambda_{\text{HST; min}}}{D_{\text{HST}}} = 1{,}22\frac{100\,\text{nm}}{2{,}4\,\text{m}} = 5 \cdot 10^{-8}\,\text{rad}\,, \tag{1.4.4}$$

$$\varphi_{\text{JWST}} = 1{,}22\frac{\lambda_{\text{JWST; min}}}{D_{\text{JWST}}} = 1{,}22\frac{600\,\text{nm}}{6{,}6\,\text{m}} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}\,\text{rad}\,. \tag{1.4.5}$$

Takže jasne vidíme, že HST má menší uhol φ, pod ktorým dokáže rozoznať dva bodové zdroje svetla, teda má lepšiu teoretickú rozlišovaciu schopnosť.

Pre riešenie zadania (b) si musíme upraviť vzťah v zadaní z frekvencií na vlnové dĺžky. Predstavme si, že rýchlosť svetla c je vlastne rýchlosť za ktorú okolo nás prejde celá vlna $c = \lambda/T$. Takže vzdialenosť λ za dobu T ktorej trvá prejdenie vlny. Doba T ale priamo súvisí s frekvenciou vlny ako $f = 1/T$. Takže získavame vzťah

$$c = f\lambda\,. \tag{1.4.6}$$

Poznámka: K rovnakému záveru sa dá dôjsť aj rozmerovou analýzou (zamyslením sa nad jednotkami jednotlivých veličín). Rýchlosť svetla má jednotku $[c] = m \cdot s^{-1}$, vlnová dĺžka $[\lambda] = m$ a frekvencia má $[f] = s^{-1}$. Takže jediná možnosť ako ich spolu dať do jedného vzťahu je $c = \lambda f$.

Ak túto znalosť spojíme so vzťahom v zadaní, získame

$$E = \frac{hc}{\lambda}\,. \tag{1.4.7}$$

Ak na oba teleskopy dopadá rovnaký tok fotónov F, čo je počet fotónov na meter štvorcový za sekundu. Potom je zavhytený výkon, teda množstvo zachytenej energie za sekundu, rovný $P = F \cdot E \cdot S$. Kde $S = (1/4)\pi D^2$ je plocha príslušného ďalekohľadu. To predstavuje

$$P_{\text{HST}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{HST; min}}} \cdot F(1/4)\pi D^2_{\text{HST}}\,, \tag{1.4.8}$$

$$P_{\text{JWST}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{JWST; min}}} \cdot F(1/4)\pi D^2_{\text{JWST}}\,. \tag{1.4.9}$$

Prácu si vieme zjednodušiť ak hľadáme pomer $p = P_{\text{HST}}/P_{\text{JWST}}$.

$$p = \frac{P_{\text{HST}}}{P_{\text{JWST}}} = \frac{hc}{hc}\frac{\lambda_{\text{JWST; min}}}{\lambda_{\text{HST; min}}}\frac{F(1/4)\pi D^2_{\text{HST}}}{F(1/4)\pi D^2_{\text{JWST}}} = \frac{\lambda_{\text{JWST; min}} \cdot D^2_{\text{HST}}}{\lambda_{\text{HST; min}} \cdot D^2_{\text{JwST}}}\,. \tag{1.4.10}$$

Čo po dosadení konkrétnych hodnôt vráti

$$p = \frac{\lambda_{\text{JWST; min}} \cdot D^2_{\text{HST}}}{\lambda_{\text{HST; min}} \cdot D^2_{\text{JwST}}} \approx 0{,}8\,. \tag{1.4.11}$$

Keďže $p < 1$, tak to znamená, že viac energie za sekundu zachytí JWST.

Praktická časť

2.1. Mraky v slepej mape

(**150 b**, autor: Jana Švrčková)

Predstavte si, že v jednu jarnú noc vyjdete von s úmyslom pozorovať nočnú oblohu. Počasie ale nie je ideálne, po oblohe sa pohybujú riedke mraky, čo spôsobuje, že vidíte iba jasné hviezdy. Pohľad na celú oblohu je znázornený na priložených mapách, obr. 2.1.1 a obr. 2.1.2, kde vidno iba hviezdy do tretej magnitúdy.

(a) Číslami 1 - 10 sú na mape označené súhvezdia. Napíšte ich slovenské názvy a latinské skratky.

(b) Číslami 11 - 17 sú označené jasné hviezdy. Napíšte ich mená alebo Bayerove označenia (napr. Alfa Tau). Ak napíšete oboje, nedostanete žiadne body navyše.

(c) V mape sú zakreslené 3 významné kružnice, ktoré sú označené písmenami A, B a C. Napíšte ich názvy.

Poznámka: mapy sú rovnaké, jedna z nich je kvôli lepšej prehľadnosti bez čísel.

(a) Súhvezdia:

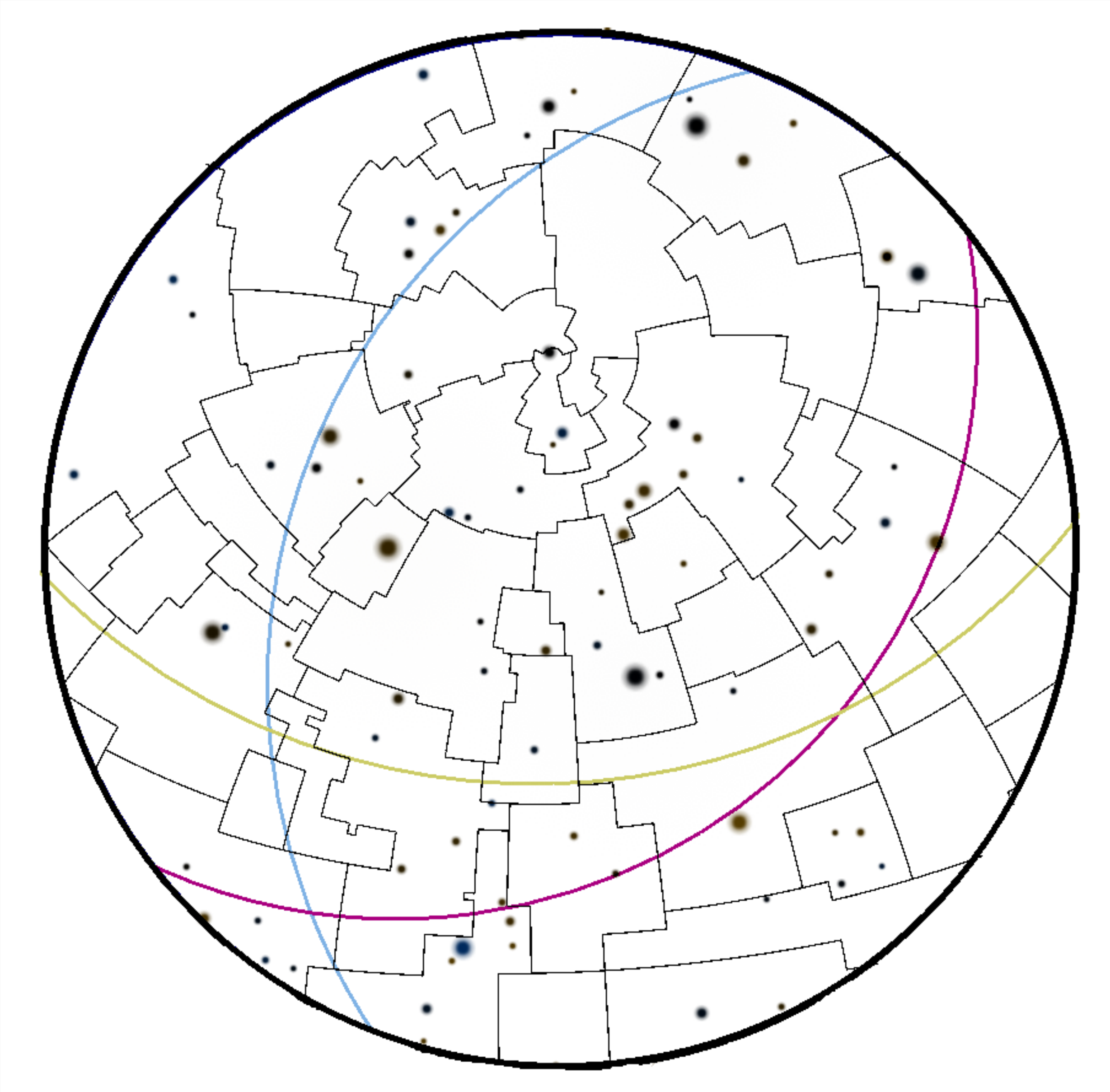
- 1 - Kasiopeja,
- 2 - Veľká medvedica,
- 3 - Panna,
- 4 - Labuť,
- 5 - Orol,
- 6 - Pastier,
- 7 - Povozník,
- 8 - Drak,
- 9 - Havran,
- 10 - Hadonos.

(b) Hviezdy:

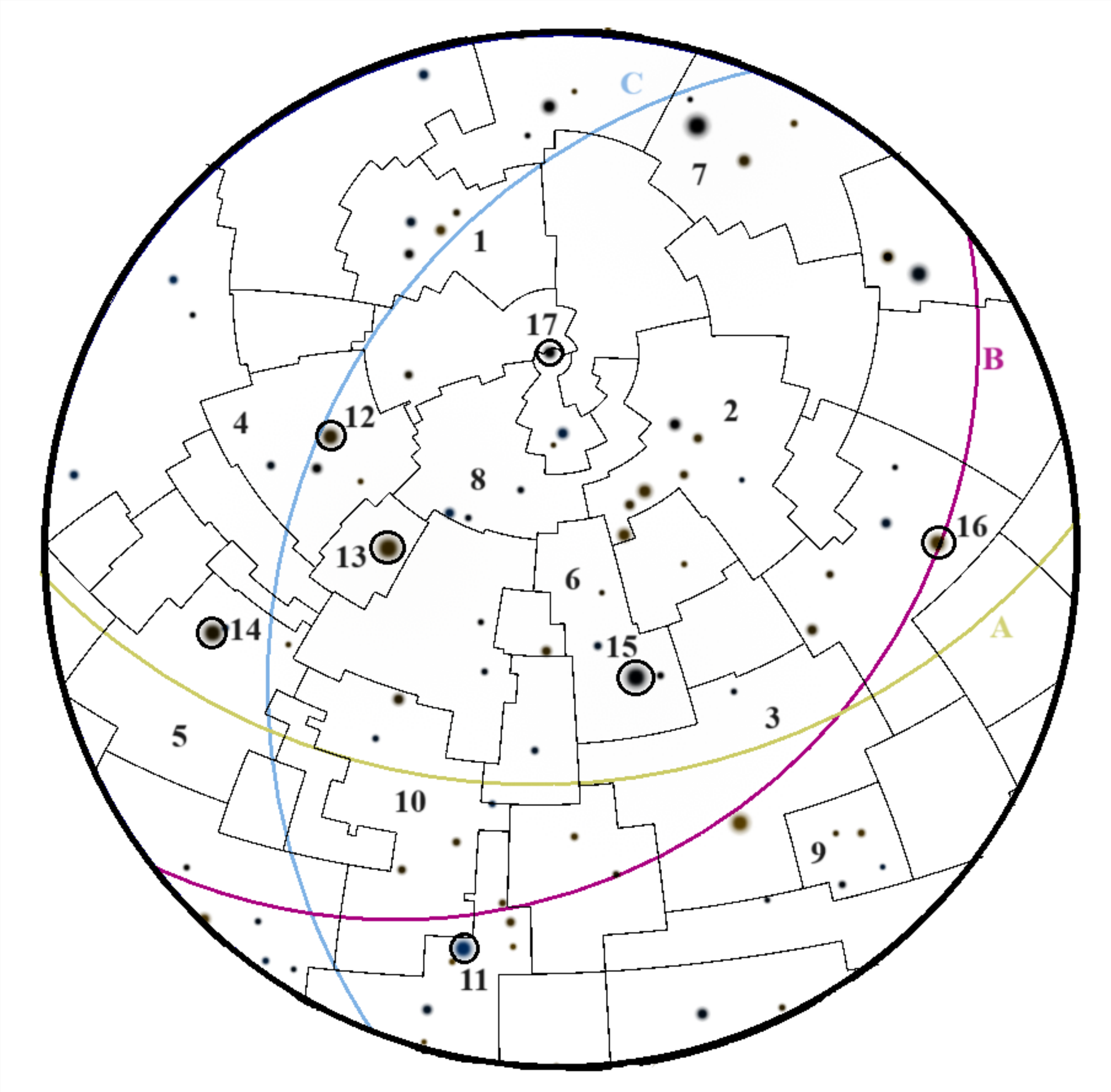
- 11 - Antares,
- 12 - Deneb,
- 13 - Vega,
- 14 - Altair,
- 15 - Arktúr
- 16 - Regulus,
- 17 - Polárka.

(c) Kružnice:

- A - nebeský rovník,
- B - ekliptika,
- C - galaktický rovník.



Obr. 2.1.1: Mapa bez čísel.



Obr. 2.1.2: Mapa s číslami.

Zoznam konštánt pre ZŠ

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Gravitačná konštanta	G	$=$	$6{,}674\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
elementárny elektrický náboj	e	$=$	$1{,}602\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$
Planckova konštanta	h	$=$	$6{,}626\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmannova konštanta	k_B	$=$	$1{,}381\cdot10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	σ	$=$	$5{,}670\cdot10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Wienova posunovacia konštanta	b	$=$	$2{,}898\cdot10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
Hubblova konštanta	H_0	$=$	$70\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$

Astronomické jednotky a veličiny

stredný slnečný deň	deň	$=$	$24\,\mathrm{h}$
siderický deň	$\text{deň}^{(\mathrm{sid})}$	$=$	$23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}\ 4{,}1\,\mathrm{s}$
juliánsky rok	rok	$=$	$365{,}25$ dní
astronomická jednotka	au	$=$	$149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$
svetelný rok	ly	$=$	$63\,241\,\mathrm{au}$
parsek	pc	$=$	$3{,}262\,\mathrm{ly}$
Jansky	Jy	$=$	$10^{-26}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$
hmotnosť Slnka	$M_\odot$	$=$	$1{,}989\cdot10^{30}\,\mathrm{kg}$
polomer Slnka	$R_\odot$	$=$	$6{,}957\cdot10^{8}\,\mathrm{m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_\odot$	$=$	$3{,}828\cdot10^{26}\,\mathrm{W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_\odot$	$=$	$5780\,\mathrm{K}$