Astronomická olympiáda 2024

Kolo: **regionálne kolo** Kategória: **stredná škola**

Slovenská ústredná hvezdáreň v Hurbanove

Slovenská Astronomická Spoločnosť pri Slovenskej akadémii vied

Vzorové riešenia

Teoretické úlohy

Dátová analýza

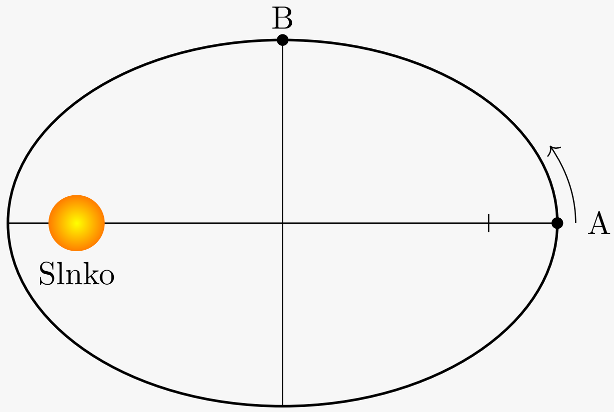
Praktická časť

Teoretické úlohy

1.1. Čas obehu planéty

(**50 b**, autor: Ondrej Juhás)

Planéta obieha okolo Slnka po eliptickej trajektórii proti smeru hodinových ručičiek ako je znázornené na obrázku.

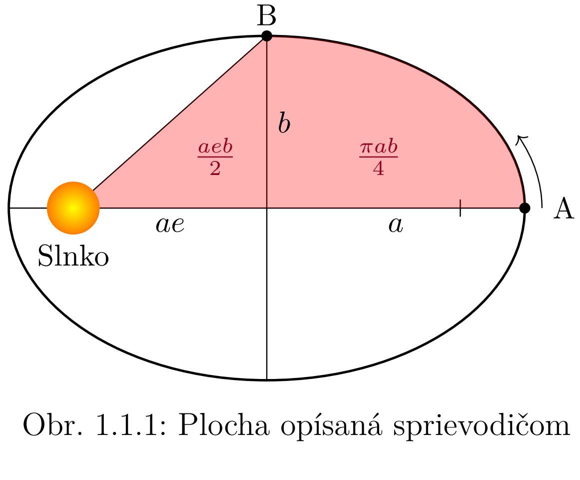


(a) Určte čas, za ktorý sa planéta dostane z bodu A do bodu B ako funkciu jej periódy obehu T a excentricity dráhy e.

(b) Určte najbližší dátum a približný čas od dnešného dňa, kedy sa Zem bude nachádzať na svojej trajektórii v bode, ktorý prislúcha bodu B na obrázku.

Pomôcka: Zem sa nachádzala v perihéliu 3. 1. 2024 o 0:39.

Kľúčovou myšlienkou v riešení je využiť 2. Keplerov zákon, ktorý hovorí: Sprievodič (spojnica Slnka a planéty) opíše za rovnaký čas rovnakú plochu. Dôsledkom tejto formulácie je, že pomer plôch opísaných sprievodičom je rovný pomeru časov, za ktoré dané plochy sprievodič opísal.



Obr. 1.1.1: Plocha opísaná sprievodičom

(a) Ako bolo spomenuté vyššie, pre zistenie času, za ktorý planéta prejde nejaký čas t, potrebujeme zistiť plochu S, ktorú sprievodič vytne za tento čas a porovnať ho s iným časom, respektíve plochou. Ako vidíme na obrázku 1.1.1, plochu S určíme ako súčet štvrtiny obsahu elipsy (pre obsah elipsy platí $S_{\text{elipsa}} = \pi ab$) a obsahu trojuholníka tvoreného ohniskom, v ktorom sa nachádza Slnko, bodom B a stredom elipsy. Obsah tohto trojuholníka vieme spočítať klasicky, keďže poznáme dĺžky dvoch strán na seba kolmých, ako na obrázku 1.1.1.

Túto plochu potrebujeme porovnať s nejakou inou plochou a zrejme najvýhodnejšie je to urobiť pre celú elipsu, pretože vieme, že sprievodič opíše obsah celej elipsy za celú periódu planéty T. Teda tieto plochy a časy môžeme dať do pomeru

$$\frac{t}{T} = \frac{S}{S_{elipsa}} = \frac{\frac{\pi ab}{4} + \frac{abe}{2}}{\pi ab}\,. \tag{1.1.1}$$

Odtiaľ už nie je ťažké vyjadriť čas t a po zjednodušení dostávame

$$t = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right)\,. \tag{1.1.2}$$

(b) Vzťah ktorý sme získali v (a) teraz využijeme na výpočet požadovaného času, ktorý uplynie od okamihu keď je Zem v periháliu po moment keď prejde bodom B. Nemôžeme však zabudnúť na to, že musíme k rovnici (1.1.2) ešte pripočítať člen $\frac{T}{2}$, čo je čas, ktorý je potrebný na to, aby sa Zem dostala z miesta jej perihélia do bodu A. Výsledná rovnica pre tento čas bude teda po úprave vyzerať nasledovne:

$$\tau = \frac{T}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{e}{\pi}\right)\,. \tag{1.1.3}$$

Po dosadení hodnoty pre dĺžku anomalistického roka (časový úsek medzi dvoma okamihmi, keď je Zem v perihéliu) za T a hodnoty excentricity e z tabuľky konštánt, dostávame hodnotu $\tau = 274{,}916\,\text{dňa} = 274\,\text{dní}\ 21\,\text{h}\ 59\,\text{min}$. Teraz nám už len stačí pripočítať čas τ k dátumu a času perihélia. Uvažujeme aj fakt, že rok 2024 je prestupný a teda február má 29 dní a dostávame výsledný dátum 3.10.2024 a približný čas 22:38 (časy v rozmedzí 22:10 - 23:00 budú uznané). Riešenie kde sa nezoberie do úvahy prestupný rok, ale so správnym postupom bude hodnotené ako správne, avšak nie plným počtom bodov.

Poznámka

Pri uvažovaní zjednodušenia, že Zem obieha okolo Slnka po kružnici dostaneme dátum 2.10.2024 a čas približne 23:20, čo je vo výsledku rozdiel takmer jedného dňa, preto toto riešenie nie je vzhľadom na veľké zjednodušenie správne a budú zaň udelené len čiastkové body.

1.2. HR diagram

(**70 b**, autor: Jana Švrčková)

Na obrázku 1.2.1 sa nachádza Hertzsprungov-Russellov diagram, v ktorom sú červenými bodmi vyznačené tri hviezdy. V celej tomto príklade môžete predpokladať, že hviezdy sú sféricky symetrické a žiaria ako absolútne čierne teleso. Vašou úlohou je odhadnúť nasledujúce:

(a) svietivosť a teplotu hviezdy označenej číslom 1,

(b) polomer hviezdy označenej číslom 2,

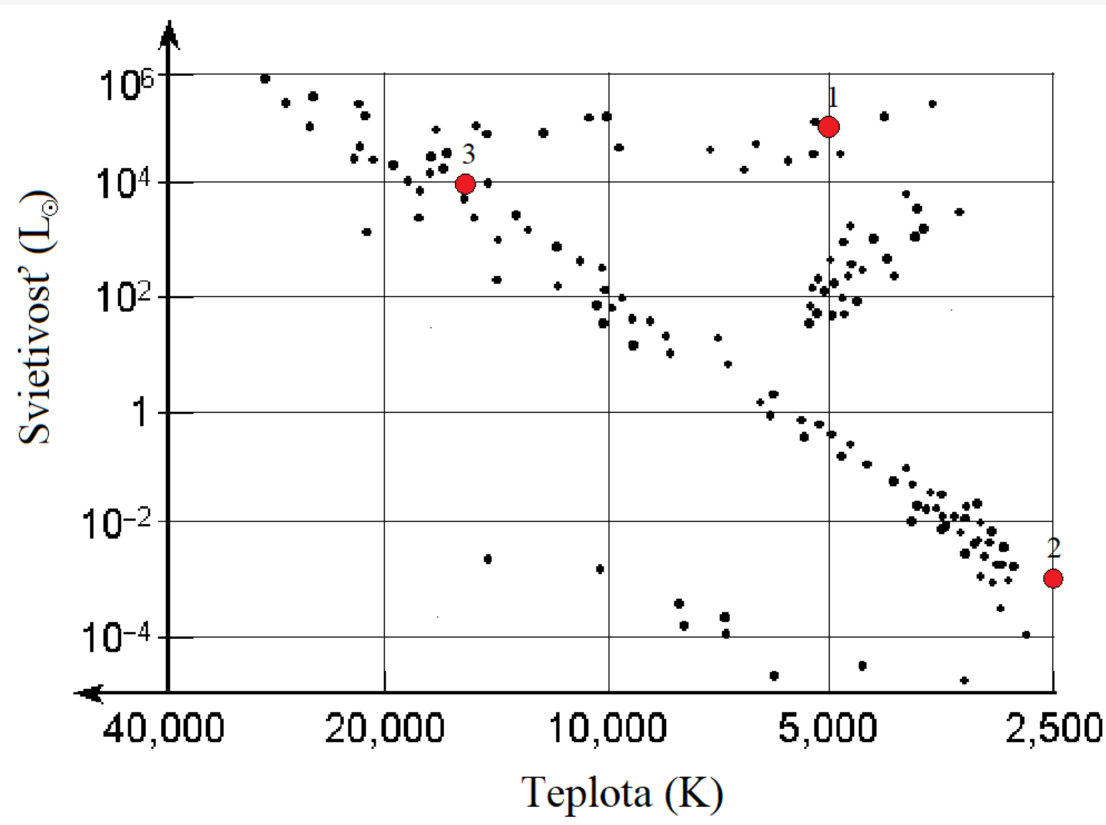
(c) hmotnosť hviezdy označenej číslom 3, za predpokladu, že pre hviezdy na hlavnej postupnosti platí približná závislosť $L \sim M^{3,5}$.

Do diagramu následne vyznačte pozíciu, kde sa nachádza:

(d) Slnko a označte ho číslom 4,

(e) biely trpaslík s teplotou $T = 10\,000\,\mathrm{K}$ a označte ho číslom 5,

(f) hviezda hlavnej postupnosti s polomerom 10-krát väčším ako je polomer Slnka a označte ju číslom 6.



Obr. 1.2.1: Hertzsprungov-Russellov diagram.

(a) Svietivosť hviezdy 1 je $L_1 = 10^5\,L_\odot$, jej teplota je $T_1 = 5000\,\mathrm{K}$.

(b) Polomer dopočítame zo Stefanovho-Boltzmannovho zákona

$$R_2 = \sqrt{\frac{L_2}{4\pi\sigma T_2^4}}\,. \tag{1.2.1}$$

Svietivosť a teplota hviezdy 2 sú: $L_2 = 10^{-3}\,L_\odot$ a $T_2 = 2500\,\mathrm{K}$.
Dostaneme hodnotu $R_2 = 0{,}17\,R_\odot$.

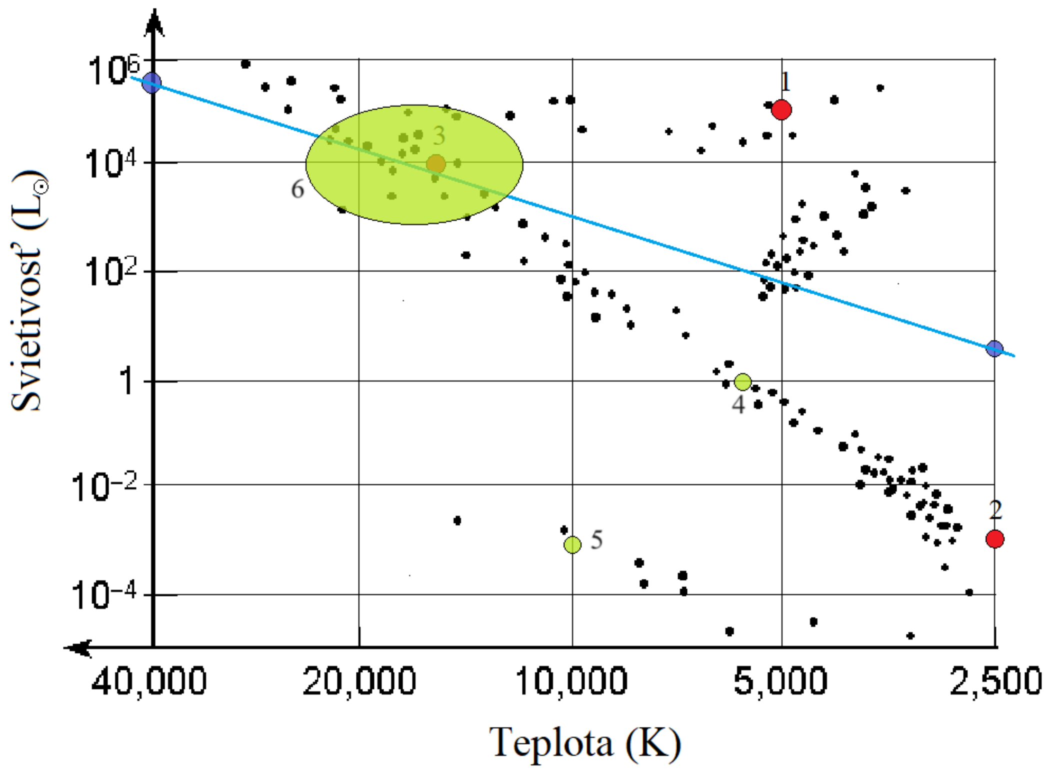
(c) Svietivosť tretej hviezdy je $L_3 = 10^4\,L_\odot$. Zo zadania poznáme úmernosť medzi svietivosťou a hmotnosťou hviezdy hlavnej postupnosti, medzi ktoré patrí aj Slnko. Preto si môžeme spomínanú úmernosť prepísať do nasledujúceho tvaru

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3{,}5}, \tag{1.2.2}$$

$$M = \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{3{,}5}} M_\odot\,. \tag{1.2.3}$$

Z toho už dostaneme hmotnosť hviezdy $M = 13{,}9\,M_\odot$.

(d) Poloha Slnka je nakreslená na obrázku 1.2.2 a označená číslom 4.



Obr. 1.2.2: Riešenie - HR diagram.

(e) Vieme, že biele trpaslíky sa nachádzajú pod hlavnou postupnosťou, zhruba v oblasti označenej číslom 5.

(f) Na HR diagrame sa hviezdy s rovnakým polomerom nachádzajú na priamke, ktorej rovnicu získame zlogaritmovaním Stefanovho-Boltzmannovho zákona. Ideálne je vydeliť ho Stefanovým-Boltzmannovým zákonom pre Slnko, aby v argumente logaritmov boli bezrozmerné veličiny.

$$\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = \log\left(\frac{4\pi R^2\sigma T^4}{4\pi R_\odot^2\sigma T_\odot^4}\right) , \tag{1.2.4}$$

$$\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = 2\log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) + 4\log\left(\frac{T}{T_\odot}\right) . \tag{1.2.5}$$

Stačí, aby sme dopočítali hodnoty $\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)$ pre $R = 10\,R_\odot$ a dve hodnoty teploty. Tieto dva body potom zakreslíme do grafu, spojíme priamkou. Všetky hviezdy, ktoré sa nachádzajú na tejto priamke majú polomer $R = 10\,R_\odot$. Napríklad

$$\text{pre } T = 2500\,\mathrm{K} \text{ máme } \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = 0{,}54$$

$$\text{a pre } T = 40\,000\,\mathrm{K} \text{ dostávame } \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = 5{,}35$$

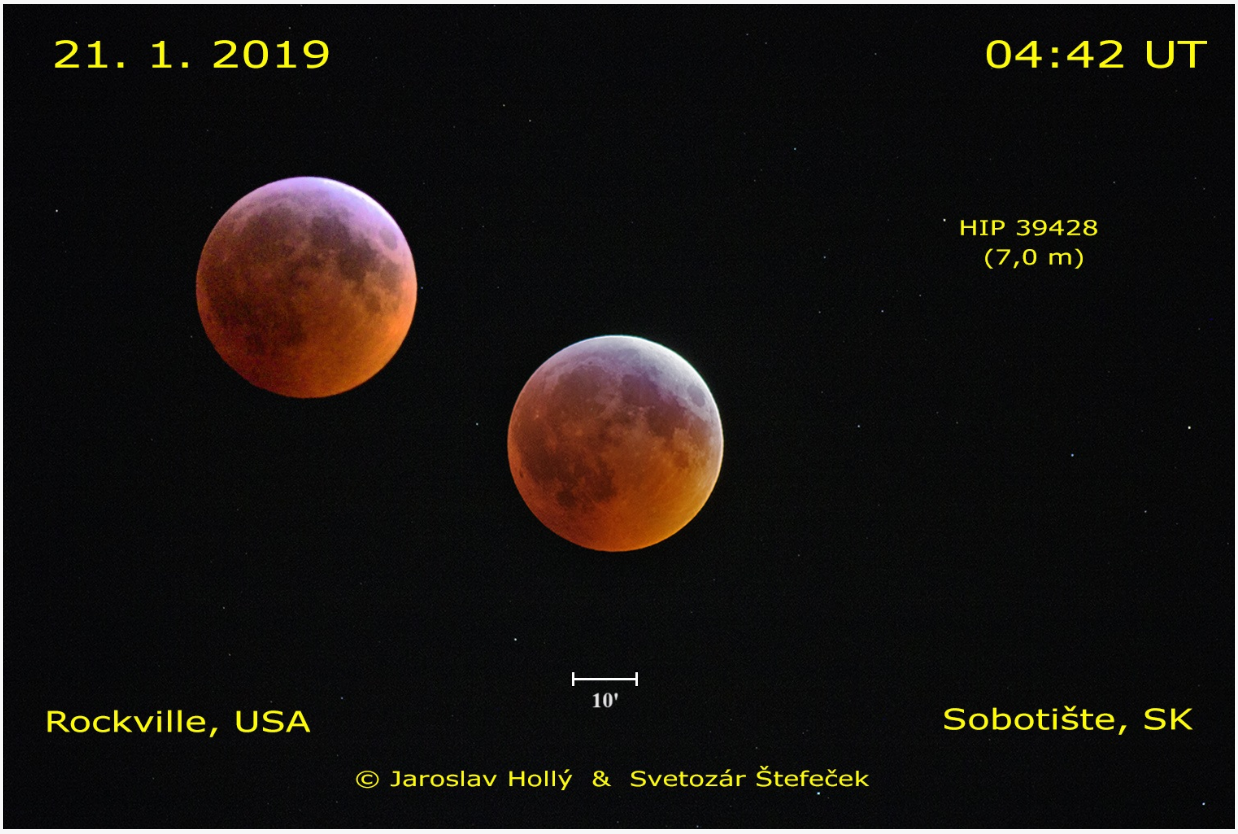
Tieto dva body sú na obrázku vyznačené modrou farbou a spojené modrou priamkou. V oblasti, kde priamka pretína hlavnú postupnosť sa nachádza šiesta hviezda.

1.3. Paralaxa Mesiaca

(**80 b**, autor: Jana Švrčková)

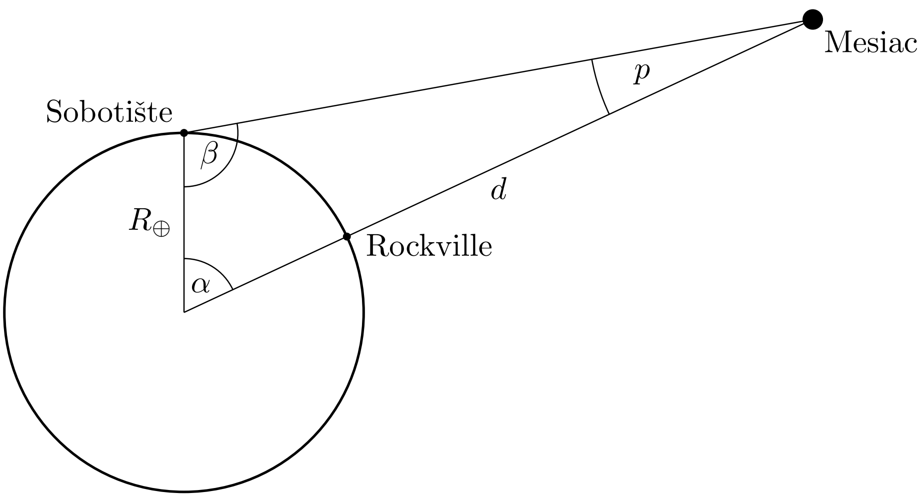
21. 1. 2019 nastalo úplné zatmenie Mesiaca, ktoré pozorovali a fotili aj dvaja astronómovia zo Sobotišťa. Jeden z nich sa nachádzal na Slovensku v Sobotišti (48°44′ N, 17°24′ E), druhý v USA v Rockville (39°5′ N, 77°9′ W). Pri spracovaní fotiek zistili, že zhodou okolností odfotili maximálnu fázu zatmenia takmer naraz.

Fotky poskladali do jednej, a to na základe pozícií hviezd v okolí Mesiaca. Tým pekne ukázali efekt paralaxy na pozorovanú polohu Mesiaca voči hviezdam. Využite výslednú koláž na obr. 1.3.1 a odhadnite vzdialenosť Mesiaca od stredu Zeme v deň zatmenia. Predpokladajte, že v Rockville bol Mesiac počas maximálnej fázy zatmenia presne v zenite. Pri výpočte môžete využiť uhlovú mierku na obrázku, polomer Zeme a súradnice miest, kde sa astronómovia nachádzali.



Obr. 1.3.1: Fotografia zatmenia Mesiaca.

Pretože v Rockville bol Mesiac presne v zenite, priamka spájajúca stred Zeme so stredom Mesiaca prechádza aj cez Rockville. Stred Zeme, Sobotište a stred Mesiaca potom tvoria trojuholník nakreslený na obrázku 1.3.2.

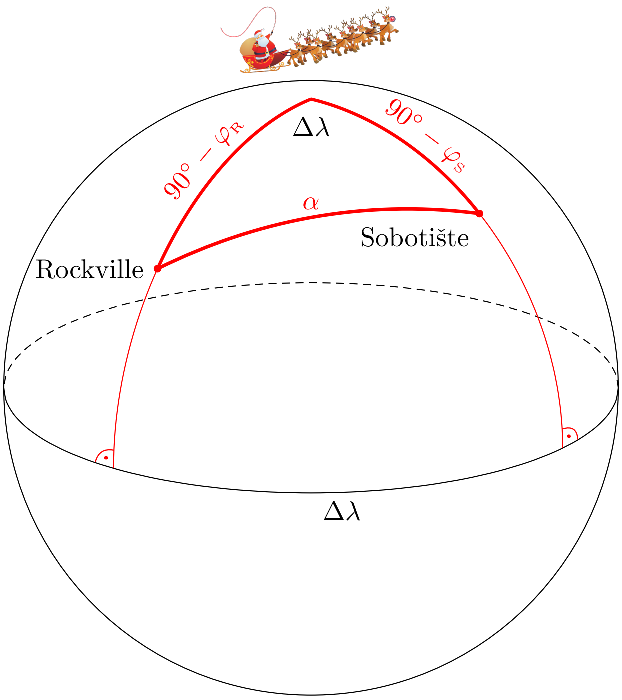


Obr. 1.3.2: Paralaxa Mesiaca.

Na obrázku je hľadaná vzdialenosť označená d, paralaxa Mesiaca je p, a uhlová vzdialenosť Sobotišťa a Rockvillu pri pohľade zo stredu Zeme je α. Uhol α dokážeme vypočítať z kosínusovej vety pre sférický trojuholník

$$\cos\alpha = \sin\varphi_{\mathrm{S}}\sin\varphi_{\mathrm{R}} + \cos\varphi_{\mathrm{S}}\cos\varphi_{\mathrm{R}}\cos(\lambda_{\mathrm{S}} - \lambda_{\mathrm{R}})\,. \tag{1.3.1}$$

kde φ_{S} a φ_{R} je zemepisná šírka Sobotišťa a Rockvillu a λ_{S} a λ_{R} sú ich zemepisné dĺžky. Pri dosadení za zemepisné dĺžky je potrebné si uvedomiť, že Sobotište je na východnej pologuli, zatiaľ čo Rockville je na západnej pologuli, preto sa číselné hodnoty zemepisných dĺžok budú sčítať a nie odčítať.



Obr. 1.3.3: Sférický trojuholník pre výpočet uhlovej vzdialenosti medzi Sobotišťom a Rockvillom.

Po dosadení súradníc Sobotišťa a Rockvillu dostaneme $\alpha \approx 64°19'31''$.

Paralaxu Mesiaca vieme zmerať z fotky zatmenia. Využijeme pri tom uhlovú mierku. Pri meraní si môžeme všimnúť, že mesačné disky nie sú rovnako veľké, to nám môže zhoršiť presnosť merania. Ak chceme merať čo najpresnejšie, mali by sme nájsť stredy oboch diskov a odmerať ich vzdialenosť. Tú potom pomocou uhlovej mierky prepočítame na paralaxu $p \approx 55'20''$.

Už poznáme dva z troch uhlov v trojuholníku na obr. 1.3.2. Dopočítame ešte uhol β

$$\beta = 180° - \alpha - p \approx 114°45'9''\,. \tag{1.3.2}$$

Vzdialenosť d nakoniec jednoducho vypočítame zo sínusovej vety pre rovinný trojuholník

$$\frac{d}{\sin\beta} = \frac{R_\oplus}{\sin p} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sin\beta}{\sin p}R_\oplus \approx 359\,900\,\mathrm{km}\,. \tag{1.3.3}$$

1.4. Liptovská Mara II

(**100 b**, autor: Samuel Buranský)

Počas roka dochádza na Zemi k striedaniu ročných období. Dôvodom je naklonenie roviny zemského rovníka o uhol $\varepsilon = 23{,}4°$ voči rovine ekliptiky. Zem zároveň obieha okolo Slnka na eliptickej dráhe, to znamená, že raz je k Slnku bližšie, inokedy ďalej. To spôsobuje, že na dané miesto na Zemi dopadá v rôzne dni rôzne množstvo žiarivej energie zo Slnka. Vypočítajte pomer žiarivých energií zo Slnka, ktoré dopadnú na celú plochu Liptovskej Mary za 1 s na pravé poludnie v deň letného (20. 6. 2024) a zimného slnovratu (21. 12. 2024). Poloha Liptovskej Mary je 49,1° N, 19,5° E a plocha $A = 27\,\mathrm{km}^2$.

Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe. Prechod perihéliom tento rok nastáva 3. 1. 2024 a prechod aféliom 5. 7. 2024. Pre prípadné medzivýpočty môžete využiť slnečnú konštantu, ktorej hodnota je uvedená v zozname konštánt. Slnečná konštanta predstavuje množstvo energie, ktoré prejde za 1 s plochou 1 m^2 orientovanou kolmo na slnečné lúče vo vzdialenosti 1 au od Slnka bez extinkcie (absorpcie). Pri výpočte zanedbajte vplyv atmosféry. V dni slnovratov považujte deklináciu Slnka za konštantnú.

Vzdialenosť Zeme od Slnka môžete vypočítať podľa vzťahu

$$r = a(1 - e\cos E)\,, \tag{1.4.1}$$

kde a je veľká polos dráhy, e je excentricita a E je excentrická anomália, pre ktorú platí Keplerova rovnica

$$M = E - e\sin E\,, \tag{1.4.2}$$

kde M je stredná anomália definovaná vzťahom

$$M = n(t - T)\,, \tag{1.4.3}$$

kde $n = 360°/P$ je stredný denný pohyb v stupňoch za deň, P je perióda obehu, t je aktuálny čas a T je čas prechodu perihéliom. Na výpočet excentrickej anomálie je nutné použiť iteračnú metódu, kde ako prvý odhad pre E použite M.

Pre pomer slnečných energií využijeme upravenú rovnicu z domáceho kola

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{LS}}}{\mathcal{E}_{\mathrm{ZS}}} = \frac{At\sin\left(90° - \varphi + \delta_{\odot(LS)}\right)}{At\sin\left(90° - \varphi + \delta_{\odot(ZS)}\right)} \cdot \frac{\dfrac{L_\odot}{4\pi r_{LS}^2}}{\dfrac{L_\odot}{4\pi r_{ZS}^2}}\,, \tag{1.4.4}$$

kde člen $\frac{L_\odot}{4\pi r^2}$ vyjadruje energiu dopadajúcu na jednotku povrchu gule s polomerom r, ktorá sa líši v závislosti na vzdialenosti. Pre slnovraty platí $\delta_{\odot(LS)} = \varepsilon$ a $\delta_{\odot(ZS)} = -\varepsilon$. Po zjednodušení z výrazu dostaneme

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{LS}}}{\mathcal{E}_{\mathrm{ZS}}} = \frac{\sin\left(90° - \varphi + \varepsilon\right)}{\sin\left(90° - \varphi - \varepsilon\right)}\frac{r_{ZS}^2}{r_{LS}^2}\,. \tag{1.4.5}$$

Vzdialenosť Zeme od Slnka spočítame pomocou vzťahov pre anomálie. Začneme výpočtom $t - T = \Delta t$, čiže časového rozdielu od prechodu perihéliom.

$$\Delta t(LS) = 169\,\text{dní}\,, \tag{1.4.6}$$

$$\Delta t(ZS) = 353\,\text{dní}\,. \tag{1.4.7}$$

Ďalej vypočítame stredný denný pohyb, kde použijeme ako periódu P anomalistický rok (čas medzi dvoma po sebe idúcimi prechodmi Zeme perihéliom)

$$n = \frac{360°}{365{,}2596\,\text{dní}} = 0{,}985\,600\,4\,°/\text{deň} = 0{,}017\,201\,971\,71\,\text{rad}/\text{deň}\,. \tag{1.4.8}$$

Pre stredné anomálie teda platí

$$M_{LS} = 166{,}566\,464° = 2{,}907\,133\,22\,\text{rad}\,, \tag{1.4.9}$$

$$M_{ZS} = 347{,}916\,933\,6° = 6{,}072\,296\,015\,\text{rad}\,. \tag{1.4.10}$$

Na výpočet excentrickej anomálie použijeme iteračnú metódu kde si Keplerovu rovnicu (do ktorej musíme dosádzať radiány) upravíme do tvaru

$$E = M + e \sin E \tag{1.4.11}$$

a iterovať budeme podľa predpisu

$$E_n = M + e \sin E_{n-1}\,, \tag{1.4.12}$$

kde zvolíme $E_0 = M$. Po pár iteráciách dostaneme

$$E_{LS} = 2{,}910\,950\,879\,\text{rad} = 166{,}785\,199\,7°\,, \tag{1.4.13}$$

$$E_{ZS} = 6{,}068\,742\,199\,\text{rad} = 347{,}713\,315°\,. \tag{1.4.14}$$

Môžme prejsť k záverečnému výpočtu pomeru, kedy do rovnice (1.4.5) dosadíme za vzdialenosti výrazy z pomocnej rovnice a pokrátime veľkú polos a dosadíme číselné hodnoty

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{LS}}}{\mathcal{E}_{\text{ZS}}} = \frac{\sin\left(90° - \varphi + \varepsilon\right)}{\sin\left(90° - \varphi - \varepsilon\right)} \frac{(1 - e\cos E_{ZS})^2}{(1 - e\cos E_{LS})^2} = 2{,}807\,525\,469 \doteq 2{,}81\,. \tag{1.4.15}$$

Dátová analýza

2.1. Expedícia Jupiter

(**100 b**, autor: Lukáš Hudák)

V sci-fi románe Hidden Empire, prvej knihe zo série Saga of Seven Suns od Kevin J. Andersona, je opísaná scéna, kde je muž na veľkej kozmickej lodi v atmosfére plynného obra. Zatiaľ čo plavidlo zbiera vodík, muž ide na vyhliadkovú plošinu. V tomto bode je kozmická loď napadnutá záhadným plavidlom a je zničená. Muž je odhodený a spadne do plynného obra.

V roku 2017 sa M.J. Pitts, R. Howe, R. Javaid, F.R.J. Scanlan rozhodli skúmať príčinu smrti pri páde do atmosféry plynného obra, ako sa to stalo v tomto románe. V simulácii uvažovali, že plynný obor je Jupiter, plavidlo je vo výške, kde sa tlak vzduchu rovná zemskému atmosférickému tlaku, a muž má na sebe masku poskytujúcu kyslík. Možné príčiny smrti sú: veľký chlad, rýchlo meniaci sa alebo obrovský tlak a vysoká teplota. K tomuto problému pristúpili výpočtom, v ktorom sledovali ako sa mení tlak a teplota každú sekundu počas pádu. Pomocou počítačového modelu terminálnej rýchlosti v atmosfére Jupitera určili, že človek začne umierať z dôvodu extrémneho tepla po 11 minútach.

Píše sa rok 2222 a vy ste sa rozhodli tento predpoklad otestovať experimentálne. Dostali ste sa kozmickou loďou na rovnaké začiatočné podmienky, aké sú popísané v modeli, a zhodili ste testovaciu figurínu. Merali ste teplotu a tlak, a overili ste, že padajúci človek naozaj zomrie vplyvom extrémnej teploty oveľa skôr. Po prehliadnutí svojich nameraných hodnôt, ste si však uvedomili, že vaše namerané hodnoty sú iné ako vyšli zo simulácie, pretože ste si na meranie času doniesli kyvadlové hodiny zo Slovenska. Tie sa budú vplyvom síl na Jupiteri chovať inak.

Úlohy

(a) Podľa tabuľky 2.1.1 narysujte graf závislosti teploty na čase. Nájdite lineárnu funkciu, ktorá najlepšie vyhovuje meraným hodnotám.

(b) Ste nad severným pólom Jupitera vo vzdialenosti $R_{\mathrm{Ju}} = 6{,}69 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$ od jeho stredu. Tiažové zrýchlenie na Slovensku je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Vypočítajte korekciu lineárnej funkcie času pre namerané hodnoty a do grafu dokreslite jej opravenú (skutočnú) verziu.

(c) Vypočítajte korekciu času, ak by ste boli nad rovníkom, vo vzdialenosti od stredu Jupitera $R_{\mathrm{Ju2}} = 7{,}15 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$. Nemusíte prepočítavať body, funkciu, ani nič vykresľovať do grafu. Stačí určiť čas, za ktorý človek umrie pri teplote 400 K.

Vaše namerané dáta

Index #	čas (s)	teplota (K)	tlak (bar)
1	0	165,2	1
2	44	168,9	1,4
3	439	271,6	7,9
4	640	284,1	9,3
5	759	337,2	13
6	891	349,3	14,4
7	981	363,9	14,8
8	1022	365,1	15,3
9	1059	380,7	16,6
10	1089	381,7	16,7

Tabuľka 2.1.1: Tabuľka meraní závislosti teploty a tlaku na čase.

Pomôcka

Vzťah pre periódu kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{2.1.1}$$

kde l je dĺžka vlákna a g je tiažové zrýchlenie.

(a) Na milimetrový papier si vynesieme graf závislosti teploty na čase, pričom dodržujeme základné pravidlá dátovky. Napríklad vhodne zvolená stupnica, správne označené osi, využitie väčšiny plochy milimetrového papiera, dobre zastruhaná ceruzka atď. Takýto graf môže vyzerať podobne ako na obrázku 2.1.1.

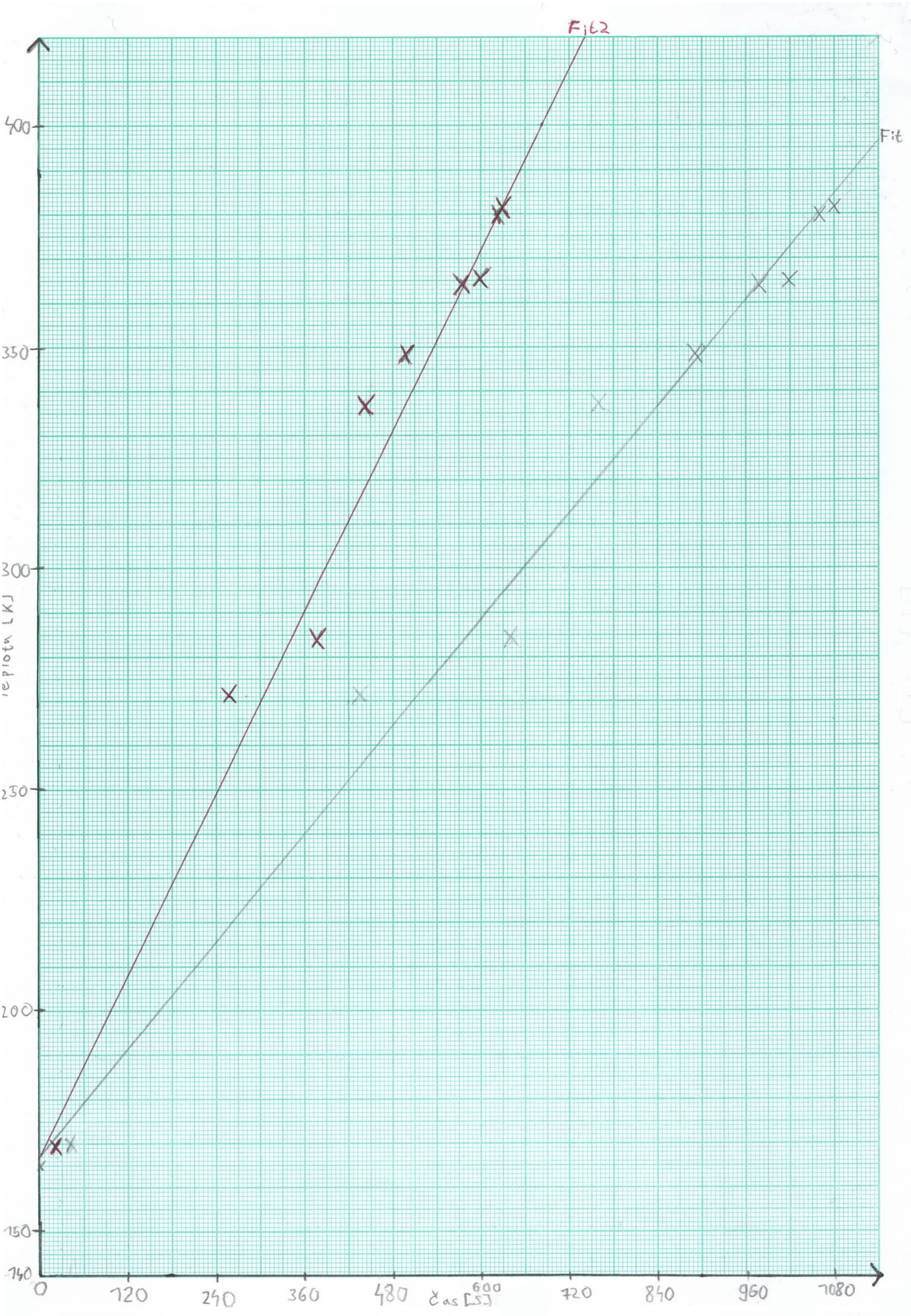
Hľadanú funkciu si označíme

$$T(t) = A(t) + B\,. \tag{2.1.2}$$

Koeficienty A a B hľadáme lineárnou regresiou. Na kalkulačke prejdeme do módu štatistika. Do tabuľky v kalkulačke zadáme hodnoty času ako hodnoty x a hodnoty teploty ako y. Kalkulačka nám vráti hodnoty fitu. Video návod na tento postup môžte nájsť na `https://youtu.be/8tnc1niiTe4?t=2510`. Dostali sme nasledovné hodnoty.

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 0{,}201\,\mathrm{K} \\ B &= 167{,}7\,\mathrm{K} \end{aligned}} \tag{2.1.3}$$

Do rovnice (2.1.2) dosadíme 2 hodnoty t. Takto získame 2 body funkcie, ktoré spojíme priamkou.



Obr. 2.1.1: Graf závislosti teploty na čase.

(b) Sme nad severným pólom a naše hodiny sú vo vnútri vesmírnej lode. Jediná relevantná sila, ktorej veľkosť je iná ako na Zemi je gravitačná. Naše nové tiažové zrýchlenie vypočítame vzťahom

$$g_{\mathrm{Ju}} = G\frac{M_{\mathrm{Ju}}}{R_{\mathrm{Ju}}^2}. \tag{2.1.4}$$

Zároveň poznáme vzťah pre periódu kyvadla (2.1.1). Čím bude perióda kyvadla menšia, tým rýchlejšie bude merať čas, a skutočný čas teda bude menší. To znamená, že pomer časov na Zemi a na Jupiteri bude prevrátený pomer periód kyvadla na Zemi a na Jupiteri.

$$\frac{t_{\mathrm{Ju}}}{t} = \frac{T}{T_{\mathrm{Ju}}} = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g_{\mathrm{Ju}}}}} = \sqrt{\frac{g_{\mathrm{Ju}}}{g}}\,. \tag{2.1.5}$$

Dosadením rovnice (2.1.4) do (2.1.5) dostávame

$$\frac{t_{\mathrm{Ju}}}{t} = \sqrt{\frac{M_{\mathrm{Ju}}G}{gR_{\mathrm{Ju}}^2}} \approx 1{,}70\,. \tag{2.1.6}$$

Koeficient funkcie A môžme vynásobiť týmto pomerom a dostaneme koeficient po korektúre A_2. Znova do rovnice (2.1.2) dosadíme 2 hodnoty t. Takto získame 2 body funkcie a spojíme ich priamkou. V obrázku 2.1.1 sú označené aj body po korektúre, no tie vynášať netreba.

(c) Nad rovníkom bude na kyvadlo pôsobiť aj odstredivá sila. Keďže Jupiter je veľmi hmotný a rýchlo rotuje, jej veľkosť nebude zanedbateľná. Vzťah pre výpočet odstredivej sily je

$$F_{\mathrm{o}} = m\omega^2 R_{\mathrm{Ju2}}\,, \tag{2.1.7}$$

kde F_{o} je odstredivá sila a ω je uhlová rýchlosť. Odstredivá sila bude mať opačný smer ako gravitačná, a odstredivú silu si vieme vyjadriť cez periódu rotácie Jupitera

$$\omega = \frac{2\pi}{P_{\mathrm{Ju}}}\,. \tag{2.1.8}$$

Pre tiažové zrýchlenie na rovníku, ktoré je rozdielom gravitačného a odstredivého, platí

$$g_{\mathrm{Ju2}} = \frac{M_{\mathrm{Ju}}G}{R_{\mathrm{Ju2}}^2} - \frac{4\pi^2}{P_{\mathrm{Ju}}^2}R_{\mathrm{Ju2}}\,. \tag{2.1.9}$$

Po dosadení do (2.1.5) dostávame

$$\frac{t_{\mathrm{Ju2}}}{t} \approx 1{,}51\,. \tag{2.1.10}$$

Funkciu opravíme rovnako ako v (b) a vypočítame jej koreň pre $T = 400$ K.

$$t_{\mathrm{smrť}} \approx 760\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{min}\;40\,\mathrm{s}\,. \tag{2.1.11}$$

Praktická časť

3.1. Slepá mapa

(**100 b**, autor: Jana Švrčková)

Predstavte si, že ste sa dostali na IOAA do Brazílie. Ste vo Vassouras, je 24. 8. 2024, 1:00 hod. miestneho času a práve sa nachádzate pod jasnou brazílskou oblohou spolu s peknou Brazílčankou/Brazílčanom. Toto je ideálna chvíľa, kedy môžete niekomu predviesť svoje znalosti nočnej oblohy.

Najskôr sa pozeráte smerom na juh, kde sú súhvezdia, ktoré zo Slovenska vôbec nevidno. Vy ste sa ale poctivo pripravovali na IOAA, takže ich všetky poznáte.

(a) Na mape 1 (3.1.1) identifikujte 12 ľubovoľných súhvezdí. V mape ich označte číslami od 1 do 12 v ľubovoľnom poradí, na samostatný papier potom k číslam priraďte ich slovenské názvy a latinské skratky.

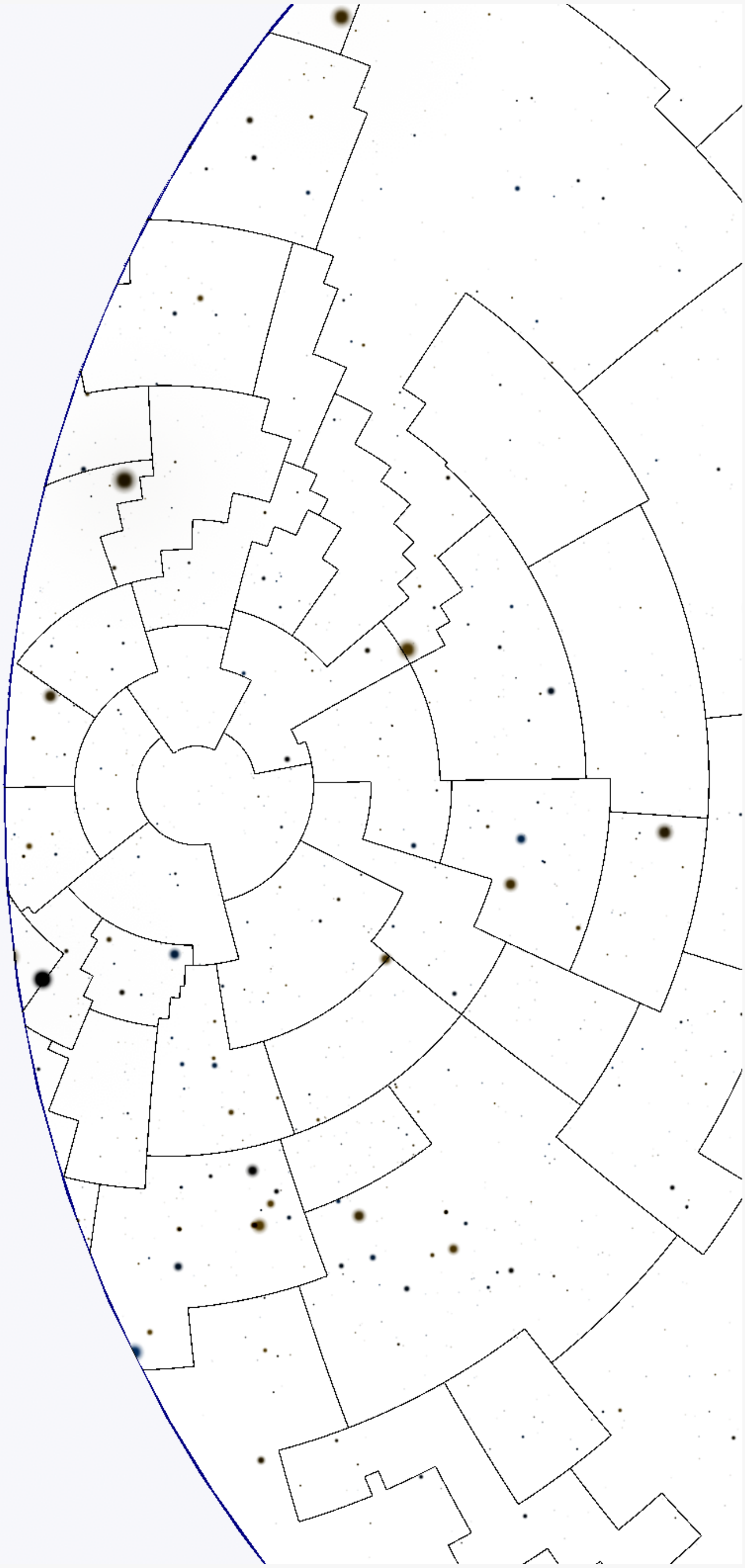
(b) Do mapy 1 zakreslite polohu južného svetového pólu (JP), južného pólu ekliptiky (EP) a južného galaktického pólu (GP). Označte ich skratkami uvedenými v zátvorkách.

Po tom, čo Brazílčanku/Brazílčana ohúrite svojimi znalosťami južnej oblohy sa pozriete na opačnú stranu nad severný horizont, kde sú už samé známe súhvezdia. V tejto časti oblohy sa vyznáte veľmi dobre a poznáte nielen súhvezdia, ale aj názvy hviezd a rôzne deep-sky objekty.

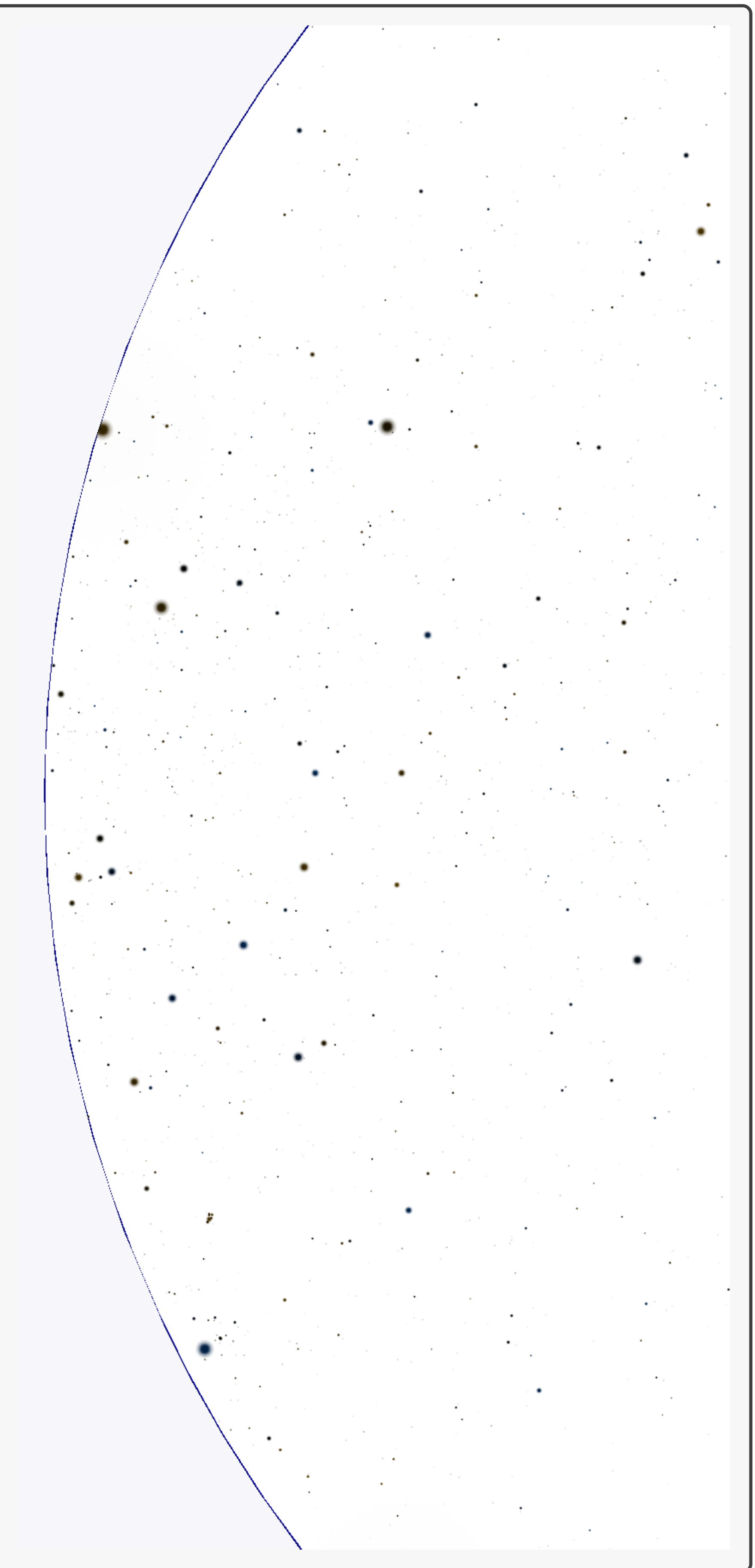
(c) Na mape 2 zakrúžkujte a označte číslami 1 až 8 ľubovoľných 8 hviezd. Na samostatný papier potom k jednotlivým číslam napíšte názvy hviezd alebo ich Bayerove označenia. Ak napíšete oboje, nedostanete žiadne body navyše.

(d) Na mape 2 (obr. 3.1.2) zakrúžkujte pozíciu ľubovoľných 7 Messierových objektov a napíšte k nim ich označenia v Messierovom katalógu.

Poznámka: keďže IOAA v Brazílii je až za niekoľko mesiacov a zatiaľ na ňu ešte len trénujete, v mape 1 sú ako pomôcka nakreslené aj hranice súhvezdí.



Obr. 3.1.1: Mapa 1.



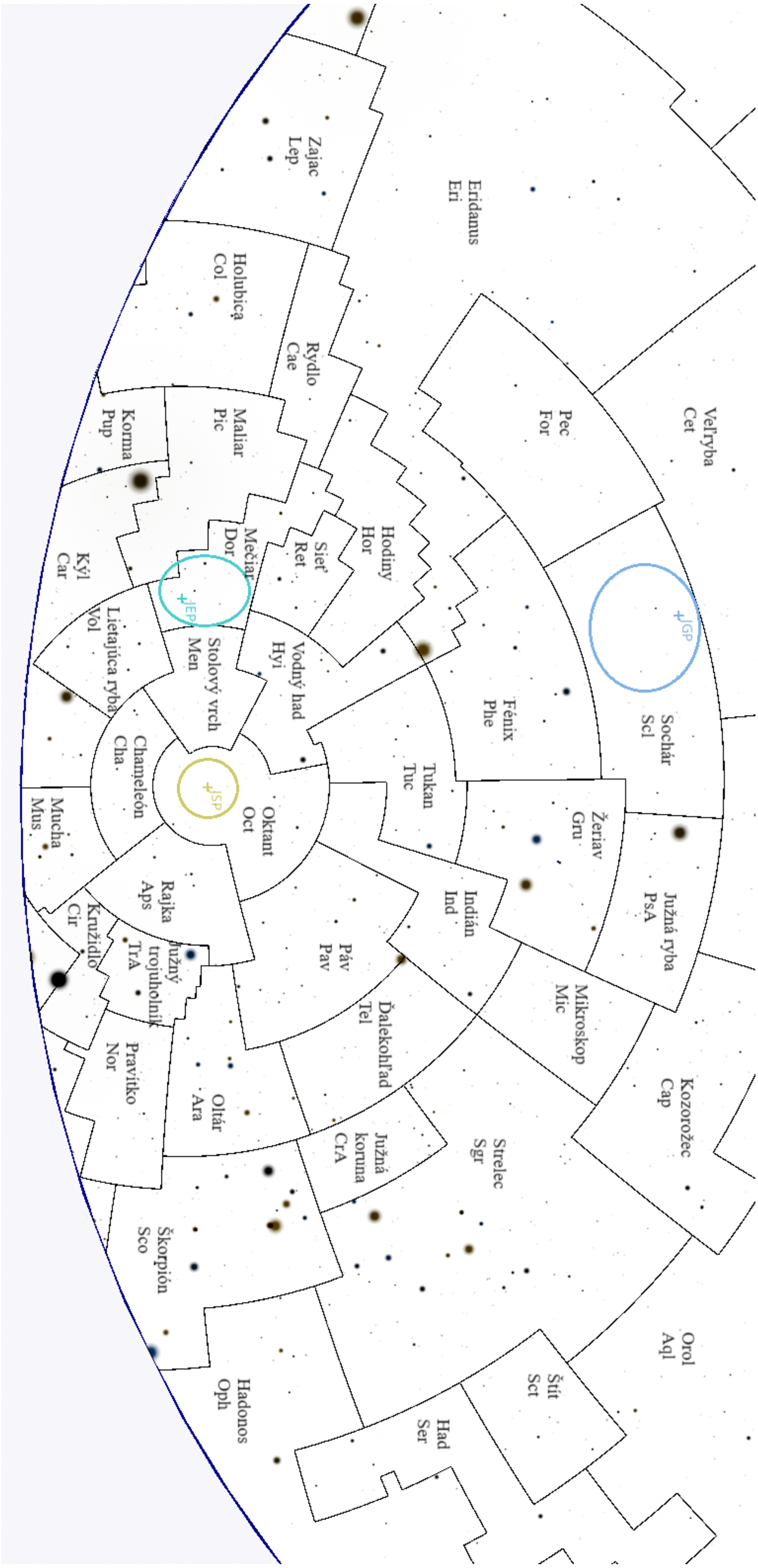
Obr. 3.1.2: Mapa 2.

(a) Názvy a skratky súhvezdí sú v mape na obr. 3.1.3.

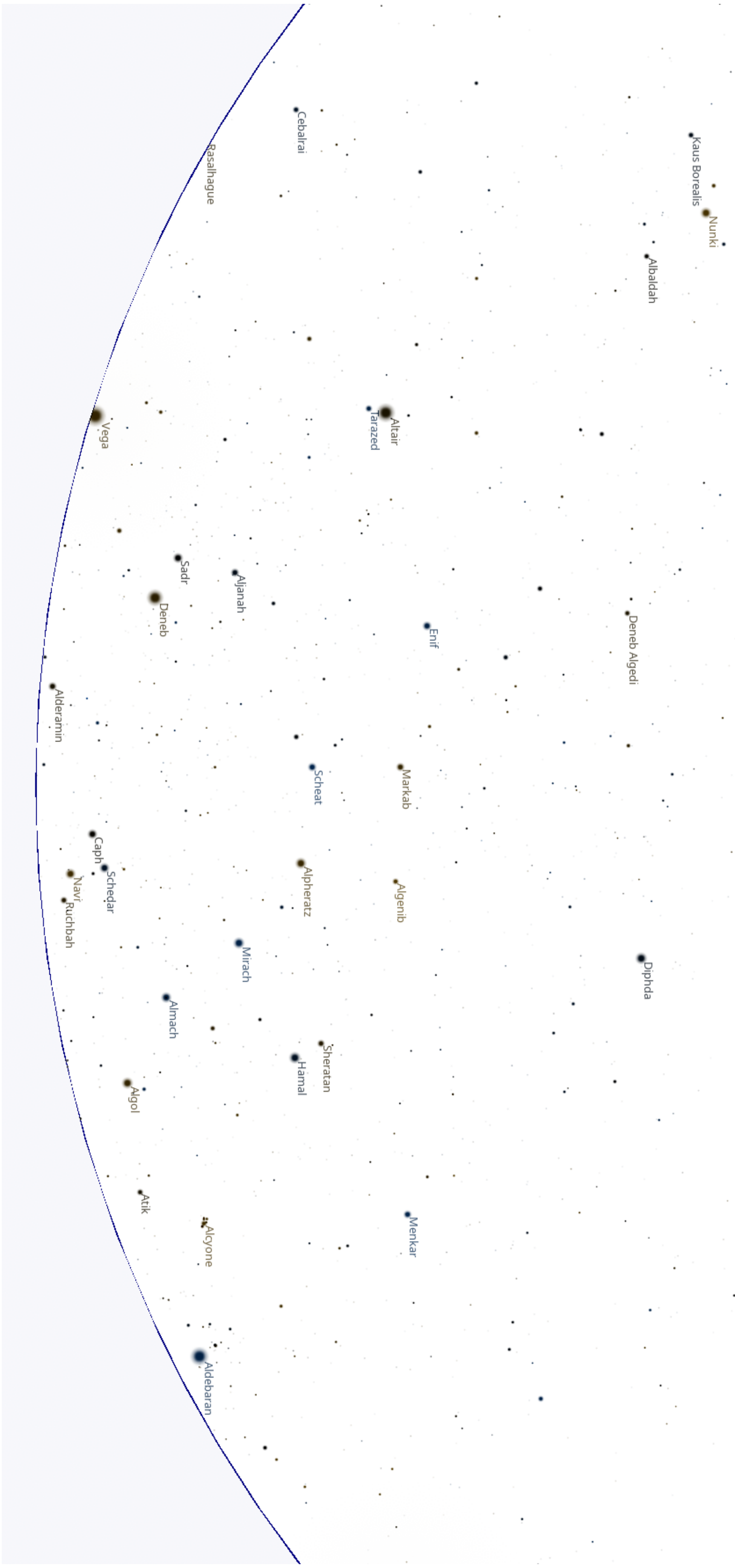
(b) Za zakreslenie pólov do oblastí vyznačených na mape ako na obr. 3.1.3 bol plný počet bodov, polovičný počet bodov bol za zakreslenie pólov aspoň do správnych súhvezdí.

(c) Názvy najjasnejších hviezd sú na obr. 3.1.4. Body sa dali získať aj za správne mená a označenia hviezd, ktoré na mape nie sú pomenované.

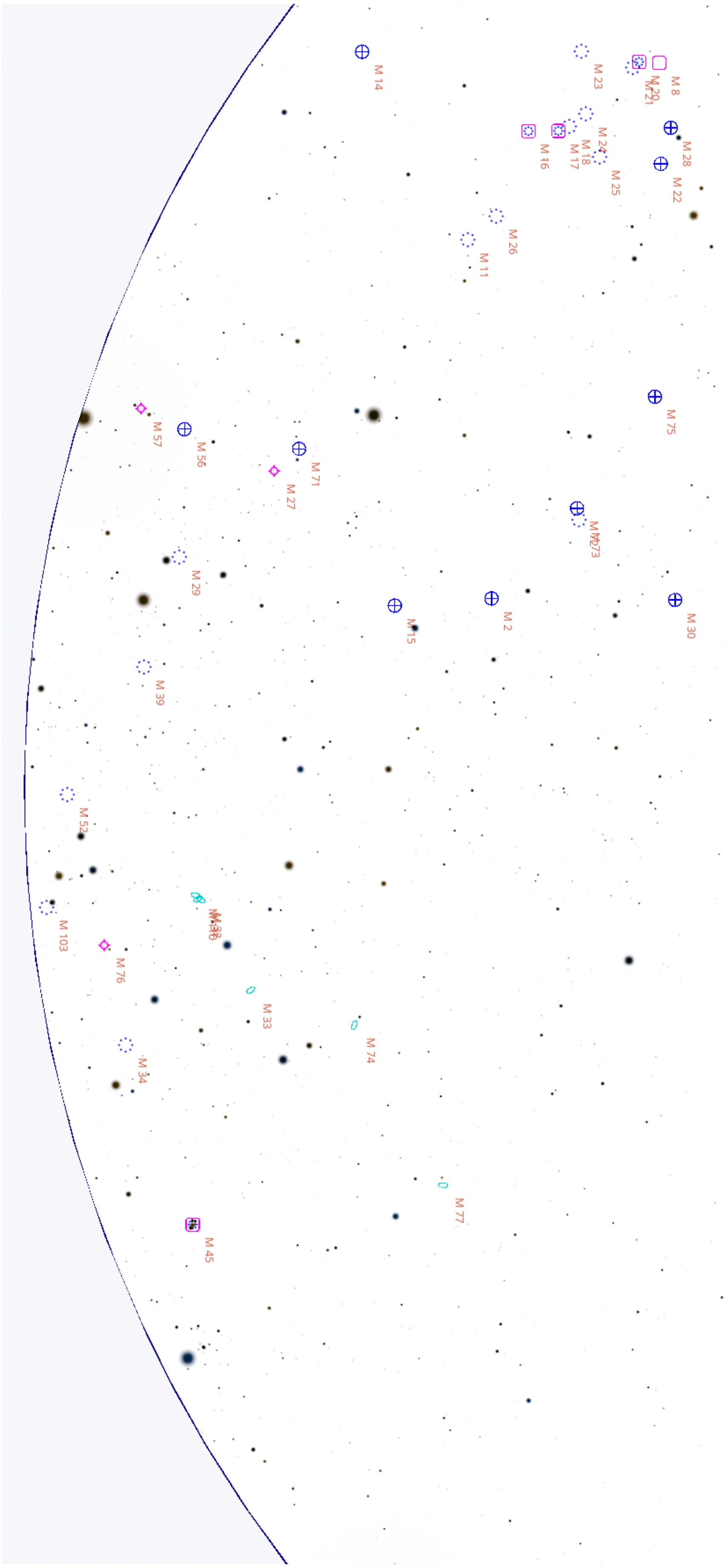
(d) Všetky Messierove objekty v tejto časti oblohy sú zakreslené na obr. 3.1.5.



Obr. 3.1.3: Riešenie úloh (a) a (b).



Obr. 3.1.4: Riešenie úlohy (c).



Obr. 3.1.5: Riešenie úlohy (d).

Zoznam konštánt pre SŠ

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	c	$= 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Gravitačná konštanta	G	$= 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
elementárny elektrický náboj	e	$= 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Planckova konštanta	h	$= 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmannova konštanta	k_B	$= 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	σ	$= 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Wienova posunovacia konštanta	b	$= 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
Hubblova konštanta	H_0	$= 70\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$

Astronomické jednotky a veličiny

stredný slnečný deň	deň	$= 24\,\mathrm{h}$
siderický deň	$\text{deň}^{(\mathrm{sid})}$	$= 23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}\ 4{,}1\,\mathrm{s}$
juliánsky rok	rok	$= 365{,}25$ dní
siderický rok	$\text{rok}^{(\mathrm{sid})}$	$= 365{,}2564$ dní
tropický rok	$\text{rok}^{(\mathrm{trop})}$	$= 365{,}2422$ dní
anomalistický rok	$\text{rok}^{(\mathrm{anom})}$	$= 365{,}2596$ dní
astronomická jednotka	au	$= 149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$
svetelný rok	ly	$= 63\,241\,\mathrm{au}$
parsek	pc	$= 3{,}262\,\mathrm{ly}$
Jansky	Jy	$= 10^{-26}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$
hmotnosť Slnka	$M_\odot$	$= 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
polomer Slnka	$R_\odot$	$= 6{,}957 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_\odot$	$= 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_\odot$	$= 5780\,\mathrm{K}$
Slnečná konštanta	$k_\odot$	$= 1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}$
polomer Zeme	$R_\oplus$	$= 6378\,\mathrm{km}$
excentricita dráhy Zeme	$e_\oplus$	$= 0{,}0167$
hmotnosť Jupitera	M_Ju	$= 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$
perióda rotácie Jupitera	T_Ju	$= 9\,\mathrm{h}\ 50\,\mathrm{min}\ 30\,\mathrm{s}$

Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin \gamma - \sin b \cos c \cos \alpha$$