Astronomická olympiáda 2024

Kolo: **domáce kolo** Kategória: **základná škola**

Slovenská ústredná hvezdáreň v Hurbanove

Slovenská Astronomická Spoločnosť pri Slovenskej akadémii vied

Vzorové riešenia $\sum$ 400b

1. Kam dovidí Kolonica

(**75 b**, autor: Samuel Amrich)

Jeden z dôvodov, prečo používame ďalekohľady je, že nám umožňujú zachytiť viac svetla, a tým odpozorovať slabšie hviezdy. Aké najslabšie hviezdy možno pozorovať ďalekohľadom na Astronomickom observatóriu na Kolonickom sedle s priemerom zrkadla $D = 1\,\mathrm{m}$, ak naše oko cez zrenicu s priemerom $d = 1\,\mathrm{cm}$ vidí hviezdy s jasnosťou $m = 6\,\mathrm{mag}$?

Výsledok uveďte v magnitúdach. Dôležité je si uvedomiť, že množstvo zachyteného svetla ďalekohľadom je závislé od zbernej plochy.

Najprv sa k výsledku pokúsime dostať pomocou jednoduchých úvah a takmer bez toho aby sme potrebovali zložitú matematiku. Jeden meter štvorcový predstavuje desaťtisíc krát väčšiu plochu ako jeden centimeter štvorcový. Väčšia plocha ďalekohľadu zachytí viac svetla z hviezdy, ktoré sa nám následne premieta do oka.

Posun 5 magnitúd je zadefinovaný ako stonásobne viac svetla (odborne sa tomu hovorí tok). V našom prípade máme $10\,000 = 100 \cdot 100$ krát viac svetla, čo zodpovedá posunu o $5 + 5 = 10$ magnitúd. Preto Kolonica musí byť schopná zachytiť o desať magnitúd slabšie objekty ako ľudské oko. Teda z magnitúdy 6 na magnitúdu 16.

Ak ale chceme poznať pravé fyzikálne riešenie, potrebujeme začať s Pogsonovou rovnicou

$$m' - m = -2{,}5 \log\left(\frac{F'}{F}\right), \tag{1.1}$$

kde m a m' sú magnitúdy dvoch hviezd (alebo jednej hviezdy cez dva rôzne objektívy ako v našom príklade) a F, F' sú prisluchajúce toky. S čiarkou označujeme veličiny spojené s pozorovaním cez ďalekohľad.

Dôležité je si uvedomiť, že limitná magnitúda je naviazaná na limitný výkon P_L hviezdy (hviezdu naše oko vidí, až keď presiahne určitý limitný výkon), ktorý dokážeme zachytiť. A ten súvisí s tokom F a zachytávajúcou plochou S nasledujúco

$$P_\mathrm{L} = SF \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P_\mathrm{L}}{S}, \tag{1.2}$$

respektíve pre F' a S'

$$P_\mathrm{L} = S'F' \quad \Rightarrow \quad F' = \frac{P_\mathrm{L}}{S'}. \tag{1.3}$$

Takže do všeobecnej Pogsonovej (1.1) rovnice vieme dosadiť vzťahy (1.2) a (1.3) vyššie a prepísať ako

$$m' - m = -2{,}5 \log\left(\frac{\frac{P_\mathrm{L}}{S'}}{\frac{P_\mathrm{L}}{S}}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{P_\mathrm{L}}{S'} \cdot \frac{S}{P_\mathrm{L}}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{S}{S'}\right). \tag{1.4}$$

Teraz potrebujeme ešte určiť plochu S a S'. Keď predpokladáme kruhový tvar oka a ďalekohľadu v kolonici, potom

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0{,}25\pi d^2, \tag{1.5}$$

$$S' = 0{,}25\pi D^2. \tag{1.6}$$

Čo po spätnom dosadení do (1.4)

$$m' - m = -2{,}5 \log\left(\frac{S}{S'}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{0{,}25\pi d^2}{0{,}25\pi D^2}\right), \tag{1.7}$$

$$= -2{,}5 \log\left(\frac{d^2}{D^2}\right) = -2{,}5 \log\left(\left(\frac{d}{D}\right)^2\right). \tag{1.8}$$

Čo po dosadení konkrétnych hodnôt

$$m' = 16\,\mathrm{mag}. \tag{1.9}$$

Poznámka

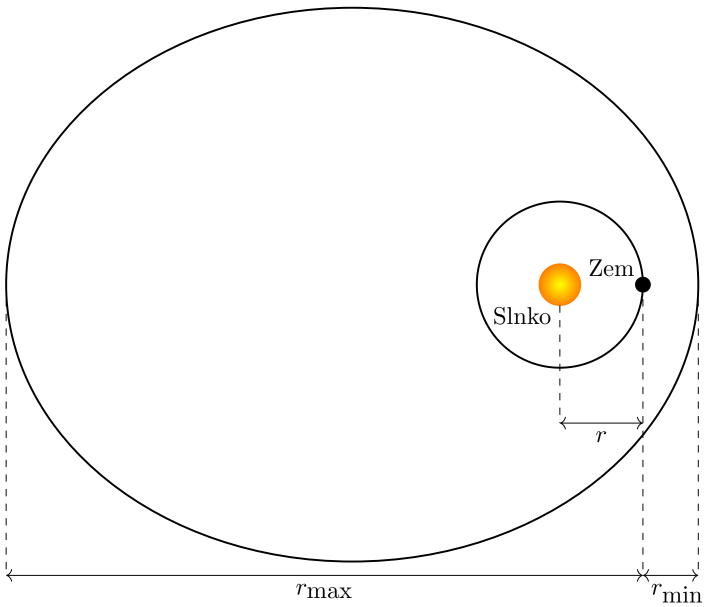
Eventuálne vieme na zjednodušenie vzťahu vyššie využiť znalosť, že $\log(x^n) = n \log(x)$. Potom je výsledným vzorcom

$$m' = m - 5 \log\left(\frac{d}{D}\right) = 16\,\mathrm{mag}. \tag{1.10}$$

2. Neznámy asteroid

(**50 b**, autor: Samuel Buranský)

Asteroid je najbližšie k Zemi $r_{\min} = 1\,\mathrm{au}$ a najďalej $r_{\max} = 5\,\mathrm{au}$. Určte parametre dráhy tohto asteroidu, konkrétne veľkú polos a, excentricitu e a obežnú periódu T. Taktiež určte ako často môžeme pozorovať tento asteroid v západnej kvadratúre. Dráhu Zeme považujte za kruhovú s polomerom $r = 1\,\mathrm{au}$.



Obr. 2.1: Schéma dráhy Zeme a asteroidu.

Ak si nakreslíme dráhy Zeme a asteroidu (obrázok 2.1) vidíme, že najbližšie k Zemi je asteroid v opozícii, kedy je zároveň v perihéliu, a najďalej v konjunkcii, kedy je zároveň v aféliu. Priamo z obrázku platí $2a = r_{\min} + r_{\max} = 6\,\mathrm{au}$, kde a je veľká polos dráhy asteroidu. Z toho dostávame $a = 3\,\mathrm{au}$.

Zároveň vzdialenosť od Slnka je v perihéliu $q = 2\,\mathrm{au}$ a v aféliu $Q = 4\,\mathrm{au}$. Excentricitu dráhy spočítame ako

$$e = \frac{ae}{a} = \frac{a-q}{a} = \frac{1}{3}\,, \tag{2.1}$$

kde $ae = a - q$ je lineárna excentricita, ktorá je rovná vzdialenosti stredu elipsy a jej ohniska.

Obežnú periódu T určíme podľa 3. Keplerovho zákona pre Slnečnú sústavu v tvare

$$a^3 = T^2\,, \tag{2.2}$$

kde a udávame v astronomických jednotkách a T v rokoch. Po úprave a dosadení dostávame

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{27} \approx 5{,}20\,\mathrm{roka}\,. \tag{2.3}$$

Opakovanie západnej kvadartúry je obežná doba asteroidu pri pohľade zo Zeme, teda jeho synodická obežná doba S, pre ktorú v rokoch platí

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T} = 1\,\mathrm{rok}^{-1} - \frac{1}{\sqrt{27}}\,\mathrm{roka}^{-1} \approx 0{,}81\,\mathrm{roka}^{-1}\,, \tag{2.4}$$

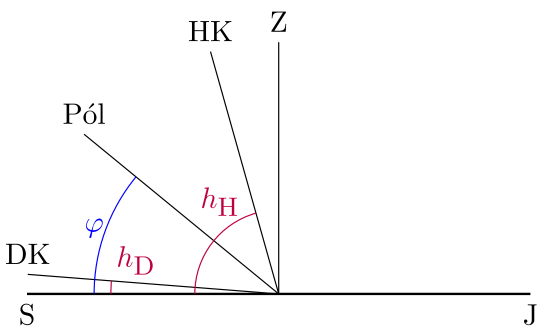
odkiaľ po prevrátení zlomkov dostaneme $S \approx 1{,}24\,\mathrm{roka}$.

3. Pozorovanie kulminácií

(**50 b**, autor: Jana Švrčková)

Pozorovateľ, ktorý sa nachádza na severnej pologuli, určil výšku hviezdy nad severným horizontom počas jej hornej kulminácie $h_\mathrm{H} = 74{,}27°$ a výšku hviezdy počas jej dolnej kulminácie $h_\mathrm{D} = 4{,}45°$. Vypočítajte deklináciu hviezdy δ, ako aj zemepisnú šírku pozorovateľa φ. Na akom rozsahu zemepisných šírok je možné hviezdu pozorovať? Atmosférickú refrakciu zanedbajte.

Poloha hornej a dolnej kulminácie hviezdy je znázornená na obrázku 3.1. Vieme, že výška pólu nad horizontom sa rovná zemepisnej šírke pozorovateľa. Keďže hviezda sa nachádza stále v rovnakej uhlovej vzdialenosti od pólu (lebo má stále rovnakú deklináciu), vieme vypočítať zemepisnú šírku ako priemer výšok kulminácií



Obr. 3.1: Kulminácie hviezdy.

$$\varphi = \frac{h_\mathrm{H} + h_\mathrm{D}}{2} = 39{,}36°\,. \tag{3.1}$$

Vzdialenosť hviezdy od pólu p je definovaná ako

$$p = 90° - \delta\,, \tag{3.2}$$

kde δ je deklinácia hviezdy. Zároveň pre ňu platí

$$p = h_\mathrm{H} - \phi\,. \tag{3.3}$$

Z toho dostaneme deklináciu hviezdy $\delta = 55{,}09°$. Deklinácia je kladná, hviezda sa nachádza na sever od rovníka, môžeme ju preto určite pozorovať na celej severnej pologuli. Ak hviezdu pri hornej kulminácii pozorujeme na horizonte, nachádzame sa na najnižšej možnej zemepisnej šírke, odkiaľ je možné hviezdu ešte zahliadnuť. V takom prípade sa severný pól nachádza p stupňov pod horizontom. Táto hraničná zemepisná šírka je

$$\varphi_\mathrm{h} = -p = -(90° - \delta) = -34{,}91°\,. \tag{3.4}$$

Hviezdu je teda možné pozorovať na zemepisných šírkach od 34,91° S po 90° N.

4. Zo Zeme na Mesiac

(**125 b**, autor: Samuel Buranský)

Predstavte si cestovateľa, ktorý cestuje po priamke zo Zeme k Mesiacu. Po ceste narazil na pár zaujímavých miest.

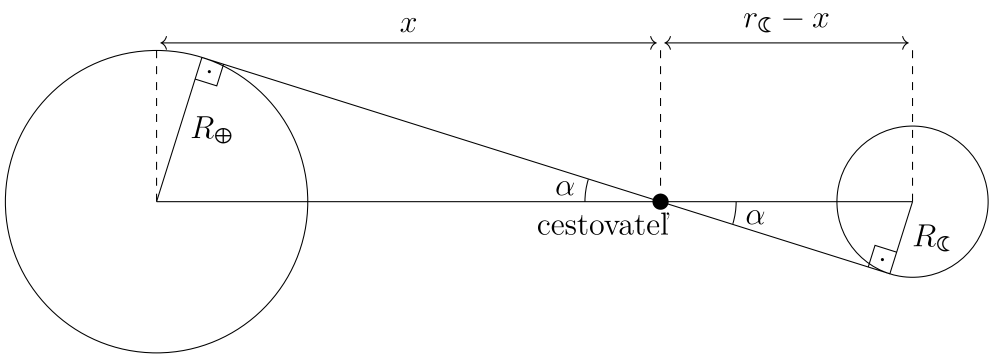
(a) V jednom momente pri pohľade von zistil, že Mesiac aj Zem majú rovnakú uhlovú veľkosť. Zistite ako ďaleko od stredu Zeme sa nachádzal. Na vyjadrenie použite hodnotu vzdialenosti stredov Zeme a Mesiaca $r_{☾} = 384\,400\,\mathrm{km}$ a pomer ich polomerov $\rho = R_{☾}/R_{\oplus} = \frac{27}{100}$.

(b) Počas letu si taktiež v jednom momente všimol, že sa dostáva do gravitačného pôsobenia Mesiaca. To znamená rovnakú veľkosť gravitačnej sily od Zeme a Mesiaca. Zistite ako ďaleko od stredu Zeme sa nachádzal tentokrát. Použite $r_{☾}$ a pomer hmotností $\mu = M_{☾}/M_{\oplus} = 1/81$.

(c) Cestovateľa zaujímalo, kedy prejde ťažiskom sústavy Zeme a Mesiaca. Na jeho prekvapenie zistil, že cez ťažisko nepôjde. Vysvetlite a výpočtom dokážte prečo. Použite hodnoty $r_{☾}$ a pomer hmotností $\mu = M_{☾}/M_{\oplus} = 1/81$.

Úlohy riešte aj všeobecne, to znamená výsledok uveďte v tvare vzorca pre požadovanú veličinu. V prípade iba číselného riešenia, bude riešenie ohodnotené menším počtom bodov.

(a) Začneme tým, že si nakreslíme obrázok 4.1.



Obr. 4.1: Podobnosť trojuholníkov pri rovnosti uhlových veľkostí Zeme a Mesiaca.

Keďže cestovateľ v bode P vidí Zem aj Mesiac s rovnakou uhlovou veľkosťou, uhly α sa zhodujú. Oba trojuholníky sú zároveň pravouhlé, preto sú podľa vety *uu* podobné. Pre pomery strán teda platí

$$\frac{r_{☾} - x}{x} = \frac{R_{☾}}{R_{\oplus}}\,, \tag{4.1}$$

kde pravú stranu nahradíme ρ a zlomok na ľavej strane rozdelíme na dva

$$\frac{r_{☾}}{x} - 1 = \rho\,. \tag{4.2}$$

Pripočítame 1 a na oboch stranách prevrátime zlomky

$$\frac{x}{r_☾} = \frac{1}{\rho + 1}\,. \tag{4.3}$$

Nakoniec rovnicu prenásobíme $r_☾$

$$x = \frac{r_☾}{\rho + 1} \approx 302\,700\,\mathrm{km}\,. \tag{4.4}$$

(b) Najprv si napíšeme vzťahy pre gravitačné sily od Zeme a od Mesiaca na bod vo vzdialenosti x od Zeme: $F_\oplus = GM_\oplus m/x^2$, $F_☾ = GM_☾ m/(r_☾ - x)^2$. Tieto sily dáme do rovnosti a vykrátime G a m

$$\frac{M_\oplus}{x^2} = \frac{M_☾}{(r_☾ - x)^2}\,. \tag{4.5}$$

Rovnicu podelíme $M_\oplus$ a vynásobíme $(r_☾ - x)^2$

$$\frac{(r_☾ - x)^2}{x^2} = \frac{M_☾}{M_\oplus}\,. \tag{4.6}$$

Rovnicu odmocníme a zlomok na pravej strane nahradíme μ

$$\frac{r_☾ - x}{x} = \sqrt{\mu}\,, \tag{4.7}$$

Po rozdelení zlomku na ľavej strane a pripočítaní 1 dostaneme

$$\frac{r_☾}{x} = 1 + \sqrt{\mu}\,. \tag{4.8}$$

Na záver prevrátime zlomky a vyjadríme x

$$x = \frac{r_☾}{1 + \sqrt{\mu}} \approx 346\,000\,\mathrm{km}\,. \tag{4.9}$$

(c) Napíšeme si vzťah pre výpočet polohy ťažiska dvoch telies (tzv. „hojdačka“), kde vzdialenosť Zeme od ťažiska označíme x, a teda vzdialenosť Mesiaca od ťažiska je $r_☾ - x$.

$$M_\oplus x = M_☾ (r_☾ - x)\,. \tag{4.10}$$

Rovnicu podelíme $M_☾$ a x

$$\frac{M_\oplus}{M_☾} = \frac{r_☾ - x}{x}\,. \tag{4.11}$$

Ľavú stranu nahradíme výrazom $\frac{1}{\mu}$ a zlomok na pravej strane rozdelíme na dva

$$\frac{1}{\mu} = \frac{r_☾}{x} - 1\,. \tag{4.12}$$

Pripočítame 1 a ľavú stranu upravíme na jeden zlomok

$$\frac{1 + \mu}{\mu} = \frac{r_☾}{x}\,. \tag{4.13}$$

Nakoniec prevrátime zlomky a vyjadríme x

$$x = \frac{\mu}{1 + \mu} r_☾ \approx 4688\,\mathrm{km}\,. \tag{4.14}$$

Podľa výsledku vidíme, že ťažisko sa nachádza 1690 km pod povrchom Zeme.

5. Gnómon

(**100 b**, autor: Samuel Amrich a Radovan Lascsák)

Pravé poludnie je moment, keď je Slnko najvyššie na oblohe v danom dni, to znamená, že jeho uhlová vzdialenosť od horizontu je maximálna. Tento okamih ale nenastáva vždy o 12:00 miestneho času. Tento rozdiel medzi dvanástou hodinou a pravým poludním sa vyznačuje častokrát do obrázku, ktorý sa nazýva analema. Tento rozdiel môže byť až sedemnásť minút.

Vašou úlohou bude zistiť tento rozdiel pre nejaký vami zvolený dátum a miesto na Zemi. K tomu využijete gnómon, čo je v zásade akákoľvek tyč zapichnutá kolmo do zeme. Po umiestnení alebo nájdení vhodného gnómonu začnite merať dĺžku jeho tieňa medzi 11:45 – 12:15 vášho miestneho času, nie času na hodinkách. Váš miestny čas môžete určiť po zadaní zemepisnej dĺžky na stránke `https://ztatlock.net/sundial.html`. Meranie uskutočnite každú minútu. Pravé poludnie je čas, kedy je tieň najkratší. Určite tento čas. Odhadnite chybu vášho merania. Nezabudnite napísať dátum a zemepisnú polohu vášho pozorovania. Riešenie doplňte fotodokumentáciou.

Spísať jeden konkrétny návod je náročné, pretože správne riešenie je výberom správnych postupov a metód, ktoré sa používajú pre dosiahnutie čo najpresnejšieho výsledku. Preto aj hodnotenie bude na individuálnej úrovni a bude zohľadňovať externé podmienky, dosiahnutú presnosť a rigoróznosť postupu. V riešení sa pokúsime len popísať vhodné postupy a problematické miesta.

Ako prvé je potrebné si uvedomiť, že v celom meraní sú len tri zdroje chýb. Prvým je meranie dĺžky tieňa. Najčastejšie na to využívame nejaký typ meracieho pásma alebo pravítka. Tie majú typicky najmenší dielik 1 mm, čo znamená, že chyba merania je okolo 0,5 mm (jeden zo základných princípov je, že chyba merania je polovica najmenšieho dieliku). Takisto však musíme zobrať do úvahy ako presne sme schopní zakresliť koniec tieňa. Ak by táto nepresnosť bola väčšia ako chyba meradla, potom je ona zodpovedná za chybu merania dĺžky tieňa a chybu meradla môžeme zanedbať.

Druhým zdrojom chyby je meranie času. Meranie uskutočňujeme každú minútu, teda náš dielik času je jedna minúta. Polovica dielika je potom 30 s, čo je odhad chyby času. Takisto nepresnosti nastávajú pri samotnom zápise času merania, keďže je náročné naraz zaznamenať dĺžku tieňa a čas merania. Chyba času na online stránkach problémom nie je, pretože tam je čas veľmi presne riadený atómovými hodinami, a chyba času spôsobená internetom je menšia ako 0,1 s.

To všetko znamená, že presnosť merania dĺžky tieňa je pri správnom postupe už len ťažko zlepšiteľná. A tak sa dostávame k poslednému faktoru a to je výška gnómonu, ktorý používame. Tam nás vlastne absolútne nezaujíma poznanie jeho presnej výšky, ale iba to aby bol čo najvyšší. Je to z dôvodu, že vyšší gnómon znamená dlhší tieň a to znamená, že chyba vzniknutá meraním je menšia.

Ak človek dodržiava základné princípy fyzikálneho merania a spojí ich s poznámkami vyššie, mal by byť schopný dosiahnuť veľmi presné a fyzikálne správne meranie.

Zoznam konštánt

Základné konštanty

Rýchlosť svetla vo vákuu	c	$= 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Gravitačná konštanta	G	$= 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Elementárny elektrický náboj	e	$= 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Planckova konštanta	h	$= 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmannova konštanta	k_B	$= 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefan-Boltzmannova konštanta	σ	$= 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
Wienova posunovacia konštanta	b	$= 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
Hubblova konštanta	H_0	$= 73\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$

Astronomické jednotky

1 deň (stredný slnečný)		$= 24\,\mathrm{h}$
1 siderický deň		$= 23^\mathrm{h}\,56^\mathrm{min}\,4{,}1^\mathrm{s}$
1 siderický rok		$= 365{,}2564\,\mathrm{dní}$
1 astronomická jednotka	au	$= 149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$
1 svetelný rok	ly	$= 63\,241\,\mathrm{au}$
1 parsek	pc	$= 3{,}262\,\mathrm{ly}$
1 jansky	Jy	$= 10^{-26}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$
Hmotnosť Slnka	$M_\odot$	$= 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Polomer Slnka	$R_\odot$	$= 6{,}957 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Svietivosť (žiarivý výkon) Slnka	$L_\odot$	$= 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$