ASTROKURZ

(poznámky – alpha verzia!)

27. decembra 2023

Radovan Lascsák

Terézia Hanáková

Samuel Amrich

Študijný materiál určený k príprave
na astronomickú olympiádu pre stredné školy
vychádzajúci z online série videí Astrokurz (2020/21).

Astrokrúžok

https://www.youtube.com/@astrokruzok

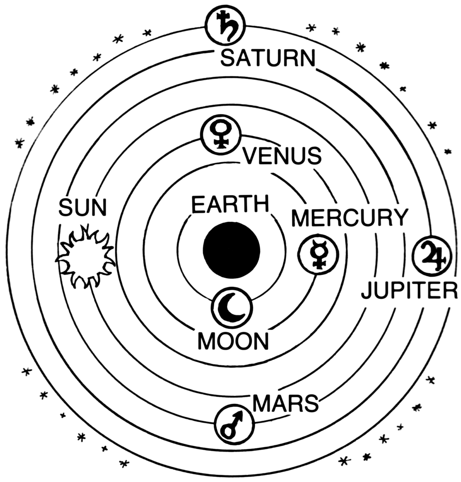
Obsah

Kapitola 1

Slnečná sústava

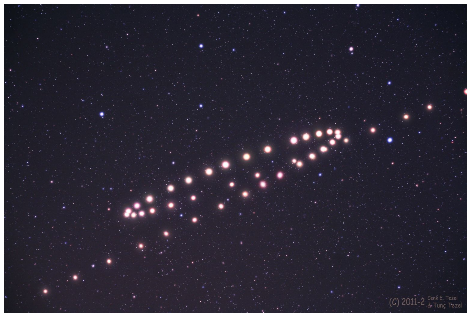
https://youtu.be/26Vude9QAvY

Ľudia už od nepamäti pozorovali nočnú oblohu. Hviezdy usporiadali do súhvezdí a orientovali sa podľa nich. Všimli si však, že niektoré z nich nie sú stále, ale pohybujú sa medzi ostatnými. Nazvali ich *planétés* (tuláci), a v slovenčine ich voláme planéty. Ich pohyb bol vysvetlený tak, že obiehajú po kružniciach okolo nehybnej Zeme v strede vesmíru, viď. obr. 1.1. Takýto model slnečnej sústavy nazývame **geocentrizmus**.

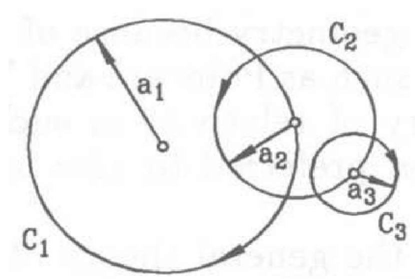


Obr. 1.1: Geocentrický model

Hlavným problémom geocentrizmu je, že sa planéty počas svojho pohybu na oblohe občas zastavia a na pár mesiacov putujú **retrográdnym** (opačným) smerom[1], viď. obr. 1.2. Preto Ptolemaios pridal do obehu planét **epicykly**, ktorých princíp je nasledovný: Planéta obieha po kružnici, ktorej stred obieha okolo Zeme[2]. Avšak, pridanie jedného epicyklu stále nevysvetlilo pozorované polohy planét úplne presne, a preto boli pridávané ďalšie pomocné kružnice (ďalšie epicykly), viď obr. 1.3. Problémom je, že takýmto skladaním kruhových pohybov je možné vytvoriť úplne ľubovoľný pohyb (súvis s Fourierovými radami). A takisto bol výpočet planét natoľko zložitý, že ho ľudia v tej dobe ani nevedeli spraviť.

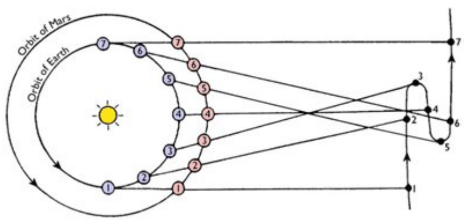


Obr. 1.2: Retrográdny pohyb Marsu



Obr. 1.3: Znázornenie epicyklov

Oveľa elegantnejším riešením je umiestniť do stredu slnečnej sústavy Slnko[3] (namiesto Zeme). Takýto model nazývame **heliocentrizmus**. Retrográdny pohyb následne vzniká úplne prirodzene vďaka rozdielnym rýchlostiam planét. Čím je planéta ďalej od Slnka tým obieha pomalšie. Preto sa pri pohľade zo Zeme javí, že Mars urobí na oblohe otočku, a to práve vtedy keď ho Zem „obieha“, viď obr. 1.4.



Obr. 1.4: Vysvetlenie retrográdneho pohybu Marsu

[1]Video retrográdneho pohybu Merkúru: https://en.wikipedia.org/wiki/Apparent_retrograde_motion
[2]Animácia princípu fungovania epicyklov: https://youtu.be/26Vude9QAvY&t=109
[3]Najväčší epicyklus vychádzal u všetkých planét rovnako, čo je práve pohyb Zeme okolo Slnka.

Skúsme zistiť ako často ku takémuto javu dochádza. Teda ako často sa Zem nachádza na úsečke medzi Slnkom a Marsom. Odborne sa táto pozícia Marsu, respektíve **aspekt**, nazýva **opozícia**, pretože je na opačnej strane ako Slnko.

1.1 Synodická a siderická perióda

Jeden obeh okolo Slnka trvá Marsu 1,88 roka, čo označíme $P_♂$. Na mysli máme pohyb (obeh) vzhľadom na vzdialené nehybné hviezdy. Takúto obežnú dobu nazývame **siderická**. Zemi trvá obehnúť Slnko presne $P_\oplus = 1$ rok. Otázka znie, ako dlho trvá obeh Marsu pri pohľade zo Zeme? Inými slovami: Koľko času prejde medzi dvoma po sebe idúcimi opozíciami? Takto je definovaná takzvaná **synodická** obežná doba, ktorú označíme $T_♂$.

Štartovná a cieľová situácia je moment, kedy je Slnko, Zem a Mars na jednej priamke. Keďže Zem obieha okolo Slnka rýchlejšie ako Mars[4], tak bude Marsu „utekať“. Ich relatívna vzdialenosť bude postupne rásť, až sa dostanú opäť na jednu priamku, avšak tentoraz bude Mars na opačnej strane Slnka ako Zem. Tento aspekt nazývame **konjunkcia**. Pri pohľade zo Zeme sa javí, že Mars a Slnko sú na rovnakom mieste.

Ako bude čas ubiehať ďalej, tak Zem začne „dobiehať“ Mars z opačnej strany ako mu „ušla“, až sa opäť dostanú na jednu priamku. Pri pohľade z Marsu Zem vykoná jeden obeh okolo Slnka a vráti sa naspäť na rovnakú pozíciu na oblohe. To znamená, že počas doby $T_♂$ urobí Zem o jeden obeh okolo Slnka viac ako Mars.

$$N_\oplus - N_♂ = 1\,, \tag{1.1}$$

kde $N_\oplus$ je počet obehov Zeme okolo Slnka a $N_♂$ je počet obehov Marsu okolo Slnka. Tieto počty obehov môžu pokojne byť neceločíselné.

Dôležité je, že siderické obehy Zeme a Marsu, sa realizujú počas doby $T_♂$, ktorú chceme zistiť. Počty siderických obehov sú práve $N_\oplus$ a $N_♂$. Keďže poznáme siderické periódy obehu $P_\oplus$ a $P_♂$, tak

$$T_♂ = N_\oplus P_\oplus\,, \tag{1.2}$$

$$T_♂ = N_♂ P_♂\,. \tag{1.3}$$

Vyjadrením $N_\oplus$ a $N_♂$ z (1.2) a (1.3), a dosadením do (1.1) dostávame

$$\frac{T_♂}{P_\oplus} = \frac{T_♂}{P_♂} + 1\,.$$

Delením $T_♂$ a preusporiadaním dostávame

$$\frac{1}{T_♂} = \frac{1}{P_\oplus} - \frac{1}{P_♂}\,,$$

respektíve

$$\boxed{T_♂ = \frac{P_\oplus P_♂}{P_♂ - P_\oplus}} \doteq 2{,}14\,\text{roka}\,.$$

[4]Prečo to tak je si vysvetlíme v kapitole 3.

Medzi siderickou a synodickou periódou rozlišujeme aj napríklad pri rotácii Zeme. Doba medzi poludniami (synodickýá deň) je v priemere $t_{\mathrm{syn}} = 24\,\mathrm{h}$. Čas ktorý sa riadi 24 hodinovým cyklom nazývame **stredný slnečný čas**. Siderický deň označujeme ako hviezdny (pretože je vzhľadom na vzdialené nehybné hviezdy), a čas na neho naviazaný voláme **hviezdny čas**. Pokúsme sa spočítať aký dlhý je hviedny deň t_{sid}.

Hviezdny deň je kratší ako slnečný, pretože Zem obieha okolo Slnka rovnakým smerom ako rotuje. To znamená, že po tom ako spraví jednu siderickú rotáciu voči hviezdam, tak sa musí ešte trochu dotočiť, aby bola v rovnakej polohe voči Slnku[5]. Tieto malé dotočenia sa počas roka poskladajú na jednu celú otočku, čo znamená, že počet hviezdnych (siderických) dní v roku N_{sid} je o jedna väčší ako počet synodických (slnečných) dní v roku N_{syn}.

$$N_{\mathrm{sid}} = N_{\mathrm{syn}} + 1\,, \tag{1.4}$$

kde vidíme jasnú paralelu so vzorcom (1.1). Rokom myslíme dobu obehu Zeme okolo Slnka $P_\oplus$, ktorá trvá 365,25 slnečných dní. Teda $P_\oplus = 365{,}25 \cdot 24\,\mathrm{h} = 8766\,\mathrm{h}$ a

$$P_\oplus = N_{\mathrm{sid}} t_{\mathrm{sid}}\,, \tag{1.5}$$

$$P_\oplus = N_{\mathrm{syn}} t_{\mathrm{syn}}\,. \tag{1.6}$$

Analogicky ako predtým, dosadením (1.5) a (1.6) do (1.4), a následnou úpravou získavame dĺžku hviezdneho (siderického) dňa

$$\boxed{\frac{1}{t_{\mathrm{sid}}} = \frac{1}{t_{\mathrm{syn}}} + \frac{1}{P_\oplus}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_{\mathrm{sid}} = \frac{t_{\mathrm{syn}} P_\oplus}{P_\oplus + t_{\mathrm{syn}}}} \doteq 23^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,4{,}1^{\mathrm{s}} = 86\,164{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Každým dňom sa teda hviezdny čas posunie o $3^{\mathrm{m}}\,55{,}9^{\mathrm{s}} = 235{,}9\,\mathrm{s}$ voči slnečnému času. A vskutku! Za rok sa tento posun nasčíta na $365{,}25 \cdot 235{,}9\,\mathrm{s} \doteq 86\,162\,\mathrm{s}$, čo je práve jeden hviezdny deň. Po roku sa tým pádom hviezdny a slnečný čas opäť zladia.

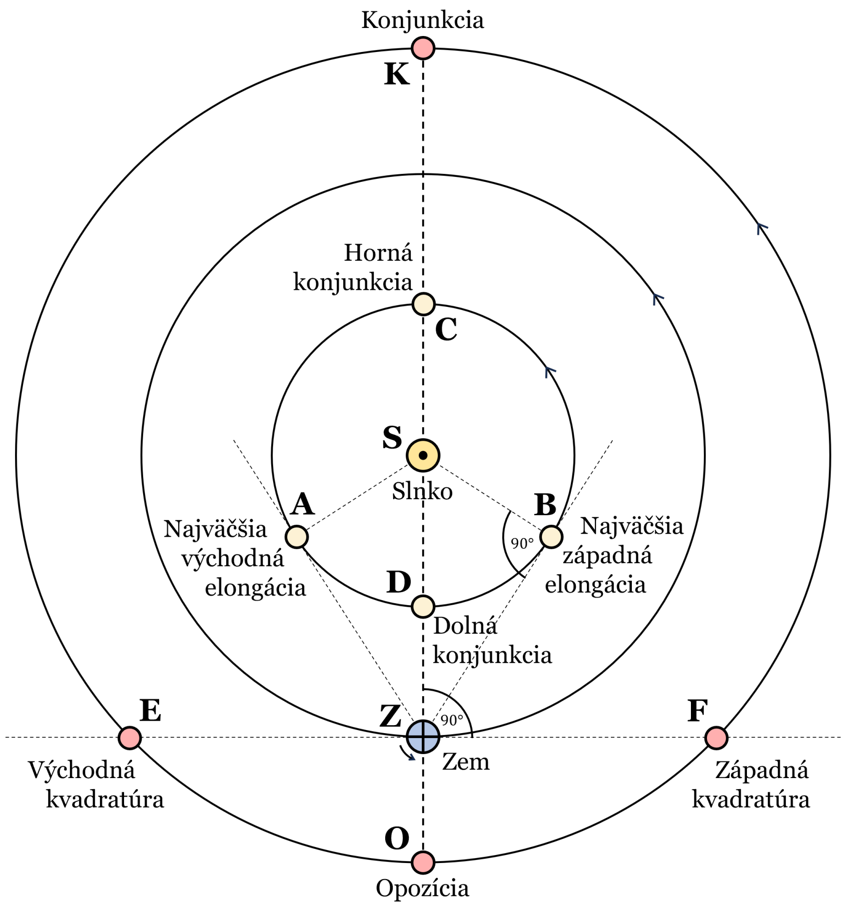
1.2 Aspekty planét

Aspekt je relatívna poloha planéty a Slnka pri pohľade zo Zeme. Dva aspekty sme už spomínali: opozíciu a konjunkciu. Ďalej rozlišujeme **kvadratúru** a **najväčšiu elongáciu**, ktoré môžu byť východné a západné. Všetky tieto aspekty sú zobrazené na obr. 1.5. Nateraz uvažujeme, že dráhy planét sú kruhové. Pri vnútorných planétach (Merkúr a Venuša) navyše rozlišujeme hornú a dolnú konjunkciu, podľa toho či nastala bližšie alebo ďalej od Zeme.

Elongácia ϵ je uhlová vzdialenosť medzi planétou a Slnkom (pri pozorovaní zo Zeme). Vnútorné planéty dosahujú maximálnu elongáciu napríklad v bode B (obr. 1.5). Vtedy je spojnica Zem – planéta (úsečka $\overline{\mathrm{ZB}}$) dotyčnicou k orbite vnútornej planéty. To znamená, že uhol $\measuredangle\mathrm{ZBS}$ je pravý (má 90°). Na základe vzdialeností $|\overline{\mathrm{ZS}}|$ a $|\overline{\mathrm{BS}}|$ (vzdialenosť Zeme od Slnka a planéty od Slnka) vieme určiť maximálnu elongáciu $\epsilon_{\max}$ keďže

$$\sin \epsilon_{\max} = \frac{|\overline{\mathrm{BS}}|}{|\overline{\mathrm{ZS}}|}\,. \tag{1.7}$$

[5] Animácia rozdielu medzi hviezdnym a slnečným dňom: https://youtu.be/bkUP3F9g0twk&t=247



Obr. 1.5: Aspekty planét

Napríklad v prípade Venuše je vzdialenosť Venuše od Slnka $|\overline{\mathrm{BS}}| = 0{,}72\,\mathrm{au}$ a Zeme od Slnka $|\overline{\mathrm{ZS}}| = 1\,\mathrm{au}$. Dosadením do (1.7) získame najväčšiu elongáciu Venuše $\epsilon_{♀,\max} = 46°$. Pod au rozumieme **Astronomickú jednotku**, čo je stredná vzdialenosť Zeme od Slnka. Jej hodnota je od roku 2012 definovaná presne ako **1 au = 149 597 870 700 m**.

Maximálna elongácia vonkajšej planéty je 180°, kedy je na opačnej strane ako Slnko, teda v opozícii. Navyše u vonkajších planét rozlišujeme kvadratúru (Body E a F), ktorá sa vyznačuje tým, že uhol Slnko – Zem – planéta je pravý (má 90°). Vzdialenosť planéty od Zeme v kvadratúre vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety. Pre prípad kvadratúry v bode F dostávame

$$|\overline{\mathrm{SF}}|^2 = |\overline{\mathrm{SZ}}|^2 + |\overline{\mathrm{ZF}}|^2 \,.$$

Z tohto potrebujeme vyjadriť $|\overline{\mathrm{ZF}}|$. Začneme presunutím člena $|\overline{\mathrm{SZ}}|^2$ na druhú stranu rovnice,

$$|\overline{\mathrm{SF}}|^2 - |\overline{\mathrm{SZ}}|^2 = |\overline{\mathrm{ZF}}|^2 \,.$$

Po vymenení ľavej a pravej strany rovnice, a odmocnení dostávame

$$\boxed{|\overline{\mathrm{ZF}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{SF}}|^2 - |\overline{\mathrm{SZ}}|^2}} \,.$$

Napríklad v prípade Marsu, kedy $|\overline{\mathrm{SF}}| = 1{,}52\,\mathrm{au}$ a $|\overline{\mathrm{SZ}}| = 1\,\mathrm{au}$, dostávame jeho vzdialenosť v kvadratúre $|\overline{\mathrm{ZF}}| = 1{,}14\,\mathrm{au}$.

Východný a západný aspekt rozlišujeme, podľa toho či sa planéta nachádza na východ, alebo západ od Slnka pri pozorovaní zo Zeme. To je určené rotáciou Zeme, ktorá je nakreslená na obr. 1.5 ľavotočivo. Predstavme si, že pozorujeme najväčšiu východnú elongáciu Venuše (zo Zeme) a aktuálne je poludnie. Z obr. 1.5 vidíme, že po tom ako sa Zem otočí o uhol $\epsilon_{♀,\mathrm{max}}$, tak sa Venuša dostane na miesto kde bolo Slnko počas poludnia. To znamená, že Venuša na oblohe „zaostáva“ za Slnkom, čiže je od Slnka smerom na východ. Analogická úvaha platí pre kvadratúru a západné aspekty.

1.3 Príklady

1.3.1 Erastotenes a polomer Zeme

V roku 240 p.n.l. žil v starovekej Alexandrii filozof Erastotenes. Počas letného slnovratu prišiel cestovateľ z mesta Syene a tvrdil, že u nich v ten deň na poludnie ľudia nevrhajú tieň. To zaujalo Erastotenesa, pretože u nich sa to nikdy nedialo. Zmeral, že telesá na poludnie vrhajú tieň pod uhlom päťdesiatiny kruhu.

Erastotenes si uvedomil, že by z tejto informácie mohol určiť aká je Zem veľká. V tej dobe sa už vedelo, že Zem je guľatá a Slnko veľmi ďaleko. Zároveň bolo známe ako dlho trvá cesta medzi Alexandriou a Syene. Preto Erastotenes zaplatil človeka, ktorý nasimuloval túto cestu na štadióne, a určil vzdialenosť z Alexandrie do Syene na 6200 štadiónov.

Avšak pri ceste z Alexandrie do Syene museli cestovatelia prekonávať rôzne terénne prekážky, čo navyšovalo dĺžku a čas ich cesty. Erastotenes odhadol, že po dokonalej Zemi v tvaru gule by vyšlo približne 5000 štadiónov. Štadión je dĺžková miera, ktorá sa v tej dobe používala. Vedú sa spory aká je jeho dĺžka, možnosti sú od 149 m do 185 m.

Aký polomer Zeme vyšiel Erastotenovi? Výsledok určite v štadiónoch a možný interval v kilometroch.

1.3.2 Aristarchus a vzdialenosť Slnka voči Mesiacu

V treťom storočí p.n.l. sa starogrécky astronóm Aristarchus pokúsil zmerať koľkokrát ďalej je Slnko voči Mesiacu. V tej dobe sa vedelo, že Mesiac nežiari vlastným svetlom, ale odráža to slnečné. Úvaha bola nasledovná: Ak by bolo Slnko nekonečne ďaleko, tak by v momente kedy je osvetlená presne polovica Mesiaca, tak uhlová vzdialenosť Slnka a Mesiaca bude rovná štvrtine kruhu. Ak nie, tak čím je táto uhlová vzdialenosť menšia, tým je Slnko bližšie.

Bol to geniálny nápad, ale bohužiaľ v tejto dobe to bolo veľmi ťažké odmerať. Aristarchus určil, že uhlová vzdialenosť Slnka a polovičného Mesiaca je zmenšená voči štvrtine kruhu o maximálne jednu tridsatinu.

Minimálne koľkokrát je Slnko ďalej ako Mesiac podľa Aristarchusa?

1.3.3 Synodický a siderický obeh Mesiaca

Pri pozorovaní zo Zeme vidíme spln Mesiaca každých 29,53 dňa, čo je synodická doba obehu. Aká je jeho siderická doba obehu, teda reálna fyzikálna doba obehu voči vzdialeným hviezdam? Výsledok určite v dňoch. Mesiac obieha okolo Zeme v rovnakom smere ako Zem okolo Slnka. Jeden rok (obeh Zeme okolo Slnka) trvá 365,25 dní.

1.3.4 Aspekty planét z Marsu

Predstavme si, že sme na Marse a pozorujeme Zem v najväčšej elongácii, a zároveň Jupiter v kvadratúre. Ako vzdialená je od nás (Marsu) Zem, a ako vzdialený je Jupiter? Vzdialenosť Marsu od Slnka je $a_{♂} = 1{,}5$ au a vzdialenosť Jupitera od Slnka je $a_{♃} = 5{,}2$ au. Výsledok určite v astronomických jednotkách.

Bonus: Aká je uhlová vzdialenosť Zeme od Slnka a aká je vzdialenosť Zeme od Jupitera?

1.3.5 Výsledky

Erastotenes a polomer Zeme

Približne 39 800 štadiónov, čo je interval od 5929 km do 7361 km.
Skutočná hodnota polomeru Zeme (6371 km) je vskutku v tomto intervale.

Aristarchus a vzdialenosť Slnka voči Mesiacu

Slnko je minimálne 19-krát ďalej ako Mesiac. Skutočná hodnota je skoro 400-krát, ale tak či tak ľudia v tej dobe získali predstavu o rozmeroch vesmíru. O tom, že Slnko je o dosť ďalej voči Mesiacu, čo pomohlo pri vytváraní modelov slnečnej sústavy.

Synodický a siderický obeh Mesiaca

Je to 27,32 dní.

Aspekty planét z Marsu

Vzdialenosť Mars – Zem je 1,1 au, Mars – Jupiter je 5,0 au.
Bonus: Uhlová vzdialenosť Zeme od Slnka je 42° a vzdialenosť Zem – Jupiter je 4,2 au.

Kapitola 2

Keplerove zákony

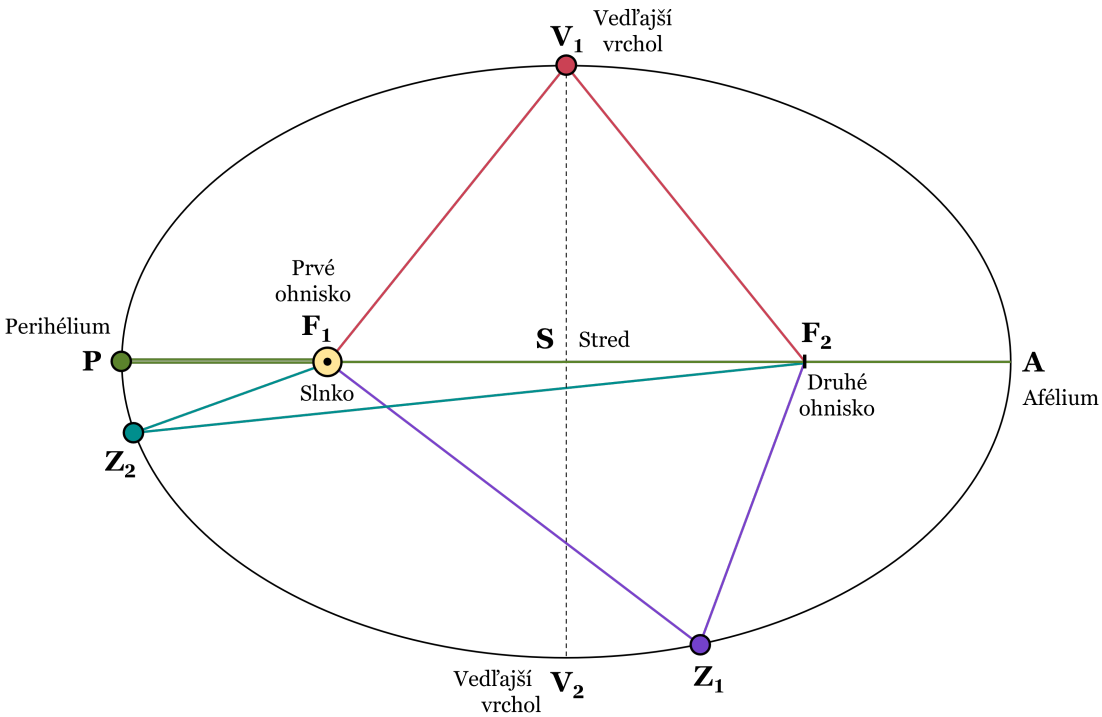
https://youtu.be/s2QZwM1nbWQ

Teória heliocentrizmu sa čím ďalej tým viac dostávala do popredia, avšak presné pozorovania Tycha de Brahe nesúhlasili s teoretickými predpoveďami pre kruhové dráhy. Z týchto meraní Johannes Kepler vydedukoval tri zákony, ktoré sú rozšíriteľné na obecnú sústavu dvoch gravitačne viazaných telies. My si predstavíme ich zjednodušené historické znenie.

1. Keplerov zákon (o dráhe) (KZ-1)

Dráhy planét sú eliptické. Slnko sa nachádza v jednom z ohnísk elipsy.

Elipsa (obr. 2.1) je definovaná ako množina bodov, ktoré majú konštantný súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov, **ohnísk** (F_1,F_2). Matematicky je to zapísané v (2.1). Slnko sa nachádza v ohnisku F_1. Bod kedy je planéta najbližšie ku Slnku voláme **perihélium** (P), a bod kedy je od neho najďalej **afélium** (A). Bod S predstavuje stred a body V_1,V_2 vedľajšie vrcholy elipsy. Z_1,Z_2 sú arbitrárne zvolené body pre potreby nadchádzajúceho textu.



$$|\overline{F_1V_1}| + |\overline{F_2V_1}| = |\overline{F_1Z_1}| + |\overline{F_2Z_1}| = |\overline{F_1Z_2}| + |\overline{F_2Z_2}| = |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}|, \tag{2.1}$$

Obr. 2.1: Elipsa

Definujme si základné parametre elipsy, zobrazené na obr. 2.2.

Veľká poloos a $= |\overline{\mathrm{PS}}| = |\overline{\mathrm{SA}}|$. Polovica najdlhšej spojnice bodov elipsy, úsečky $\overline{\mathrm{PA}}$.

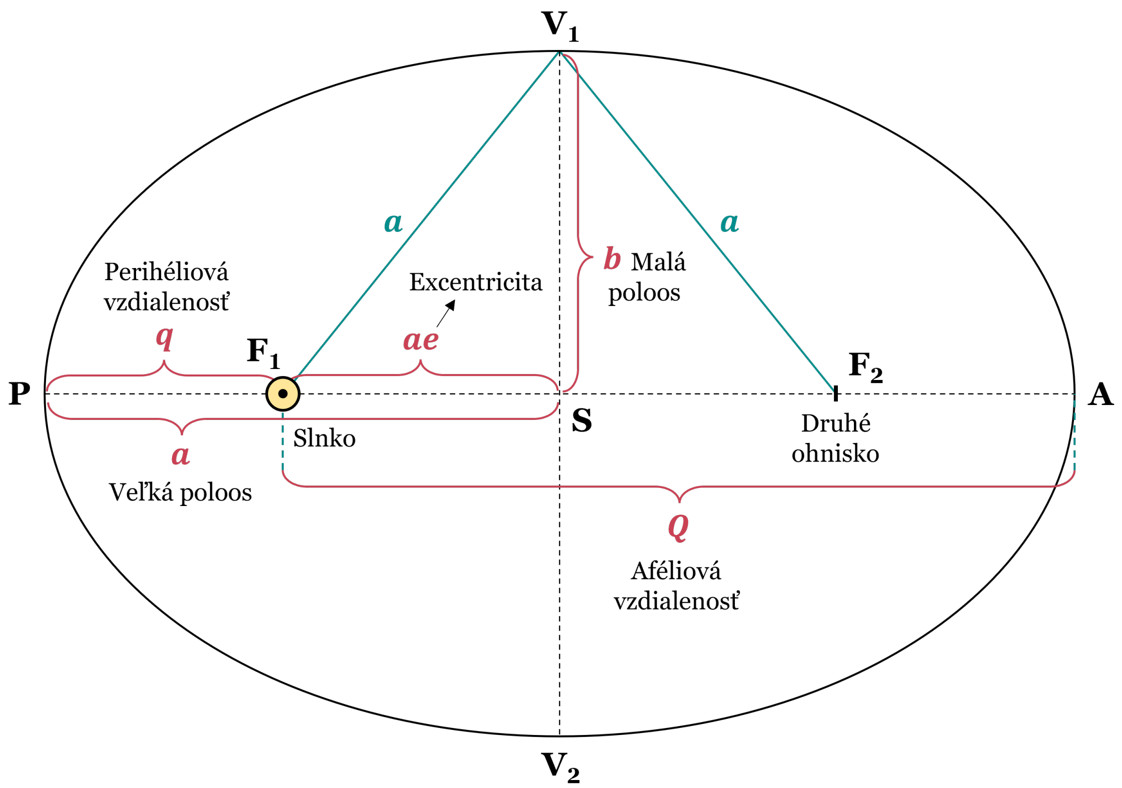
Malá poloos b $= |\overline{\mathrm{V_1S}}| = |\overline{\mathrm{SV_2}}|$. Polovica najkratšej spojnice bodov elipsy, úsečky $\overline{\mathrm{V_1V_2}}$.

Perihéliová vzdialenosť q $= |\overline{\mathrm{PF_1}}|$. Vzdialenosť medzi Slnkom a perihéliom[1].

Aféliová vzdialenosť Q $= |\overline{\mathrm{F_1A}}|$. Vzdialenosť medzi Slnkom a aféliom[2].

Excentricita e určuje sploštenosť elipsy. Je to číslo medzi 0 a 1, ktoré hovorí o relatívnej polohe ohniska $\mathrm{F_1}$ vrámci polpriamky $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ (respektíve ohniska $\mathrm{F_2}$ vrámci polpriamky $\overrightarrow{\mathrm{SA}}$). Matematicky zapísané: $|\overline{\mathrm{F_1S}}| = ae$ (respektíve $|\overline{\mathrm{F_2S}}| = ae$).

Nulová excentricita hovorí, že ohnisko $\mathrm{F_1}$ je totožné so stredom S (a takisto s druhým ohniskom $\mathrm{F_2}$). To znamená, že sa z elipsy stala kružnica (pre $e = 0$). Následne sa navyšovaním excentricity začne elipsa splošťovať, až dorazí ohnisko $\mathrm{F_1}$ do bodu P (pre $e = 1$). Avšak na to aby bola splnená definičná vlastnosť elipsy (2.1), tak buď dostávame úsečku $\overline{\mathrm{PA}}$, alebo musí byť elipsa nekonečne široká ($a = \infty$). Tento limitný prípad „roztrhnutej“ elipsy s excetricitou 1 voláme **parabola** a budeme sa jej podrobnejšie venovať v kapitole 12 o únikovej rýchlosti.



Obr. 2.2: Parametre elipsy

[1]Všeobecne najbližší bod k ohnisku v ktorom sa nachádza centrálne teleso označujeme **periapsida**. Špeciálne, ak je centrálnym telesom Zem, hovoríme o **perigeu**.

[2]Všebecne najvzdialenejší bod k ohnisku v ktorom sa nachádza centrálne teleso označujeme **apoapsida**. Špeciálne, ak je centrálnym telesom Zem, hovoríme o **apogeu**.

Možno ste si všimli, že na obr. 2.2 sú veľkosti úsečiek $\overline{F_1V_1}$ a $\overline{F_2V_1}$ označená ako veľká poloos a. Vysvetlime si, prečo to tak je a prečo je to užitočné. Výdime z definície elipsy (2.1), z ktorej nechajme iba úplne ľavú a pravú stranu a prepíšme ju pomocou práve zadefinovaných veličín:

$$|\overline{F_1V_1}| + |\overline{F_2V_1}| = q + Q\,.$$

Pozrime sa však čo predstavuje $q + Q$. Je to celá úsečka spájajúca perihélium a afélium $\overline{PA}$. Túto úsečku voláme hlavná os, alebo **priamka apsíd**. Jej dĺžka je dvojnásobok veľkej poloosy,

$$|\overline{F_1V_1}| + |\overline{F_2V_1}| = 2a\,.$$

Zo symetrie vidíme, že $|\overline{F_1V_1}| = |\overline{F_2V_2}|$, takže $\boldsymbol{|\overline{F_1V_1}| = a = |\overline{F_2V_1}|}$.

Na základe tejto znalosti vieme pomocou pravouhlého trojuholníka $\triangle F_1SV_1$ vypočítať dĺžku malej poloosi b. Z Pytagorovej vety

$$|\overline{F_1V_1}|^2 = |\overline{F_1S}|^2 + |\overline{SV_1}| \quad \Rightarrow \quad a^2 = (ae)^2 + b^2$$

dostávame

$$\boxed{\boldsymbol{b = a\sqrt{1-e^2}}}\,. \tag{2.2}$$

Na základe obr. 2.2 vieme takisto napísať vyjadrenia pre perihéliovú a áféliovú vzdialenosť

$$q = |\overline{PS}| - |\overline{F_1S}| = a - ae \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{q = a(1-e)}}\,, \tag{2.3}$$

$$Q = |\overline{F_1S}| + |\overline{SA}| = a + ae \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{Q = a(1+e)}}\,. \tag{2.4}$$

• • •

2. Keplerov zákon (o sprievodiči) (KZ-2)

Sprievodič planéty opíše za rovnaký čas rovnakú plochu.

Sprievodič je spojnica Slnka a planéty. Tento zákon hovorí o tom, že čím sa planéta nachádza ďalej od Slnka, tým pomalšie sa pohybuje. Graficky je znázornený na obr. 2.3. Plochy S_1, S_2, S_3 boli opísané sprievodičom za rovnaký čas (napr. 1 mesiac). Plochu celej elipsy vypočítame ako[3]

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\circ} = \pi ab}}\,. \tag{2.5}$$

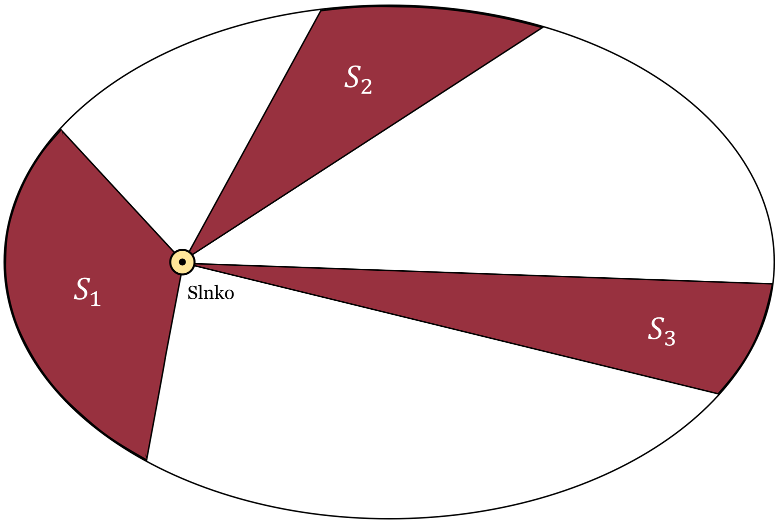
Plošná rýchlosť $\boldsymbol{w}$ je miera prírastku plochy za jednotku času. V našom kontexte to je plocha opísaná sprievodičom za 1 s. Druhý Keplerov zákon vieme naformulovať nasledovne: ***Plošná rýchlosť sprievodiča je konštanta***[4]. To znamená, že w vieme spočítať z celého obehu planéty okolo Slnka ako podiel periódy obehu P a celkovej opísanej plochy $S_{\circ}$.

$$w = \frac{S_{\circ}}{P} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}\,, \tag{2.6}$$

kde sme využili vzorec na výpočet malej poloosy (2.2).

[3] Na druhú stranu, obvod elipsy je analyticky nespočítateľný.

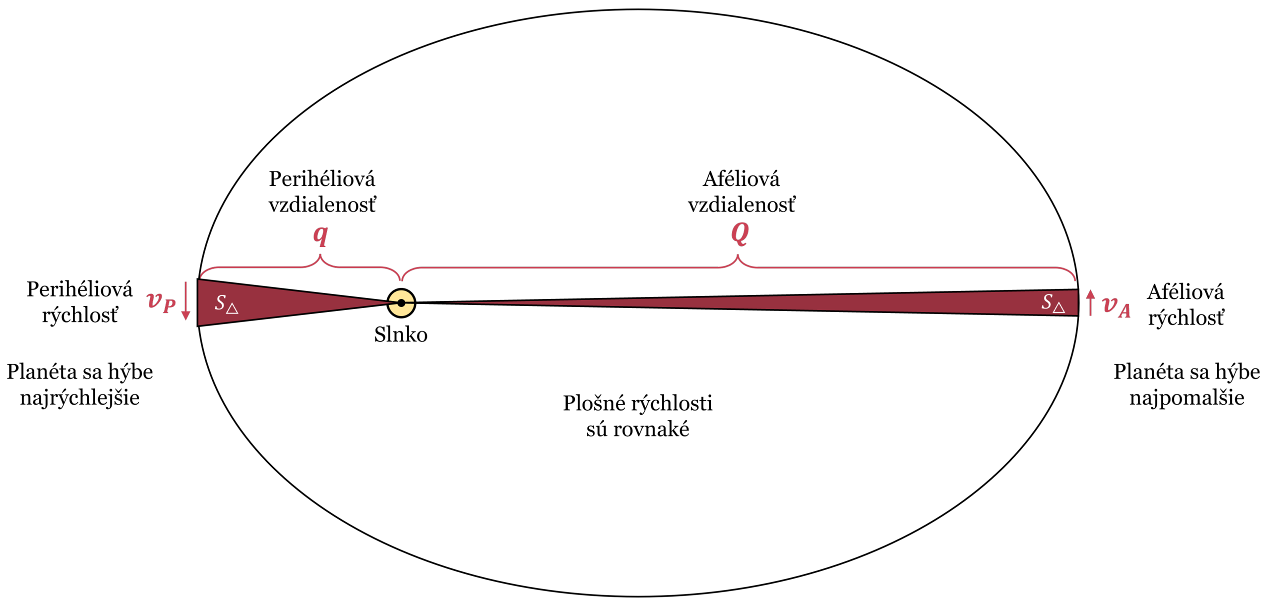
[4] To je priamym dôsledkom zákonu zachovania hybnosti, ktorému sa budeme venovať v kapitole 13.



Obr. 2.3: Grafické znázornenie 2. Keplerovho zákona.
Platí: $S_1 = S_2 = S_3$.

• • •

Preskúmajme 2. Keplerov zákon v blízkosti perihélia a afélia. Pohyb planéty tu je kolmý na sprievodič. Za krátky čas (1 s) sprievodič opíše úzky trojuholník s plochou $S_\triangle$, viď. obr. 2.4.



Obr. 2.4: Pohyb planéty v blízkosti perihélia a afélia

Planéta počas jednej sekundy prejde vzdialenosť $s = v \cdot 1\,\mathrm{s}$. Plošná rýchlosť je prírastok plochy za 1 s. Touto plochou je trojuholník, ktorého obsah vyrátame ako polovicu zo súčinu základne a výšky. Základňa je dráha planéty s, a výška je dĺžka sprievodiča r. Teda

$$w = \frac{S_\triangle}{1\,\mathrm{s}} = \frac{\frac{1}{2}sr}{1\,\mathrm{s}} = \frac{\frac{1}{2}v \cdot 1\,\mathrm{s} \cdot r}{1\,\mathrm{s}} = \frac{1}{2}vr\,. \tag{2.7}$$

Dosadením perihélia P $(r = q)$ a afélia A $(r = Q)$ do (2.7) získavame dvojicu vzťahov

$$w_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{P}} q \quad ; \quad w_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{A}} Q \, . \tag{2.8}$$

Avšak spomeňme si na 2. Keplerov zákon: Plošné rýchlosti sú konštantné! To znamená, že $w_{\mathrm{P}} = w_{\mathrm{A}}$ a po zjednotení vzťahov (2.8) máme

$$v_{\mathrm{P}} q = v_{\mathrm{A}} Q \, .$$

Dosadením (2.3) a (2.4) dostávame

$$\boxed{\frac{v_{\mathrm{P}}}{v_{\mathrm{A}}} = \frac{Q}{q} = \frac{1+e}{1-e}} \, . \tag{2.9}$$

Tento vzťah sa pamätá jednoducho tak, že vždy je v čitateli väčšia rýchlosť/vzdialenosť/a číslo väčšie ako 1, respektíve v menovateli je zas menšia rýchlosť/vzdialenosť/a číslo menšie ako 1.

• • •

3. Keplerov zákon (o perióde obehu) - jednoduchá verzia (KZ-3j)

Druhá mocnina periódy obehu planéty P v rokoch je rovná tretej mocnine veľkej poloosi jej dráhy a v astronomických jednotkách.

$$P^2 = a^3 \quad ; \quad [P] = \mathrm{rok}, [a] = \mathrm{au} \tag{2.10}$$

Kepler zistil, že v Slnečnej sústave zostáva pomer tretej mocniny hlavnej poloosi a druhej mocniny obežnej doby konštantný.

$$\boxed{\frac{a^3}{P^2} = \textbf{konštanta}} \, . \tag{2.11}$$

Zvolením prirodzených jednotiek pre Zem, čo sú au (veľkosť veľkej poloosi zemskej dráhy $a_{\oplus}$) a roky (dĺžka obežnej periódy Zeme $P_{\oplus}$), dostávame tvar (2.10), keďže po dosadení $a_{\oplus}, P_{\oplus}$ do (2.11) vychádza konštanta = 1. V nasledujúcej kapitole si ukážeme ako spočítať hodnotu tejto konštanty všeobecne pre ľubovoľnú sústavu.

• • •

Na záver zaujímavosť. Ak by ste si chceli narysovať elipsu, tak do papiera na podložke zapichnite 2 špendlíky (ako ohniská). Ďalej zaviažete nitku do kruhu, zoberte ceruzku a natiahnite nitku medzi špendlíky a ceruzku. Priložte ceruzku na papier a postupne ňou ťahajte čiaru, tak aby nitka ostávala celý čas napnutá. To zabezpečí rovnaký súčet vzdialeností ceruzky od špendlíkov. Vzdialenosť medzi špendlíkmi určuje excentricitu výslednej elipsy. Ak by sme špendlíky zapichli do rovnakého bodu, tak by vznikla kružnica (elipsa s excentricitou nula).

2.1 Príklady

2.1.1 Obeh Neptúna

Neptún obehne okolo Slnka za 165 rokov. Ako ďaleko od Slnka sa nachádza? Akou obehovou rýchlosťou sa pohybuje? Predpokladajte, že Neptún obieha po kruhovej dráhe.

2.1.2 Kométa z Oortovho oblaku (IOAA 2011 - T01)

Väčšina neperiodických komét prichádza ku Slnku priamo z Oortovho oblaku. Určite ako dlho trvá kométe kým prejde túto cestu. Predpokladajte, že kométa začína 35 000 au od Slnka, kedy je v aféliu.

2.1.3 Planétka Hermes (ZAVP - 80)

Planétka Hermes sa pohybuje okolo Slnka po dráhe s veľkou poloosou $a = 1{,}29\,\mathrm{au}$, a excentricitou $e = 0{,}475$. Určte:

(a) obežnú dobu P.

(b) perihéliovú vzdialenosť q, aféliovú vzdialenosť Q.

(c) dĺžku malej poloosi b.

2.1.4 Honda-Mrkos-Pajdušáková (ZAVP - 76)

Obehová rýchlosť kométy Honda-Mrkos-Pajdušáková je v aféliu 10-krát menšia ako v perihéliu. Aká je excentricita jej dráhy?

2.1.5 Výsledky

Obeh Neptúna

Neptún je 30,1 au od Slnka a pohybuje sa rýchlosťou $1{,}15\,\mathrm{au\,rok^{-1}} = 5{,}43\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Kométa z Oortovho oblaku

Kométe to bude trvať 1,2 milióna rokov.

Planétka Hermes

(a) $P \doteq 1{,}47\,\mathrm{rokov} \doteq 535\,\mathrm{dní}$

(b) $q \doteq 0{,}677\,\mathrm{au}$, $Q \doteq 1{,}90\,\mathrm{au}$

(c) $b \doteq 1{,}14\,\mathrm{au}$

Honda-Mrkos-Pajdušáková

Excentricita je 0,82.

Kapitola 3

Gravitácia

https://youtu.be/PbBg9JOR35U

Koncom 17.-teho storočia formuloval Isaac Newton svoju predstavu gravitácie:

Newtonov gravitačný zákon (NGZ)

Medzi každými dvoma hmotnými telesami pôsobí gravitačná sila $\overrightarrow{F_\mathrm{G}}$, ktorá ich priťahuje k sebe. Jej veľkosť je rovnaká pre prvé aj druhé teleso a to konkrétne

$$F_\mathrm{G} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,, \tag{3.1}$$

kde r je vzdialenosť medzi telesami, $m_{1,2}$ sú hmotnosti telies a $G = 6{,}674\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ je gravitačná konštanta (ktorá škáluje silu do jednotiek SI).

Všimnime si, že pri výpočte gravitačnej sily vzorcom (3.1) delíme r^2. To znamená, že ***gravitačná sila klesá so štvorcom vzdialenosti***. Ak posunieme telesá od seba dvakrát ďalej, sila klesne štyrikrát. Ak trikrát ďalej, tak klesne deväťkrát, atď.. Pre $r \to \infty$ klesá F_G do nuly.

Pôsobenie ľubovoľnej sily F sa prejavuje urýchľovaním objektu zrýchlením $\vec{a}$ podľa druhého Newtonovho zákona

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}\,. \tag{3.2}$$

To znamená, že ťažšie teleso sa urýchľuje menej. Napríklad, ak vyskočíte, tak Zem na vás, a vy na Zem pôsobíte rovnakou gravitačnou silou, avšak hmotnosť Zeme je oveľa vyššia ako vaša, čo znamená, že urýchľovanie Zeme ku vám je zanedbateľné. Preto ak máme sústavu zloženú z ťažkého telesa o hmotnosti M a ľahkého telesa o hmotnosti m, a platí $M \gg m$, tak môžeme uvažovať, že centrálne ťažké teleso sa nehýbe. Platí to pre sústavy ako Slnko – Zem, Zem – satelit, galaxia – hviezda, a podobne.

Gravitačná sila je slabá, pretože G je veľmi malé číslo. Na to aby boli pozorovateľné jej účinky, potrebujeme veľmi hmotné telesá ako planéty a hviezdy. Gravitačné pôsobenie bežných pozemských objektov navzájom na seba je zanedbateľné. Napríklad dvaja ľudia o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{kg}$ vo vzdialenosti $r = 1\,\mathrm{m}$ sa priťahujú silou F_G približne[1] $4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$. Využitím vzťahu (3.2) vieme spočítať zrýchlenie ktorým sa ku sebe pohybujú[2].

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G\frac{mm}{r^2}}{m} = G\frac{m}{r^2} \doteq 5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,,\text{čo je vskutku zanedbateľné.}$$

[1]Závisí to ešte aj na výzore.

[2]Pre rozšírenie, hmotnosť vo vzťahu (3.1) nazývame gravitačnou a hmotnosť vo vzťahu (3.2) nazývame zotrvačnou. Tieto dve hmotnosti si sú rovné, ak platí silný princíp ekvivalnecie, ktorý sa zdá, že platí.

Podobne vieme spočítať gravitačné zrýchlenie a_G na povrchu (rovníku) Zeme. Zoberieme si testovacie teleso o arbitrárnej hmotnosti m, ktorá je zanedbateľná voči hmotnosti Zeme $M_\oplus = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Keďže sa teleso nachádza mimo Zeme, tak gravitácia Zeme je rovnaká ako gravitácia hmotného bodu s hmotnosťou Zeme umiestneného v strede Zeme. To je dôsledok **Gaussovho zákona**, ktorému sa budeme venovať v kapitole 23. Preto je vzdialenosť telesa od Zeme rovná (rovníkovému) polomeru Zeme[3], $r = R_\oplus = 6378\,\mathrm{km}$.

$$a_\mathrm{G} = \frac{F_\mathrm{G}}{m} = \frac{G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2}}{m} = G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} \doteq 9{,}80\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Zem však navyše rotuje okolo osi. To znamená, že na telesá na jej povrchu pôsobí zdanlivá **odstredivá sila** $\boldsymbol{F}_\mathrm{O}$, ktorú všeobecne spočítame ako

$$\boxed{\boldsymbol{F}_\mathrm{O} = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{r}}}\,, \tag{3.3}$$

kde v je rýchlosť a r polomer krivosti. Polomer krivosti pre kruhovú dráhu je klasický polomer kruhu. Pre dráhu eliptickú to je zložitejšie, avšak v perihéliu a aféliu sú to priamo perihéliová vzdialenosť q a aféliová vzdialenosť Q.

Uvažujme, že Zem je guľa a testovacie teleso sa nachádza na rovníku. Potom $r = R_\oplus$, rýchlosť je podiel obvodu Zeme a času rotácie, $v = 2\pi R_\oplus / t_\mathrm{sid}$, a odstredivé zrýchlenie má veľkosť

$$a_\mathrm{O} = \frac{F_\mathrm{O}}{m} = \frac{\frac{m(2\pi R_\oplus/t_\mathrm{sid})^2}{R_\oplus}}{m} = 4\pi^2\frac{R_\oplus}{t_\mathrm{sid}^2} \doteq 0{,}03\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Výsledné zrýchlenie, ktoré pôsobí na teleso na povrchu (rovníku) Zeme je rovné rozdielu gravitačného a odstredivého. Nazývame ho **tiažové zrýchlenie** $\boldsymbol{g}$.

$$\boxed{g = a_\mathrm{G} - a_\mathrm{O} \doteq 9{,}77\,\mathrm{m\,s^{-2}}}\ \text{(na rovníku)}.$$

3.1 3. Keplerov zákon podrobnejšie

Uvažujme systém kde sa centrálne teleso o hmotnosti M nehýbe, a okolo neho obieha menšie teleso o hmotnosti m, platí $M \gg m$. Vzdialenosť telies bude konštantne rovná veľkej poloosi a, dráhu uvažujme ako kruhovú. Dôležité je si uvedomiť, čo by sme pociťovali keby sme boli na menšom telese, napríklad Zemi. Vnímame iba priťahovanie ku Zemi, nie je žiadny rozdiel gravitácie v noci a cez deň[4]. Ak by zrazu zmizla Zem a ocitli by sme sa sami na dráhe okolo Slnka, tak by sme boli v stave beztiaže. To znamená, že výslednica síl pôsobiacich na nás je nula, teda sa ***vyrovná pôsobenie gravitačnej a odstredivej sily***,

$$\boxed{\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = \boldsymbol{F}_\mathrm{O}}\,. \tag{3.4}$$

Tento vzťah platí iba na kruhovej dráhe. Na elipse nie, pretože sa urýchľujeme pozdĺž dráhy.

[3] Zem je sploštená, jej polárny polomer je 6357 km, a polomer je 6371 km.

[4] Úplne presne by to platilo, ak by Zem bola bodový objekt, ináč tam predsa len malé rozdiely sú.

Vzťah (3.4) je dôležitý poznatok z ktorého výdeme pri odvodení. Začneme dosadením (3.1) a (3.3), pričom $m_1 = M$, $m_2 = m$, $r = a$.

$$G\frac{Mm}{a^2} = \frac{mv^2}{a} \,.$$

Za rýchlosť dosadíme $v = 2\pi a/P$, kde P je perióda obehu, a upravíme

$$\begin{aligned} G\frac{Mm}{a^2} &= \frac{m(2\pi a/P)^2}{a} \,, \\ G\frac{M}{a^2} &= \frac{4\pi^2 a^2}{aP^2} \,, \\ \boxed{\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2} \quad ; \quad M \gg m} \,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

V (2.11) dostávame hodnotu konštanty rovnú $\frac{GM}{4\pi^2}$. Jej hodnota teda závisí na hmotnosti centrálneho telesa. Napríklad pre Slnko o hmotnosti $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ dostávame konštantu rovnú približne $3 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$. Dá sa ukázať že tvar (3.5) ***vyjde rovnako aj pre eliptickú dráhu*** (čo je však nad rámec kurzu).

• • •

Spomeňme si teraz na to ako sme v predchádzajúcej kapitole počítali pomer rýchlostí v perihéliu a aféliu (obr. 2.4) za pomoci malých trojuholníčkov. Čo ak by sme chceli spočítať konkrétne rýchlosti, nie len ich pomer? Ide to ak spojíme vzťahy (2.8) a (2.6) (vďaka tomu, že w je konštanta, teda $w = w_\mathrm{P} = w_\mathrm{A}$). Pre perihélium dostávame

$$\frac{1}{2}v_\mathrm{P} q = w_\mathrm{P} = w = \frac{S_{\bigcirc}}{P} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P} \,, \tag{3.6}$$

z čoho vyjadríme v_P, dosadíme q z (2.3) a skrátime a

$$v_\mathrm{P} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{qP} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{a(1-e)P} = \frac{2\pi a\sqrt{1-e^2}}{(1-e)P} \,.$$

Rovnicu umocníme na druhú,

$$v_\mathrm{P}^2 = \frac{4\pi^2 a^2(1-e^2)}{(1-e)^2P^2} \,.$$

Úpravou $1 - e^2 = (1-e)(1+e)$ a krátením dostávame

$$v_\mathrm{P}^2 = \frac{4\pi^2 a^2(1-e)(1+e)}{(1-e)(1-e)P^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e} \,. \tag{3.7}$$

Teraz použijeme novú odvodenú formu 3. Keplerovho zákona (3.5) a dosadíme

$$\frac{1}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2 a^3} \,,$$

čo nám po dosadení do (3.7) dá

$$v_\mathrm{P}^2 = 4\pi^2 a^2 \frac{GM}{4\pi^2 a^3} \cdot \frac{1+e}{1-e} \,.$$

Nakoniec po finálnej úprave

$$\boxed{v_\mathrm{P}^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}}\,. \tag{3.8}$$

Analogickým odvodením, alebo aplikovaním (2.9) na (3.8) dostávame vzťah pre afélium

$$\boxed{v_\mathrm{A}^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}}\,. \tag{3.9}$$

Pre Zem a Slnko ($e = 0{,}0167$) vychádza $v_\mathrm{P} = 30{,}3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ a $v_\mathrm{P} = 29{,}3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Vidíme, že vzťahy (3.8) a (3.9) sú podobné. Zopár šikovnými úpravami ich vieme prepísať do takmer identického tvaru:

$$v_\mathrm{P}^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e} = GM\frac{1+e}{q} = GM\frac{2-(1-e)}{q} = GM\left(\frac{2}{q} - \frac{1-e}{q}\right) = GM\left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a}\right)\,,$$

$$v_\mathrm{A}^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e} = GM\frac{1-e}{Q} = GM\frac{2-(1+e)}{Q} = GM\left(\frac{2}{Q} - \frac{1+e}{Q}\right) = GM\left(\frac{2}{Q} - \frac{1}{a}\right)\,.$$

Jediný rozdiel je v tom či je v zátvorke pod zlomkovou čiarou q alebo Q. Avšak to je aktuálna vzdialenosť pre danú rýchlosť! Pri výpočte rýchlosti v perihéliu v_P sa nám vo finálnom vzorčeku objaví perihéliová vzdialenosť q a pre výpočet v_A sa zas objaví vzdialenosť Q! Je možné ukázať, že toto sa dá zobecniť pre ľubovoľné miesto na eliptickej dráhe a vo vzorčeku sa vyskytne aktuálna vzdialenosť r od centrálneho telesa.

Vis-viva (Vv)

Obiehajúce teleso zanedbateľnej hmotnosti m voči centrálnemu telesu o hmotnosti M sa pohybuje po eliptickej dráhe s veľkou poloosou a tak, že vo vzdialenosti r od centrálneho telesa má rýchlosť v splňujúcu vzťah

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad ; \quad M \gg m\,, \tag{3.10}$$

Vis-viva je veľmi silný nástroj pri výpočte príkladov a ešte ju určite využijeme.

3.2 Príklady

3.2.1 Gravitačná konštanta a zrýchlenie (ZAVP - 117)

Určte hodnotu gravitačnej konštanty G v jednotkách SI. Hmotnosť Zeme je $M_\oplus = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, jej (priemerný) polomer $R_\oplus = 6{,}38 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ a gravitačné zrýchlenie na povrchu $a_\mathrm{G} = 9{,}80\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

3.2.2 Váha na Jupiteri

Koľko by ukázala váha kalibrovaná na Zemi, ak by sa na Jupiteri na ňu postavil človek o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{kg}$? Jupiter sa otočí okolo osi za dobu $T_♃ = 9\,\mathrm{h}\ 50\,\mathrm{min}$, jeho polomer je $R_♃ = 6{,}99 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$ a hmotnosť $M_♃ = 1{,}90 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$. Tiažové zrýchlenie na Zemi je $g = 9{,}77\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

3.2.3 1. kozmická rýchlosť (ZAVP - 118)

Vypočítajte prvú kozmickú rýchlosť, čo je rýchlosť ktorou sa musí pohybovať umelá družica Zeme, aby obiehala na kruhovej dráhe tesne nad povrchom Zeme (na rovníku). Určte obežnú dobu družice. Rovníkový polomer Zeme je $R_\oplus = 6378\,\mathrm{km}$ a jej hmotnosť $M_\oplus = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

3.2.4 Honda-Mrkos-Pajdušáková sa vracia

Kométa Honda-Mrkos-Pajdušáková obieha okolo Slnka po dráhe s veľkou poloosou $a = 3{,}0\,\mathrm{au}$ a excentricitou $e = 0{,}82$. Vypočítajte jej rýchlosť v perihéliu v_P a aféliu v_A. Overte platnosť vzťahu

$$\frac{v_\mathrm{P}}{v_\mathrm{A}} = \frac{1+e}{1-e}\,.$$

3.2.5 Výsledky

Gravitačná konštanta a zrýchlenie

$G \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$.

Váha na Jupiteri

Váha by ukázala 194 kg.

1. kozmická rýchlosť

Prvá kozmická rýchlosť je $7{,}906\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Honda-Mrkos-Pajdušáková sa vracia

$v_\mathrm{P} \doteq 55\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad ; \quad v_\mathrm{A} \doteq 5{,}4\,\mathrm{km/s}$.

Vzťah overíme dosadením do ľavej (Ľ) a pravej (P) strany:

$$\text{Ľ} = \frac{v_\mathrm{P}}{v_\mathrm{A}} \doteq 10\,,$$
$$\mathrm{P} = \frac{1+e}{1-e} \doteq 10\,,$$

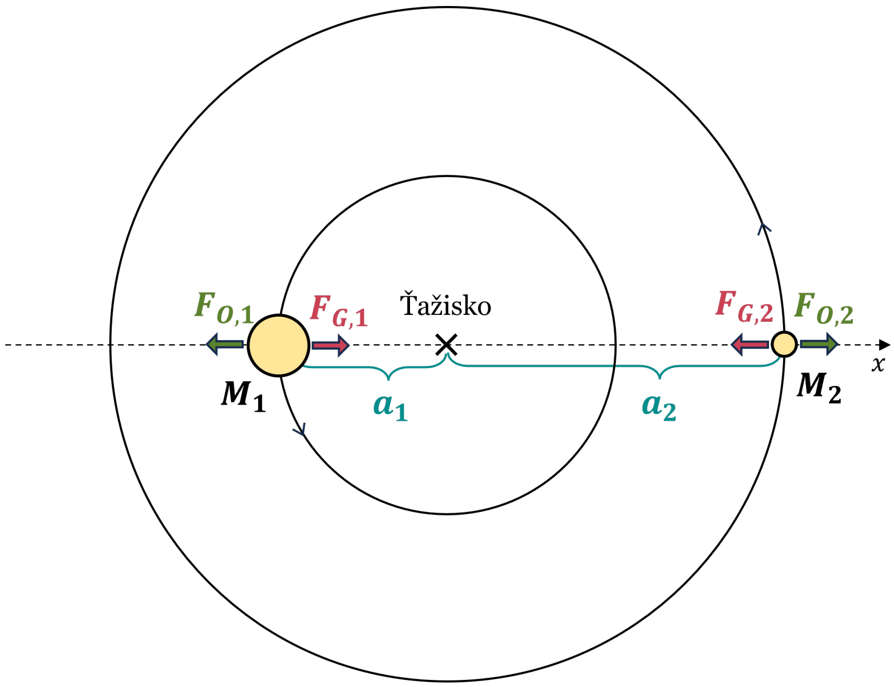
teda Ľ = P, čo potvrdzuje platnosť vzťahu pre pomer rýchlosti v perihéliu a aféliu.

Kapitola 4

Dvojhviezda

https://youtu.be/BGAJXkJYiAw

Doteraz sme počítali v aproximácii $M \gg m$, kedy je centrálne teleso nehybné. Ak sú však hmotnosti telies rádovo podobné, musíme uvažovať realistickejší prípad, kedy obe obiehajú telesá okolo spoločného **ťažiska**[1] medzi nimi. Pre jednoduchosť predpokladajme kruhové dráhy. Situácia je zobrazená na obr. 4.1.



Obr. 4.1: Schéma obehu dvojhviezdy

Poloha ťažiska $\vec{r_T}$, pre n hmotných bodov o hmotnostiach $m_1, \ldots, m_n$, je definovaná ako priemer polôh bodov $\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}$ vážený podľa hmotností

$$\vec{r_T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} . \tag{4.1}$$

V jednorozmernom prípade (v súradnici x) pre 2 hviezdy[2] o hmotnosti M_1 a M_2 dostávame

$$x_T = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} . \tag{4.2}$$

[1] V astronómii často používame označenie **barycentrum**.

[2] Keďže ide o sféricky symetrické objekty, môžeme ich nahradiť hmotnými bodmi v ich strede.

Ak sa presunieme do sústavy, ktorá má počiatok v ťažisku (takzvaná ťažisková sústava), tak na základe obr. 4.1 vidíme, že

$$x_\mathrm{T} = 0 \quad ; \quad x_1 = -a_1 \quad ; \quad x_2 = a_2 \,,$$

kde a_1, a_2 sú veľké poloosy (polomery) dráh zložiek dvojhviezdy. Dosadením do (4.2)

$$0 = \frac{-M_1 a_1 + M_2 a_2}{M_1 + M_2}$$

a úpravou dostávame dôležitý vzťah

$$\boxed{\boldsymbol{M_1 a_1 = M_2 a_2}}\,, \tag{4.3}$$

ktorý zvyknem nazývať *hojdačka*[3]. Dá sa ukázať, že to ***platí rovnako aj pre eliptické dráhy***, čo je však nad rámec tohto kurzu.

Prečo však hviezdy obiehajú práve okolo ťažiska? Dôležité je si pripomenúť Newtonov gravitačný zákon (NGZ), ktorý hovorí, že na obe hviezdy pôsobí rovnaká gravitačná sila ($F_{\mathrm{G},1} = F_{\mathrm{G},2}$). Zároveň sú obe na kruhových dráhach (schéma na obr. 4.1), čo znamená, že platí rovnosť gravitačnej a odstredivej sily pre obe hviezdy ($F_{\mathrm{G},1} = F_{\mathrm{O},1}$; $F_{\mathrm{G},2} = F_{\mathrm{O},2}$). Z toho však vyplýva že platí rovnosť odstredivej sily pôsobiacej na hviezdu 1 (vľavo) a na hviezdu 2 (vpravo)

$$F_{\mathrm{O},1} = F_{\mathrm{O},2} \,.$$

Dosadením vzťahu pre odstredivú silu (3.3) dostávame

$$\frac{M_1 v_1^2}{a_1} = \frac{M_2 v_2^2}{a_2} \,. \tag{4.4}$$

Rýchlosť hviezdy spočítame ako podiel dĺžky jej dráhy (obvod kruhu) a periódy obehu P_1, P_2,

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P_1} \quad ; \quad v_2 = \frac{2\pi a_2}{P_2} \,.$$

Rýchlosti dosadíme do (4.4), uvedomíme si, že $\boldsymbol{P_1 = P_2}$, a periódu označíme jednotne P.

$$\frac{M_1 (2\pi a_1/P)^2}{a_1} = \frac{M_2 (2\pi a_2/P)^2}{a_2} \,,$$

čo po umocnení zátvoriek a krátení

$$\frac{M_1 \cdot 4\pi^2 a_1^2}{a_1 P^2} = \frac{M_2 \cdot 4\pi^2 a_2^2}{a_2 P^2} \quad \Rightarrow \quad M_1 a_1 = M_2 a_2$$

dáva práve vzťah (4.3) vychádzajúci z definície ťažiska.

[3] Je to preto, lebo členy $M_1 a_1$ a $M_2 a_2$ predstavujú momenty síl, ktoré preklápajú hojdačku protichodnými smermi. Ak sú rovnaké, hojdačka je v rovnováhe. Preto si musí rodič sadnúť bližšie ku stredu, aby sa mohol hojdať s dieťaťom. Rovnako to funguje s hviezdami. Tá ťažšia „sedí“ bližšie ku ťažisku a ľahšia ďalej.

4.1 A opäť 3. Keplerov zákon

Napíšme si rovnosti gravitačných a odstredivých síl pre obe hviezdy v sústave na obr. 4.1

$$F_{\mathrm{G},1} = F_{\mathrm{O},1} \quad ; \quad F_{\mathrm{G},2} = F_{\mathrm{O},2} \,.$$

Po dosadení (3.1) a (3.3) (vzdialenosť hviezd je $r = a_1 + a_2$)

$$G\frac{M_1 M_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{M_1 v_1^2}{a_1} \quad ; \quad G\frac{M_1 M_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{M_2 v_2^2}{a_2} \,.$$

Za rýchlosti dosadíme analogicky ako predtým

$$G\frac{M_1 M_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{M_1 (2\pi a_1/P)^2}{a_1} \quad ; \quad G\frac{M_1 M_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{M_2 (2\pi a_2/P)^2}{a_2} \,.$$

Po úprave

$$G\frac{M_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_1}{P^2} \quad ; \quad G\frac{M_1}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_2}{P^2} \,.$$

Teraz tieto 2 rovnice sčítame dokopy (teda ľavú stranu s ľavou a pravú s pravou, aby sme dostali jednu rovnicu) a upravíme

$$G\frac{M_2}{(a_1+a_2)^2} + G\frac{M_1}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_1}{P^2} + \frac{4\pi^2 a_2}{P^2} \,,$$

$$G\frac{M_1+M_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2}{P^2}(a_1+a_2) \,,$$

$$\boxed{\frac{G}{4\pi^2}(M_1+M_2) = \frac{(a_1+a_2)^3}{P^2}} \,,$$

čím sme odvodili plnú formu 3. Keplerovho zákona! Opäť, vzťah ***platí aj pre eliptické dráhy***.

3. Keplerov zákon (o perióde obehu) - plná verzia (KZ-3p)

V sústave dvoch gravitačne viazaných telies platí

$$\frac{(a_1+a_2)^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}\left(M_1+M_2\right) \,, \tag{4.5}$$

kde a_1, a_2 sú veľké poloosy dráh, M_1, M_2 hmotnosti zložiek a P spoločná perióda obehu.

Výraz $G(M_1 + M_2)$ voláme **štandardný gravitačný parameter**. Takisto ho dáva zmysel definovať pre jedno teleso (GM), ak vyšetrujeme obeh druhého telesa so zanedbateľnou hmotnosťou. Zavádzame ho z praktického dôvodu, pretože z pozorovaní nevieme merať priamo hmotnosti a G, ale meriame práve tento parameter. Preto ho poznáme s vyššou presnosťou. Napríklad gravitačný parameter Slnka je

$$GM_\odot = 1{,}327\,124\,400\,42 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}} \,,$$

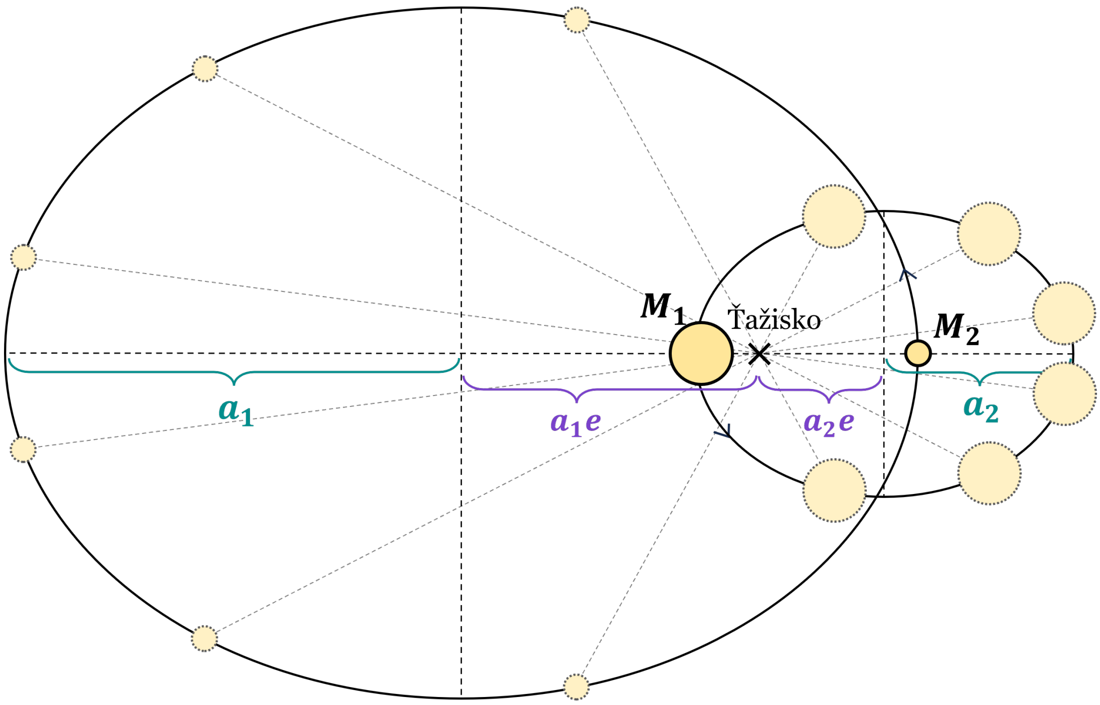
pričom jeho hmotnosť vieme s presnosťou o 7 rádov menšou!

4.2 Eliptické dráhy

V obecnom prípade hviezdy okolo seba obiehajú na eliptických dráhach s veľkými poloosami a_1, a_2 a ***rovnakou excentricitou***. To vyplýva, zo symetrie obehov, ktorá je znázornená na schéme 4.2. Spojnica hviezd vždy prechádza ťažiskom, ktoré ostáva nehybne ohniskom pre obe elipsy. Pomer vzdialeností ku hviezdam od ťažiska (r_1, r_2) sa musí zachovať, kvôli hojdačke

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_1}{M_2}\,.$$

To znamená, že obe elipsy majú rovnaký tvar len sú naškálované na inú veľkosť pomocou dĺžky veľkej poloosi. Keďže však tvar (sploštenosť) elipsy popisuje excentricita e, a tvar sa zachováva, tak obe dráhy musia mať rovnaké e.

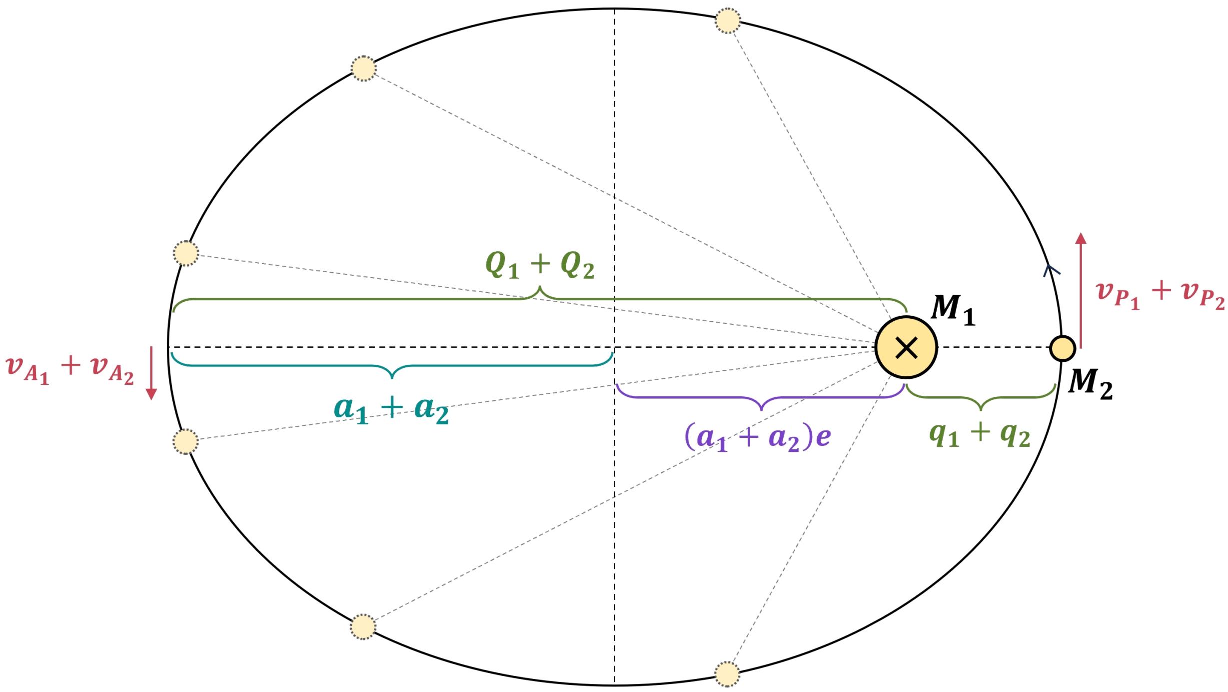


Obr. 4.2: Eliptické dráhy dvojhviezdy

Ak by sme boli na ťažšej hviezde, ktorá je bližšie ku ťažisku, javilo by sa nám, že menšia hviezda okolo nás obieha po eliptickej dráhe s opäť rovnakou excentricitou e a veľkou poloosou rovnou súčtu veľkých poloos $a_1 + a_2$. Túto dráhu voláme **relatívna dráha**.

Situácia je zobrazená na obr. 4.3. Zároveň tam sú vyznačené relatívne **apsidy**. Periapsida je bod najväčšieho priblíženia, označená ako $q_1 + q_2$ (súčet periapsíd v ťažiskovej sústave na obr. 4.2). Apoapsida je bod najväčšieho priblíženia, označená ako $Q_1 + Q_2$ (súčet apoapsíd v ťažiskovej sústave na obr. 4.2).

V apsidách je relatívna rýchlosť rovná súčtu rýchlostí hviezd, čo je takisto znázornené na obr. 4.3. Mimo apsíd, je situácia zložitejšia, pretože vektory rýchlostí nie sú protichodné, ale zvierajú obecný uhol. Avšak ukážeme si, že platí obdoba veľmi užitočnej rovnice Vis-Viva (Vv) aj pre dvojhviezdny systém.



Obr. 4.3: Relatívna dráha dvojhviezdy

• • •

Periódu obehu dvojhviezdy popisuje plná verzia 3. Keplerového zákona (KZ-3p), ktorý si aj mierne predpripravíme na neskorší krok

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}\big(M_1 + M_2\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}\,. \tag{4.6}$$

Spomeňme si na „odvodenie“ Vis-vivy v predchádzajúcej kapitole, ktoré začalo ešte v kapitole 2. Celé to bolo založené na malinkých trojuholníkoch s rovnakými plochami na obr. 2.9. Avšak to sa dá aplikovať aj tu! ***Relatívny obeh hviezdy*** (obr. 4.3) ***spĺňa 2. Keplerov zákon!*** To znamená, že platí rovnica (3.7) pre rýchlosť v periapside

$$v_\mathrm{P}^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}\,,$$

kde v našom prípade dosadíme $a = a_1 + a_2$

$$v_\mathrm{P}^2 = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}\,.$$

Teraz dosadíme predpripravenú verziu 3. Keplerovho zákona (4.6)

$$v_\mathrm{P}^2 = 4\pi^2 (a_1 + a_2)^2 \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2(a_1 + a_2)^3} \cdot \frac{1+e}{1-e} = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1+e}{1-e}\,.$$

Analogický výpočet sa dá spraviť pre apoapsidu, takže

$$\boxed{v_\mathrm{P}^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1+e}{1-e} \quad ; \quad v_\mathrm{A}^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1-e}{1+e}}\,, \tag{4.7}$$

čo je veľmi podobné rovniciam (3.8) a (3.9). Podobnou sériou úprav ako v minulej kapitole vieme tieto rovnice previesť do tvaru

$$v_{\mathrm{P}}^2 = G(M_1+M_2)\left(\frac{2}{q_1+q_2} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) ,$$

$$v_{\mathrm{A}}^2 = G(M_1+M_2)\left(\frac{2}{Q_1+Q_2} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) .$$

Opäť vidíme, že tvary rovníc sú extrémne podobné. Pri výpočte relatívnej rýchlosti v periapside dostávame napravo v menovateli súčet periapsidových vzdialeností, a obdobne v druhej rovnici pre apoapsidum. Dá sa ukázať, že to platí pre obecnú *relatívnu* vzdialenosť $r = r_1 + r_2$ a *relatívnu* rýchlosť v.

$$\boxed{\boldsymbol{v^2 = G(M_1+M_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1+a_2}\right)}} , \tag{4.8}$$

čo je obdoba rovnice Vis-viva (Vv) pre dvojhviezdu.

• • •

Vydeľme rovnice v (4.7), získame

$$\frac{v_{\mathrm{P}}^2}{v_{\mathrm{A}}^2} = \frac{\frac{G(M_1+M_2)}{a_1+a_2}\cdot\frac{1+e}{1-e}}{\frac{G(M_1+M_2)}{a_1+a_2}\cdot\frac{1-e}{1+e}} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} .$$

Z toho vidíme, že opäť ako predtým v (2.9), tak aj pre dvojhviezdu platí

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{v_{\mathrm{P}}}{v_{\mathrm{A}}} = \frac{1+e}{1-e}}} . \tag{4.9}$$

• • •

2. Keplerov zákon platí nie len na relatívnej dráhe, ale aj na jednotlivých absolútnych dráhach oboch zložiek. Tie sú znázornené na obr. 4.2. Opäť vieme využiť rovnicu (3.7), a tentoraz si ju napísať pre obe zložky (všade hodíme index 1 alebo 2)

$$v_{\mathrm{P}_1}^2 = \frac{4\pi^2 a_1^2}{P^2}\cdot\frac{1+e}{1-e} \quad ; \quad v_{\mathrm{P}_2}^2 = \frac{4\pi^2 a_2^2}{P^2}\cdot\frac{1+e}{1-e} .$$

Dôležité je, že excentricita a perióda je rovnaká pre obe dráhy, čo je označené jednotne e a P. Delením týchto rovníc a využitím hojdačky (4.3) dostaneme

$$\frac{v_{\mathrm{P}_1}^2}{v_{\mathrm{P}_2}^2} = \frac{\frac{4\pi^2 a_1^2}{P^2}\cdot\frac{1+e}{1-e}}{\frac{4\pi^2 a_2^2}{P^2}\cdot\frac{1+e}{1-e}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2}$$

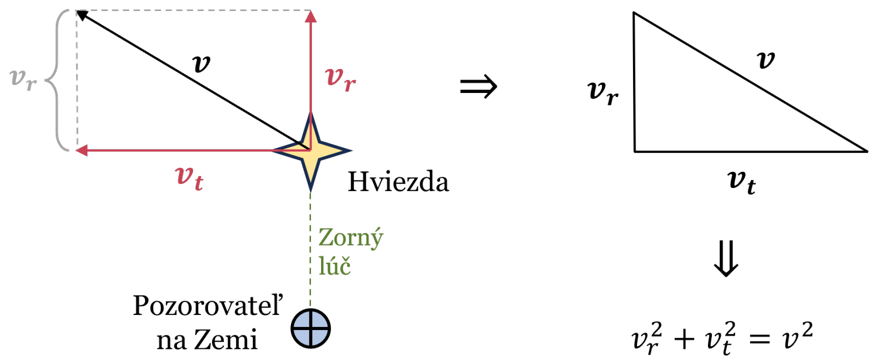
Odmocnením a spravením rovnakých krokov pre apoapsidu získavame finálny vzťah

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{v_{\mathrm{P}_1}}{v_{\mathrm{P}_2}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{v_{\mathrm{A}_1}}{v_{\mathrm{A}_2}}}} .$$

4.3 Radiálna a tangenciálna rýchlosť

Zorný lúč je spojnica našich očí a pozorovaného objektu. Rýchlosť meranú v tomto smere voláme **radiálna rýchlosť v_r**. Ak sa objekt pohybuje preč od nás, tak $v_r > 0$, ak sa zase pohybuje smerom ku nám, tak $v_r < 0$. Zložka rýchlosti meraná v rovine kolmej na zorný lúč sa nazýva **tangenciálna rýchlosť v_t**. Keďže v_r je kolmé na v_t, tak pre celkovú rýchlosť v platí Pytagorova veta (viď. obr. 4.4)

$$\boxed{v^2 = v_r^2 + v_t^2}. \tag{4.10}$$



Obr. 4.4: Radiálna a tangenciálna rýchlosť

Inklinácia i je sklon dráhy voči referenčnej rovine. Pri pozorovaní dvojhviezd a exoplanét je konvenciou referenčná rovina kolmá na zorný lúč. Teda ak je $i = 0°$, tak pozorujeme sústavu zhora, respektíve zdola, a vidíme pohyb iba v tangenciálnom smere. Ak je $i = 90°$, tak sústavu pozorujeme zboku, a pohyb vidíme iba v radiálnom smere.

Teda, $v_r = 0$ pre $i = 0°$, a $v_r = v$ pre $i = 90°$. Funkcia, ktorá je nulová pre 0° a jednotková v 90° je *sínus*. To znamená[4], že radiálna rýchlosť je voči celkovej škálovaná so sínusom inklinácie

$$\boxed{v_r = v \sin i}. \tag{4.11}$$

Pre tangenciálnu rýchlosť to je opačne, $v_t = v$ pre $i = 0°$, a $v_t = 0$ pre $i = 90°$. Tomu odpovedá funkcia *kosínus*, teda tangenciálna rýchlosť je voči celkovej škálovaná s kosínusom inklinácie

$$\boxed{v_t = v \cos i}. \tag{4.12}$$

• • •

V kontexte Slnečnej sústavy považujeme za referenčnú rovinu rovinu obehu Zeme. Planéty majú inklinácie blízke nule. V kontexte blízkozemského prostredia považujeme za referenčnú rovinu zemský rovník. Napríklad satelity na polárnom orbite majú $i = 90°$.

[4] Dá sa to ukázať aj rigoróznejšie, a to z pravouhlého trojuholníka na obr. 4.4. Potom uhol medzi stranou v_t a v bude i. Z definície sínusu dostávame uvedené vzťahy.

4.4 Príklady

4.4.1 Zem a Mesiac

Zem a Mesiac obiehajú okolo spoločného bodu (ťažiska), uvažujeme kruhové dráhy. Je tento bod mimo Zeme? Ako vysoko nad, respektíve ako hlboko pod povrchom Zeme sa nachádza? Hmotnosť Zeme je $M_\oplus = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnosť Mesiaca je $M_{☾} = 7{,}438 \cdot 10^{22}$ kg a vzdialenosť stredu Mesiaca od stredu Zeme (takzvaná *lunar distance*) je $d = 384\,400$ km a polomer Zeme je $R_\oplus = 6378$ km.

4.4.2 Alpha Centauri

Alpha Centauri je trojhviezdy systém. V jeho strede obiehajú okolo seba Alpha Centauri A a Alpha Centauri B s periódou $P = 79$ rokov. Ich hmotnosti sú $M_\mathrm{A} = 1{,}1\,M_\odot$ a $M_\mathrm{B} = 0{,}9\,M_\odot$, kde $M_\odot$ je hmotnosť Slnka. Okolo nich obieha tretia hviezda, Proxima Centauri (zložka C), ktorej hmotnosť je $M_\mathrm{C} = 0{,}12\,M_\odot$. Pri pohľade z ťažiska zložiek A a B sa javí, že C obieha na dráhe s veľkou poloosou $a_\mathrm{C+AB} = 8700$ au. Využite, že $a_\mathrm{C,AB} \gg a_\mathrm{A}, a_\mathrm{B}$.

Úlohy:

(a) Aká je priemerná vzdialenosť zložiek A a B, teda veľká poloos $a_\mathrm{A,B}$ ich relatívnej dráhy?

(b) Aké sú veľké poloosy jednotlivých dráh zložiek A a B?

(c) Ako dlho trvá obeh Proxime Centauri okolo centra dvojhviezdy?

Hint: Tento trojhviezdny systém sa dá rozložiť na 2 dvojzložkové systémy (A s B, a A+B s C).

4.4.3 Dvojhviezdny systém (AO 2017 SŠ DK - 4)

Vzdialenosť dvojhviezdy je 10 pc, najväčšia uhlová separácia zložiek je $7{,}0''$ a najmenšia je $1{,}0''$. Predpokladajme, že orbitálna perióda je 100 rokov a orbitálna rovina je kolmá k zornému lúču. Ak hlavná polos dráhy jednej zložky je rovná $a_1 = 3{,}0''$, určte hmotnosti obidvoch zložiek v jednotkách hmotnosti Slnka.

4.4.4 Radiálne rýchlosti (ZAVP - 247)

Na obr. 4.5 je znázornený priebeh radiálnych rýchlostí (v smere zorného lúča) zložiek (A, B) dvojhviezdy p Velorum. Predpokladajte, že zorný lúč leží v rovine obehu sústavy ($i = 90°$, teda ich pozorujeme „zboku“). Určte:

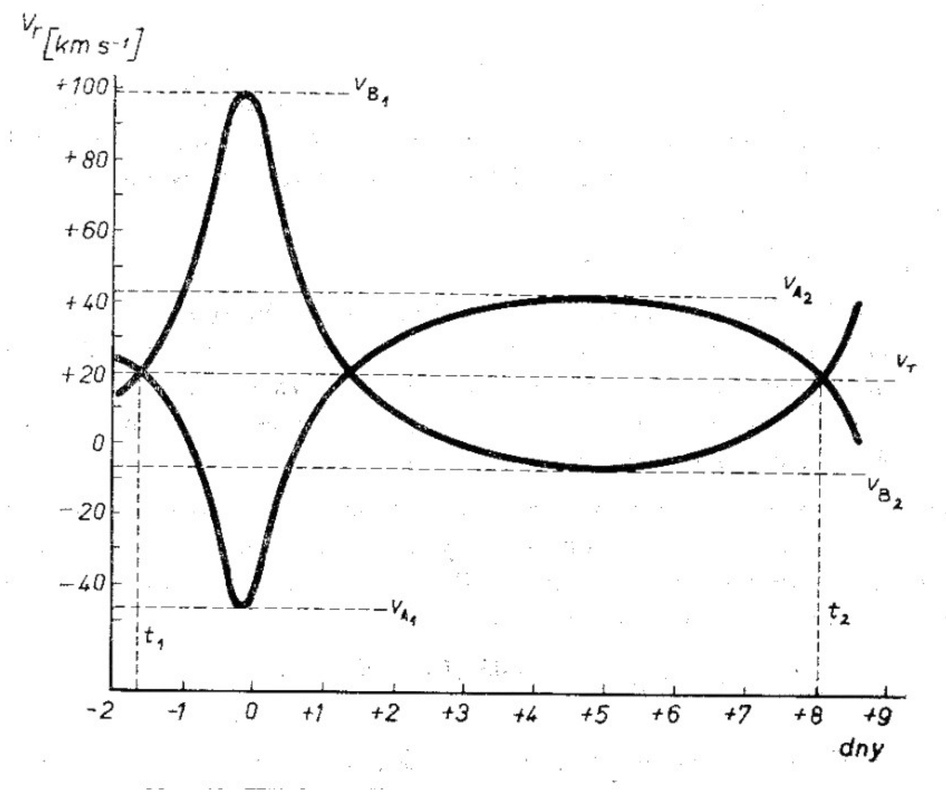
(a) obežnú dobu P,

(b) radiálnu rýchlosť ťažiska sústavy v_{T},

(c) orientáciu elitptických dráh vzhľadom na zorný lúč,

(d) excentricitu relatívnej dráhy a

(e) hmotnosti zložiek dvojhviezdy.



Obr. 4.5: Graf radiálnych rýchlostí zložiek dvojhviezdy p Velorum

4.4.5 Výsledky

Zem a Mesiac

Bod okolo ktorého obiehajú sa nachádza vnútri Zeme, konkrétne 1597 km pod povrchom.

Alpha Centauri

(a) $a_{\mathrm{A,B}} \doteq 23\,\mathrm{au}$.

(b) $a_{\mathrm{A}} \doteq 10\,\mathrm{au}$; $a_{\mathrm{B}} \doteq 13\,\mathrm{au}$.

(c) Obeh trvá $P_{\mathrm{C}} \doteq 560\,000\,\mathrm{rokov}$.

Dvojhviezdny systém

Hmotnosti hviezd sú 1,6 $M_{\odot}$ a 4,8 $M_{\odot}$.

Krivka radiálnych rýchlostí

(a) $P \doteq 9{,}7\,\mathrm{dní}$.

(b) $v_{\mathrm{T}} \doteq 20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

(c) Okolia miním a maxím krivky sú symetrické. To znamená, že priamka apsíd je kolmá na zorný lúč.

(d) Na základe pomeru rýchlostí v perihéliu a aféliu získavame $e \doteq 0{,}5$.

(e) Na základe tretieho Keplerovho zákona a pomeru rýchlostí zložiek dvojhviezdy dostávame $M_{\mathrm{A}} \doteq 0{,}33\,M_{\odot}$, $M_{\mathrm{B}} \doteq 0{,}27\,M_{\odot}$.

Kapitola 5

Pogsonova rovnica

https://youtu.be/LfIABNLh-Oo

Prejdime k odvetviu astrofyziky, ktoré nazývame **fotometria**. Budeme sa zaoberať skúmaním svetla vo viditeľnej oblasti, meraním jasnosti, a veličinami s tým spojenými. Klaudios Ptolemaios vydal katalóg nebeských telies (hlavne hviezd), kde boli objekty rozdelené do 6 kategórii podľa jasnosti. Určoval ich podľa toho, ktoré hviezdy sa zjavili večer ako prvé – tie boli kategória 1 – až po tie čo sa zjavili posledné – tie boli kategória 6. To znamená, že čím nižšie číslo kategórie, tým jasnejšia hviezda.

Tieto kategórie jasností hviezd nazývame **hviezdne veľkosti**. Toto označenie môže byť mierne mätúce, keďže hviezdna veľkosť nemá nič spoločné s reálnou veľkosťou hviezdy. Preto budeme používať alternatívne pomenovanie: **magnitúda**, namiesto hviezdna veľkosť[1]. V roku 1856 došlo ku matematickému upresneniu magnitúd Normanom Robertom Pogsonom. Základom je, že ***hviezda s magnitúdou o 5 menšou je 100-krát jasnejšia***. Ako prvé potrebujeme vedieť, čo znamená, že jedna hviezda je 100-krát jasnejšia.

Zdanlivý (svetelný) tok Φ je množstvo svetelnej energie[2], ktoré prejde $1\,\mathrm{m}^2$ za $1\,\mathrm{s}$, ak prihliadneme na citlivosť oka pre rôzne vlnové dĺžky[3]. Jednotkou je teda $\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}} = \mathrm{W\,m^{-2}}$. Zdanlivý (svetelný) tok popisuje jasnosti objektov (hviezd), tak ako ich vníma naše oko. Ak teda hovoríme, že hviezda 1 je 100-krát jasnejšia ako hvieda 2, tak to znamená, že pomer ich tokov je 100, matematicky zapísané: $\Phi_1/\Phi_2 = 100$.

Pogsonova rovnica (POG)

Relatívnu jasnosť hviezd v magnitúdach m_1, m_2 určiť na základe pomeru ich zdanlivých (svetelných) tokov Φ_1, Φ_2 ako

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right),$$

kde log je dekadický logaritmus[a].

[a] Pri výpočte $\log x$ sa pýtame na koľkú máme umocniť 10, aby sme dostali x. Teda $\log(100) = 2$ a $\log(1000) = 3$

[1] Avšak je to mierne problematické, pretože jednotkou hviezdnej veľkosti je takisto magnitúda, čo bude viesť ku vetám ako: „Magnitúda hviezdy je 5 magnitúd“, ale snáď to bude zrozumiteľné.

[2] Súčet energie fotónov, respektíve energia elektromagnetických kmitov.

[3] Tyčinky v oku, ktoré používame pri slabých svetelných podmienkach, sú najcitlivejšie v strede viditeľného svetla (zelená farba). Na okrajoch, pre červenú a fialovú farbu, je citlivosť najnižšia.

Platnosť rovnice (POG) si môžeme overiť z východzieho princípu: hviezda 1 s magnitúdou o 5 menšou ako hviezda 2 je 100-krát jasnejšia. Teda $m_1 - m_2 = -5$ (znamienko mínus vzniklo z toho, že $m_1 < m_2$) a $\Phi_1/\Phi_2 = 100$. Po dosadení

$$-5 = -2{,}5\ \log(100) = -2{,}5 \cdot 2 = -5 \quad \text{čo sedí.}$$

Analogicky dostávame, že hviezda s magnitúdou o 10 menšou je $100 \cdot 100 = 10\,000$-krát jasnejšia, s magnitúdou o 15 menšou je $100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6$-krát jasnejšia, atď.. Takisto však rovnicou (POG) získavame nástroj na spočítanie všetkých desatinných magnitúd medzi.

Zdanlivá magnitúda m [4] je veličina popisujúca jasnosť hviezdy tak ako ju vníma naše oko. Škála magnitúd je nastavená rovnicou (POG). Nulová magnitúda je definovaná pre zdanlivý (svetelný) tok $\Phi_0 = 2{,}518\,02 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, čo je približne tok prichádzajúci z hviezdy Vega. Potom sa (POG) mení na

$$m = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = -21{,}0026 - 2{,}5 \log(\Phi) \tag{5.1}$$

Existujú aj ďalšie typy astronomických magnitúd, preto používame prívlastok *zdanlivá*.

5.1 Magnitúda dvojhviezdy

Je dôležité si uvedomiť, že magnitúdy nemôžeme jednoducho sčítavať. Predstavme si, že máme dvojhviezdu, ktorej zložky nevieme rozoznať a javí sa nám ako jedna hviezda magnitúdy m. Ak sú magnitúdy zložiek m_1 a m_2 aká bude magnitúda m? Odpoveď nie je $m = m_1 + m_2$, kvôli logaritmickému správaniu škály magnitúd v rovnici (POG). Avšak, ***sčítavajú sa toky!***

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2\,, \tag{5.2}$$

kde Φ je tok celej dvojhviezdy. Magnitúda dvojhviezdy bude podľa (5.1)

$$m = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_0}\right). \tag{5.3}$$

Konkrétna hodnota Φ_0 nie je pre tento výpočet dôležitá[5], ako uvidíme, tak sa Φ_0 vykráti. Do (5.3) potrebujeme dosadiť vyjadrenia tokov jednotlivých hviezd. Začnime napísaním (5.1) pre prvú a druhú hviezdu

$$m_1 = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right) \quad ; \quad m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right).$$

Z týchto rovníc potrebujeme vyjadriť Φ_1 a Φ_2. Začneme osamostatnením logaritmu

$$-0{,}4 \cdot m_1 = \log\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right) \quad ; \quad -0{,}4 \cdot m_2 = \log\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right),$$

[4] Alternatívne zdanlivá hviezdna veľkosť.
[5] Ponechávame voľnosť v definícii nulovej hladiny magnitúdy

kde sme využili $1/2{,}5 = 0{,}4$. Teraz sa potrebujeme zbaviť logaritmu. To spravíme pomocou inverznej funkcie 10^x, pretože ak $x = \log(y)$, tak $y = 10^x$.

$$10^{-0{,}4\cdot m_1} = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \quad ; \quad 10^{-0{,}4\cdot m_2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_0} \,.$$

Teraz ostáva prenásobiť rovnice tokom Φ_0 a dostávame vyjadrenia pre Φ_1, Φ_2,

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cdot 10^{-0{,}4\cdot m_1} \quad ; \quad \Phi_2 = \Phi_0 \cdot 10^{-0{,}4\cdot m_2} \,. \tag{5.4}$$

Toto dosadíme do (5.3) a dostávame

$$m = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_0 \cdot 10^{-0{,}4\cdot m_1} + \Phi_0 \cdot 10^{-0{,}4\cdot m_2}}{\Phi_0}\right),$$

kde sa vykráti Φ_0 a dostávame vyjadrenie

$$\boxed{m = -2{,}5 \log\left(10^{-0{,}4\cdot m_1} + 10^{-0{,}4\cdot m_2}\right)} \,. \tag{5.5}$$

• • •

Vyjadrenie (5.5) sa dá jednoducho rozšíriť na viacero hviezd. Celková magnitúda N hviezd bude analogicky so vzťahom (5.3)

$$m = -2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots + \Phi_\mathrm{N}}{\Phi_0}\right).$$

Dosadením analogických vyjadrení pre toky ako (5.4) dostávame

$$\boxed{m = -2{,}5 \log\left(10^{-0{,}4\cdot m_1} + 10^{-0{,}4\cdot m_2} + 10^{-0{,}4\cdot m_3} + \cdots + 10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{N}}\right)} \,. \tag{5.6}$$

Ak všetky hviezdy majú rovnakú magnitúdu m_H, dosadením do (5.6) dostávame

$$m = -2{,}5 \log\left(\underbrace{10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{H}} + 10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{H}} + 10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{H}} + \cdots + 10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{H}}}_{\text{N-krát}}\right) = -2{,}5 \log\left(N \cdot 10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{H}}\right).$$

Použitím identity $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ dostávame

$$m = -2{,}5\Big(\log(N) + \log\left(10^{-0{,}4\cdot m_\mathrm{H}}\right)\Big),$$

kde využijeme toho, že logaritmus a 10^x sú inverzné funkcie. To znamená, že $\log(10^x)$. Po roznásobení zátvorky a vymenení členov dostaneme finálny tvar

$$\boxed{m = m_\mathrm{H} - 2{,}5 \log(N)} \tag{5.7}$$

Takýmto spôsobom vieme spočítať magnitúdu galaxií, či hviezdokôp[6].

[6]Samozrejme ak predpokladáme, že všetky hviezdy sú rovnako jasné.

5.2 Limitná magnitúda

Teraz si položme otázku: Prečo v ďalekohľade dokážeme vidieť menej jasné hviezdy ako voľným okom? Je to kvôli tomu, že objektív ďalekohľadu má veľkú zbernú plochu S_{objektiv}, ktorou zbiera svetlo o toku Φ_{objektiv}. To potom koncentruje do okuláru, ktorý má menšiu plochu, konkrétne S_{okular}. Tok v okulári Φ_{okular} je toľkokrát väčší, koľkokrát menšiu plochu má oproti okuláru,

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{\Phi}_{\textbf{okular}}}{\boldsymbol{\Phi}_{\textbf{objektiv}}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\textbf{objektiv}}}{\boldsymbol{S}_{\textbf{okular}}} = \frac{\boldsymbol{\pi}\left(\frac{\boldsymbol{D}_{\textbf{objektiv}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\pi}\left(\frac{\boldsymbol{D}_{\textbf{okular}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}} = \frac{\boldsymbol{D}^{\mathbf{2}}_{\textbf{objektiv}}}{\boldsymbol{D}^{\mathbf{2}}_{\textbf{okular}}}}\,. \tag{5.8}$$

Spočítajme, aký veľký ďalekohľad (s priemerom D_{objektiv}) potrebujeme postaviť na to, aby sme limitne videli hviezdy magnitúdy $m_{\text{objektiv,lim}}$. Teda potrebujeme, aby sa hviezdy s magnitúdou $m_{\text{objektiv,lim}}$ zobrazovali v okulári s jasnosťou $m_{\text{okular,lim}}$, ktorá je rovná limitnej magnitúde oka[7].

Výdime z (POG)

$$m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektiv,lim}} = -2{,}5\log\left(\frac{\Phi_{\text{okular}}}{\Phi_{\text{objektiv}}}\right).$$

Dosadíme (5.8) a upravíme. Využijeme vlastnosť logaritmu $\log(x^2) = 2\log(x)$, [8]

$$m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektiv,lim}} = -2{,}5\log\left(\frac{D^2_{\text{objektiv}}}{D^2_{\text{okular}}}\right) = -5\log\left(\frac{D_{\text{objektiv}}}{D_{\text{okular}}}\right).$$

Teraz potrebujeme vyjadriť D_{objektiv}. Začneme prenesením -5

$$-0{,}2(m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektiv,lim}}) = \log\left(\frac{D_{\text{objektiv}}}{D_{\text{okular}}}\right),$$

a teraz sa potrebujeme zbaviť logaritmu. Inverzná funkcia ku $\log(x)$ je 10^x, teda

$$10^{-0{,}2(m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektiv,lim}})} = \frac{D_{\text{objektiv}}}{D_{\text{okular}}},$$

z čoho vyjadríme D_{objektiv} jednoducho

$$D_{\text{objektiv}} = D_{\text{okular}} \cdot 10^{-0{,}2(m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektiv,lim}})}.$$

Častokrát má okulár priemer ako oko, teda $D_{\text{okular}} \approx D_{\text{oko}} \approx 5\,\text{mm}$. Okuláre s menším priemerom síce navýšia tok vstupujúci do oka, avšak celková zachytená energia bude rovnaká, takže hviezda sa bude v menšom okulári ako D_{oko} javiť rovnako jasná. Preto

$$\boxed{D_{\text{objektiv}} = D_{\text{oko}} \cdot 10^{-0{,}2(m_{\text{oko,lim}} - m_{\text{objektiv,lim}})}},$$

kde sme navyše pre prehľadnosť zamenili $m_{\text{objektiv,lim}} \equiv m_{\text{oko,lim}}$.

[7] Tá závisí od konkrétneho oka, ale za dobrých podmienok to je okolo 6 mag

[8] Je to z dôvodu, toho, že $\log(x)$ je otázka: Na koľkú musím umocniť 10, aby som dostal x? Teda ak už bolo x umocnené na druhú, tak ho budem musieť umocniť na 2-krát väčšie číslo, ako keď umocnené na druhú nie je.

5.3 Príklady

5.3.1 Definícia magnitúdy (ZAVP - 150)

Aký je pomer svetelných tokov (intenzít) hviezd prvej a šiestej hviezdnej veľkosti (magnitúdy)?

5.3.2 Pogsonova rovnica (ZAVP - 152)

Ak sa svetelný tok (intenzita) hviezdy zvýši 25000 krát, o koľko sa zmení jej hviezdna veľkosť (magnitúda)?

5.3.3 Magnitúda dvojhviezdy (IOAA 2010 - T01)

V dvojhviezde má primárna zložka zdanlivú magnitúdu $m_1 = 1{,}0\,\mathrm{mag}$ a sekundárna zložka magnitúdu $m_2 = 2{,}0\,\mathrm{mag}$. Aká je magnitúda dvojhviezdy ako celku?

5.3.4 Objav Pluta

Priemerná magnitúda Pluta je $m_{♇} = 15\,\mathrm{mag}$. Aký je najmenší priemer ďalekohľadu v ktorom by bolo Pluto pozorovateľné? Ľudské oko má priemer $D_{\mathrm{oko}} = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ a limitnú magnitúdu $m_{\mathrm{oko}} = 6{,}0\,\mathrm{mag}$.

5.3.5 Výsledky

Definícia magnitúdy

Pomer svetelných tokov je 100.

Pogsonova rovnic

Hviezdna veľkosť (magnitúda) sa zmenší o 11 mag.

Magnitúda dvojhviezdy

Celková magnitúda dvojhviezdy je 0,64 mag.

Objav Pluta

Je potrebný ďalekohľad s priemerom 32 cm.

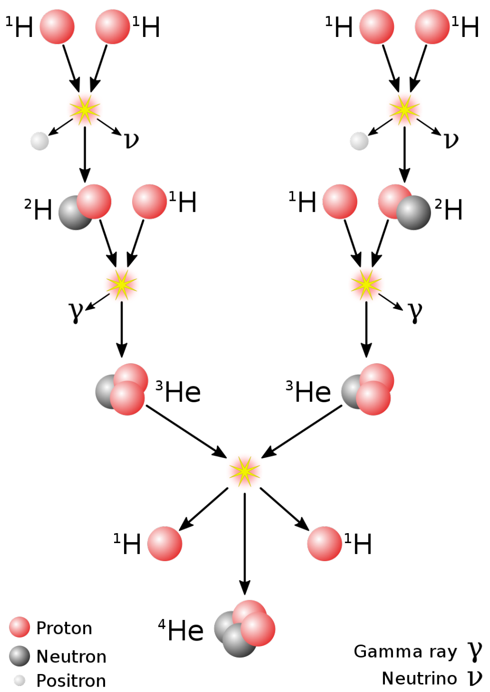
Kapitola 6

Žiarenie hviezd

https://youtu.be/0vAuiL2HTn0

V minulej kapitole sme sa rozprávali o svetle hviezd, ktoré pozorujeme. Avšak ako toto svetlo vo hviezdach vzniká? Zdrojom energie hviezd sú termonukleárne reakcie, ktoré prebiehajú v jadre hviezd vďaka extrémne vysokým teplotám a tlakom[1]. Základnou reakciou je **protón-protónový (p-p) cyklus** zobrazený na obr. 6.1, kde sa jadrá vodíka spájajú do jadra hélia[2]. Ide teda o fúznu reakciu, ktorú rovnicou zapíšeme ako

$$4\,{}^1\mathrm{H}^+ + 2\mathrm{e}^- \rightarrow {}^4\mathrm{He}^{2+} + 2\nu_\mathrm{e}\,. \tag{6.1}$$



Obr. 6.1: p-p cyklus

Slovne povedané: 4 kladne nabité jadrá vodíka, ktoré obsahujú 1 nukleón (protón), a 2 záporné nabité elektróny, vytvoria 1 atóm hélia s nábojom 2+, ktoré obsahuje 4 nukleóny (2 protóny a 2 neutróny), a 2 elektrónové neutrína. Ak by sme však odvážili zložky naľavo (vodíky a elektróny), tak budú o čosi ťažšie ako zložky napravo (hélium a neutrína). Táto nezhoda nie je chyba merania, ***počas reakcie sa časť hmoty premení na energiu***. O tomto hovorí slávny Einsteinov vzťah

$$\boxed{\boldsymbol{E = mc^2}}\,. \tag{6.2}$$

Napríklad ak sa v p-p cykle (6.1) „stratí“ $4{,}765 \cdot 10^{-29}$ kg hmoty, tak to znamená vyprodukovanie $4{,}283 \cdot 10^{-12}$ J energie. Pre praktickosť sa používa jednotka **elektrónvolt (eV)**. Definovaná je ako množstvo energie potrebné na prenesenie elektróna (elementárneho náboja) cez napäťový rozdiel jedného voltu. Číselne: $\mathbf{1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J}$. Veľmi často sa stretneme s odvodenými jednotkami ako keV (10^3-eV), MeV (10^6-eV), GeV (10^9-eV), atď.[3]. V jednom p-p cykle 6.1 vznikne 26,73 MeV energie, čo je veľmi málo. Avšak v hviezdach prebehne takýto cyklov strašne veľa, a preto dokážu žiariť tak jasno ako žiaria.

[1] A takisto vďaka kvantovej mechanike. Bez tunelového javu by teplota a tlak neboli dostatočne vysoké.

[2] Existujú konkurenčné procesy tvorby energie v hviezdach. Napríklad CNO cyklus, ktorý je dominantný v hmotných hviezdach. Viacej info tu: https://cs.wikipedia.org/wiki/CNO_cyklus

[3] ľudovo ich voláme evy, kevy, mevy, gevy, atď..

Svietivosť L je celkové množstvo energie (vo všetkých vlnových dĺžkach), ktoré hviezda (objekt) vyžiari za 1 s. Ide teda o celkový svetelný výkon hviezdy. Jednotkou svietivosti sú $\mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{W}$. V angličtine sa používa výraz *luminosity*, poslovenčene *luminozita*.

(Svetelný) Tok F, f je celkové množstvo energie (vo všetkých vlnových dĺžkach), ktorá prejde $1\,\mathrm{m}^2$ za 1 s. Ak hovoríme o toku na povrchu hviezdy používame veľké písmeno F, ak hovoríme o toku v istej vzdialenosti d od hviezdy, používame malé písmeno f. Jednotka toku je $\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}} = \mathrm{W\,m^{-2}}$. V anličtine používame výraz *flux*, ktorý sa takisto poslovenčuje.

6.1 Absolútne čierne teleso

Objekt, ktorý žiari ideálne (uvoľňuje najväčšie možné množstvo energie pri danej teplote) považujeme za absolútne čierne teleso (AČT). To definujeme ako ***teleso, ktoré neodráža svetlo*** (energiu) v celom spektre vlnových dĺžok. Všetka energia je telesom pohlcovaná[4]. Rozdelenie žiarenia AČT v rôznych vlnových dĺžkach závisí len na jeho teplote.

Stefan-Boltzmannov zákon (S-B)

Povrchový tok absolútne čierneho telesa s teplotou T je popísaný vzťahom

$$F = \sigma T^4\,, \tag{6.3}$$

kde $\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ je Stefan-Boltzmannova konštanta.

V prírode má najbližšie k AČT reliktové žiarenie, čo je pozostatok po veľkom tresku (vzniku vesmíru). Viacej sa mu budeme venovať v kapitole 22. Žiarenie hviezd má od AČT už pomerne ďaleko, ale vieme ho použiť ako prvú približnú aproximáciu.

Svietivosť Slnka je $L_\odot = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ = koľko Joulov opustí celý povrch za sekundu. Plocha povrchu Slnka o polomere $R_\odot = 695\,700\,\mathrm{km}$ je $S = 4\pi R_\odot^2$. Povrchový tok Slnka $F_\odot$ je potom

$$F_\odot = \frac{L_\odot}{S_\odot} = \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2} \doteq 6{,}294 \cdot 10^7\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,.$$

Ak by sme predpokladali, že Slnko žiari ako AČT, tak pomocou (S-B) vieme vypočítať povrchovú teplotu. Takúto teplotu nazývame efektívna teplota ***T*eff**. Pre Slnko vychádza

$$T_{\mathrm{eff},\odot} = \sqrt[4]{\frac{F}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{\sigma \cdot 4\pi R_\odot^2}} \doteq 5772\,\mathrm{K}\,.$$

Skutočná teplota fotosféry Slnka[5] je v rozmedzí od 4400 K do 6600 K, a je to zložitá funkcia vzdialenosti od stredu. Dôsledkom toho, že fotosféra nie je plocha, ale má hrúbku, tak pozorujeme na hviezdach okrajové stemnenie disku. Totižto, na krajoch pozeráme do fotosféry viacej zošikma, čo znamená, že „prenikneme“ do menšej hĺbky po povrch, kde je nižšia teplota ako v hlbších vrstvách fotosféry. Nižšia teplota znamená menší vyžarovaný tok podľa (S-B).

[4] A preto hovoríme o absolútne *čiernom* telese.

[5] Fotosféra je 500 km hrubá vrstva na povrchu Slnka z ktorej je emitovaná väčšina žiarenia, ktoré pozorujeme. Svetlo z hlbších vrstiev je absorbované, nedostáva sa na povrch priamo, ale až po spätnom znovuvyžiarení.

6.2 Teplota Zeme

Energia vo forme elektromagnetického žiarenia (fotónov) vzniká v jadre Slnka pri fúznej reakcii. Následne putuje skrz vrstvy Slnka opakovaným absorbovaním a vyžiarovaním, až sa dopracuje na povrch, kde je emitované z fotosféry do okolitého vesmíru všetkými smermi rovnomerne. Putuje **rýchlosťou svetla vo vákuu** $\boldsymbol{c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$. Ak by sme sledovali žiarenie (fotóny) vyslané z povrchu Slnka v rovnaký okamih do všetkých priestorových smerov, tak by po čase t boli rozprestrené na povrchu sféry o polomere $r = ct$.

Napríklad po čase $t = 8^{\mathrm{m}}\,19^{\mathrm{s}}$ bude mať táto sféra takmer presne polomer jednej astronomickej jednotky, $r_\oplus = 1\,\mathrm{au}$ (au je veľká poloos dráhy Zeme) [6]. Ak predpokladáme, že sa po ceste od Slnka na Zem neabsorbuje žiadne žiarenie, tak na spomínanú sféru s plochou $S_{\odot,\oplus} = 4\pi r_\oplus^2$ dopadne $L_\odot$ energie. Tento výkon (energia za 1 s) sa rozprestrie rovnomerne pozdĺž sféry, ktorá je však oveľa väčšia ako povrch Slnka, preto tok $f_{\odot,\oplus}$ ktorý ňou prechádza bude výrazne menší ako povrchový tok Slnka $F_\odot$. Konkrétne

$$f_{\odot,\oplus} = \frac{L_\odot}{S_{\odot,\oplus}} = \frac{L_\odot}{4\pi r_\oplus^2} \doteq 1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{6.4}$$

Slnečný tok pri Zemi má špeciálne označenie: **slnečná konštanta** $\boldsymbol{k_\oplus = 1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}}$. Na povrch Zeme však dopadne menší tok, kvôli tomu, že časť energie sa odráža naspäť do vesmíru, buď od atmosféry, alebo od povrchu.

Albedo A je celková odrazivosť telesa. Je to číslo medzi 0 a 1, pričom albedo 0 znamená AČT a albedo 1 dokonalé zrkadlo. Albedo Zeme je najnižšie v lete a najvyššie v zime. Zmeny sú spôsobené snehovou pokrývkou, ktorá odráža viac. Problémom je, že čím viacej ľadovcov sa roztopí, tým menšie bude albedo a tým viacej energie Zem prijme, čím sa zahreje a roztopia sa ďalšie ľadovce. Tento efekt sa nabaľuje na seba a je to dôvod prečo by sme mali obmedziť globálne otepľovanie. Priemerné albedo Zeme sa udáva $A_\oplus = 0{,}30$.

Emisivita ε je pomer toho, koľko energie vyžiari teleso voči AČT s rovnakou teplotou. Je to číslo medzi 0 a 1, pričom emisivita 0 odpovedá čiernej diere[7], a emisivita 1 odpovedá AČT. (S-B) vieme rozšíriť mimo AČT nasledovne

$$\boxed{\boldsymbol{F = \varepsilon\sigma T^4}}\,. \tag{6.5}$$

Emisivita zemského povrchu je okolo $\varepsilon_{\oplus,\mathrm{P}} = 0{,}95$. Avšak kvôli oblakom a skleníkovému efektu je teplo zadržiavané pri povrchu Zeme, čo spôsobuje, že efektívna emisivita Zeme pozorovaná z vesmíru je približne $\varepsilon eff = 0{,}60$.

Teraz sa pokúsime spočítať priemernú teplotu pri povrchu Zeme. Pripomeňme si sféru s polomerom 1 au na ktorú je rozprestrený výkon $L_\odot$. Aká časť tejto sféry sa pretína so Zemou? To bude určovať výkon $P_{\odot,\oplus}$, ktorý Zem „získa“ od Slnka. Priesečník sféry a gule je približne kruh, ak je sféra dostatočne veľká (čo v tomto prípade je), konkrétne je to kruhový prierez Zeme,

[6] Malé r budeme používať ak ide o polomer dráhy, respektíve vzdialenosť naprieč vesmírom. Veľké R ak ide o polomer planéty. Obdobne pri iných veličinách, veľké písmeno sa vzťahuje priamo na daný objekt ($F, M, \ldots$)

[7] Pretože iba pohlcuje energiu a nevyžaruje ju naspäť (ak zanedbáme Hawkingovo žiarenie, čo je extrémne pomalé „vyparovanie“ čiernych dier).

čiže kruh s plochou $S_{\oplus,\mathrm{rez}} = \pi R_{\oplus}^2$. Samozrejme nesmieme zabudnúť na to, že časť energie sa od Zeme odrazí, konkrétne $A_{\oplus}$-násobok. Tým pádom prejde $(1 - A_{\oplus})$-násobok,

$$P_{\odot,\oplus} = f_{\odot,\oplus} \cdot S_{\oplus,\mathrm{rez}} \cdot (A_{\oplus} - 1) = k_{\oplus} \cdot \pi R_{\oplus}^2 \cdot (A_{\oplus} - 1) = \pi(A_{\oplus} - 1)k_{\oplus}R_{\oplus}^2 \,. \tag{6.6}$$

Výkon, ktorý Zem prijme následne vyžiari celým povrchom, teda väčšou plochou ako ho prijala. Plocha povrchu Zeme je $S_{\oplus} = 4\pi R_{\oplus}^2$. Využitím (6.5) dostávame pre vyžarovanie (tok Zeme $F_{\oplus}$) rovnicu

$$\frac{P_{\odot,\oplus}}{4\pi R_{\oplus}^2} = F_{\oplus} = \varepsilon e f f \sigma T_{\oplus}^4 \,, \tag{6.7}$$

kde $T_{\oplus}$ je priemerná teplota pri povrchu Zeme. Kombináciou vzťahov (6.6) a (6.7) – daním do rovnosti absorpciu a vyžarovanie Zeme – dostávame

$$\pi(A_{\oplus} - 1)k_{\oplus}R_{\oplus}^2 = \varepsilon e f f \sigma T^4 \cdot 4\pi R_{\oplus}^2 \,,$$

z čoho vieme vyjadriť $T_{\oplus}$ ako

$$\boxed{T_{\oplus} = \sqrt[4]{\frac{(A_{\oplus} - 1)k_{\oplus}}{4\varepsilon e f f \sigma}}} \doteq 289\,\mathrm{K} \doteq 16\,^{\circ}\mathrm{C}\,.$$

6.3 Príklady

6.3.1 Einsteinovo Slnko (ZAVP - 181)

Koľko kg látky stratí Slnko za rok? Na koľko rokov života by Slnku stačila súčasná hmotnosť, ak by vedelo využiť všetku svoju hmotu na žiarenie, a žiarilo by stále rovnako ako v súčasnosti? Hmotnosť Slnka je $1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ a za sekundu vyžiari $3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{J}$ energie. Rýchlosť svetla je $3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

6.3.2 Svietivosť hviezdy (IOAA 2007 - T09)

Vypočítajte svietivosť hviezdy L, v jednotkách svietivosti Slnka $L_{\odot}$. Efektívna teplota hviezdy je 7500 K a polomer $2{,}5\,R_{\odot}$. Efektívna teplota Slnka je 5800 K.

6.3.3 Solárna konštanta na Marse (ZAVP - 183)

Vypočítajte hodnotu solárnej konštanty pre Mars $k_{♂}$. Veľká poloos dráhy Marsu je $a_{♂} = 1{,}524\,\mathrm{au}$. Solárna konštanta pri Zemi je $k_{\oplus} = 1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

6.3.4 Povrchová teplota planéty (IOAA 2007 - T16)

Rýchlo rotujúca planéta s polomerom R a albedom A obieha hviezdu svietivosti L na kruhovej dráhe s polomerom a. Predpokladajte, že planéta nemá atmosféru a vyžaruje ako absolútne čierne teleso. Úlohy:

(a) Aký je svetelný tok hviezdy na povrchu planéty?

(b) Koľko energie z hviezdy príjme povrch planéty za sekundu?

(c) Aká je priemerná teplota povrchu planéty?

(d) Ak by sme predpokladali, že planéta je na hviezdu natočená vždy iba jednou stranou, aká bude priemerná teplota tejto strany?

6.3.5 Výsledky

Einsteinovo Slnko

Slnko stratí za rok $1{,}34 \cdot 10^{17}$ kg hmoty. Jeho súčastná hmota by mu teoreticky vystačila na $1{,}48 \cdot 10^{13}$ rokov, čo je vyše 1000-násobok veku vesmíru. V skutočnosti sa však nemôže všetka látka premeniť na energiu, čo znamená, že Slnko bude žiť oveľa kratšie (ešte asi 5 miliárd rokov).

Svietivosť hviezdy

Svietivosť hviezdy je približne 17 $L_\odot$.

Solárna konštanta na Marse

Na Mars dopadá tok (solárna konštanta pri Marse je) $586{,}0\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

Povrchová teplota planéty

(a) Svetelný tok na povrchu planéty je $\frac{L}{4\pi a^2}$.

(b) Povrch planéty príjme $(1-A)\frac{LR^2}{4a^2}$.

(c) Teplota povrchu planéty je $\sqrt[4]{\frac{(1-A)L}{16\pi\sigma a^2}}$.

(d) Teplota povrchu planéty s viazanou rotáciou je $\sqrt[4]{\frac{(1-A)L}{8\pi\sigma a^2}}$.

Kapitola 7

Paralaxa

https://youtu.be/GEaQj_2WBiM

Vo vesmíre je meranie vzdialeností problém. Nemôžeme zobrať meter a natiahnuť ho ku inej hviezde. Preto ľudia prichádzajú na rôzne šikovné „triky“, ako vzdialenosť vo vesmíre merať. Jedným z nich je paralaxa.

Princíp je založený na pozorovaní jedného objektu z dvoch miest. Môžete si to vyskúšať, ak budete striedavo zatvárať jedno oko. Objekty pred vami „skáču“ hore-dole, avšak čím je objekt ďalej, tým skáče menej. Toto „poskakovanie“ sa dá využiť aj vo vesmírnom meradle, avšak musíme použiť väčšiu základňu, teda pozorovateľne ďalej od seba ako sú naše oči.

Rovníková paralaxa $\pi_\oplus$ je uhol posunu pozorovaného objektu pri použití polomeru Zeme $R_\oplus$ ako základne. Je užitočná na vypočítanie vzdialeností telies v slnečnej sústave.

Ročná paralaxa π je uhol posunu pozorovaného objektu pri použití veľkej poloosi dráhy Zeme $a_\oplus$ ako základne. Je užitočná na vypočítanie vzdialenosti hviezd v našej galaxii.

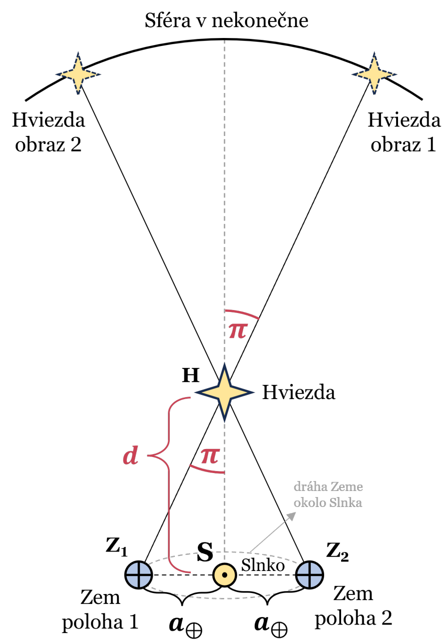
Výpočet vzdialenosti objektu z jeho paralaxy je čisto geometrický. Na obr. 7.1 je znázornená situácia pre ročnú paralaxu. Pre paralaxu rovníkovú je sitácia a následný výpočet analogický, zameníme $a_\oplus \leftrightarrow R_\oplus$.

Pre presný výpočet výdeme z pravouhlého $\triangle \mathrm{HSZ}_1$ (respektíve mohli by sme použiť $\triangle \mathrm{HSZ}_2$) v ktorom platí[1]

$$\tan(\pi) = \frac{a_\oplus}{d}\,.$$

Z toho vyjadríme vzdialenosť d ako

$$\boxed{d = \frac{a_\oplus}{\tan(\pi)} = \frac{1\,\mathrm{au}}{\tan(\pi)}}\,. \tag{7.1}$$



Obr. 7.1: Ročná paralaxa

Avšak pozor! Vo väčšine prípadov, ktoré nastávajú v astronómii je paralaxa veľmi malá, pretože vzdialenosť objektu je oveľa väčšia ako použitá základňa ($d \gg a_\oplus$). Potom môžeme použiť aproximáciu

$$\boxed{\tan(x) \approx x \quad ; \quad x \ll 1 \quad ; \quad [x] = \mathrm{rad}}\,, \tag{7.2}$$

[1] Paralaxu značíme písmenkom π, čo je mierne mätúce, avšak ide o zaužívanú astronomickú konvenciu.

ktorá platí kvôli tomu, že dlhý natiahnutý pravouhlý trojuholík má veľmi blízko k uzučkému výseku veľkého kruhu (viď. horná časť obr. 7.1). Ak je polomer kruhu d, tak jeho obvod bude[2] $2\pi d$. Preto ak na ňom vysekneme malinký uhol x, ktorý meriame v radiánoch, tak dĺžka kružnicovému výseku bude xd, pretože celý celý kruh má 2π radiánov[2]. Tangens je pomer krátkej odvesny ku dlhej odvesne, čo je v aproximovanom prípade pomer kružnicového výseku ku polomeru, teda $\tan(x) \approx xd/d = x$. Treba si však dať pozor, keďže ***toto platí len pre radiány, v stupňoch to nefunguje!***

Zárovň však vidíme, že pre sínus, ktorý je pomer krátkej odvesny a prepony, platí to isté, pretože prepona je v aproximácii kružnicového výseku takisto rovná polomeru kruhu. Takže analogicky

$$\boxed{\sin(x) \approx x \quad ; \quad x \ll 1 \quad ; \quad [x] = \mathrm{rad}}\,. \tag{7.3}$$

Aproximácie sú v astrofyzike dôležité, keďže sa môže stať, že bez nich by sme nevedeli analyticky nejaký príklad dopočítať, alebo by to bolo mnohonásobne ťažšie. V kapitole 26 sa aproximáciám a približným výpočtom budeme venovať podrobnejšie.

Aplikáciou (7.2) na (7.1) dostávame

$$\boxed{d = \frac{a_\oplus}{\pi} = \frac{1\,\mathrm{au}}{\pi}}\,. \tag{7.4}$$

Tento vzťah nám poskytuje prirodzený spôsob na zavedenie jednotky vzdialenosti. Konkrétne, ak dosadíme do neho paralaxu v oblúkových sekundách[3], tak číslo ktoré dostaneme je vzdialenosť v jednotke **parsek pc**. Inými slovami, jeden parsek je taká vzdialenosť, z akej by bolo vidieť tyč s dĺžkou jednej astronomickej jednotky pod uhlom jednej oblúkovej sekundy.

Nezabúdajme, že vzťah je pôvodne definovaný pre radiány. Jedna uhlová sekunda je $1/60^2 = 1/3600$ stupňa a 360 stupňov sú 2 radiány. Prepočet medzi oblúkovými sekundami a radiánmi bude

$$1'' = \frac{1}{3600} \cdot \frac{2\pi}{360}\,\mathrm{rad} \doteq \frac{1}{206265}\,\mathrm{rad}\,. \tag{7.5}$$

Dosadením $d = 1\,\mathrm{pc}$ a $\pi = 1''$ do (7.4) a využitím prepočtu (7.5) dostávame veľkosť jedného parseka[4]

$$1\,\mathrm{pc} \doteq \frac{1\,\mathrm{au}}{1''} = \frac{1\,\mathrm{au}}{(1/206265)} = \mathbf{206\,265\,au}\,. \tag{7.6}$$

Jednotku parsek je výhodné používať pri veľkých vzdialenostiach. Ďalšou široko používanou jednotkou sú **svetelné roky ly**. Jeden svetelný rok je vzdialenosť, ktorú preletí svetlo rýchlosťou c za jeden juliánsky rok. Juliánsky rok je definovaný ako presne 365,25 dňa = 31 557 600 sekúnd[5].

Ak by sme chceli spočítať vzťah medzi svetelným rokom a parsekom, tak si musíme spomenúť na to, že sme v predchádzajúcej kapitole spočítali, že svetlo preletí 1 au za $8;19^{\mathrm{m}} \doteq^{\mathrm{s}} 499\,\mathrm{s}$. Podelením dostávame, že za rok svetlo preletí 63 242 au, a teda **1 pc ≐ 3,262 ly**.

[2]Tu je π ako π, nie paralaxa. Strašný zmätok.
[3]Pri malých uhloch sa zvykne používať jednotka mas, čo je $0{,}001''$ – z anglického *MiliArcSecond*.
[4]Jednotka rad zmizne, pretože radiány sú bezrozmerné a vzťah (7.4) je v základných jednotkách SI.
[5]Pre rýchle približné počty sa dá použiť aproximácia $1\,\mathrm{rok} \doteq \pi \cdot 10^7\,\mathrm{s}$.

7.1 Absolútna magnitúda

V kapitole 5 sme sa zaoberali magnitúdou hviezd pri pozorovaní zo Zeme (značíme malým m). Avšak, rôzne hviezdy sú rôzne ďaleko, čo znamená, že hviezda so slabou magnitúdou môže byť veľmi jasná, len je veľmi ďaleko. Preto hviezdam priraďujeme absolútnu magnitúdu, čo je magnitúda po hypotetickom prenesení hviezd na rovnakú vzdialenosť.

Absolútna zdanlivá magnitúda M je magnitúda hviezdy vnímaná ľudským okom, ak by sme hviezdu presunuli do vzdialenosti 10 pc. Ide o magnitúdu pozorovateľnú vo viditeľnom spektre a vieme ju prepojiť so zdanlivým svetelným tokom Φ, ale nie celkovým svetelným tokom f či svietivosťou L, pretože to sú veličiny, ktoré sa vzťahujú na všetku energiu, teda aj na žiarenie v oblastiach spektra, ktoré naše oko nevidí.

Napíšme si Pogsonovu rovnicu (POG) pre magnitúdy m a M.

$$m - M = -2{,}5\log\left(\frac{\Phi}{\Phi_{10}}\right), \tag{7.7}$$

kde Φ_{10} je zdanlivý svetelný tok vo vzdialenosti $d_{10} = 10\,\mathrm{pc}$ od hviezdy. Člen naľavo nazývame **modul vzdialenosti $(m - M)$**, a vieme ho prepojiť so vzdialenosťou hviezdy d.

Spomeňme si na výpočet slnečnej konštanty v rovnici (6.4) a na úvahu v odstavčeku nad ňou. Energia z hviezdy sa rozkladá na sférickú plochu s obsahom $4\pi d^2$. To znamená, že tok klesá s druhou mocninou vzdialenosti, čo zapíšeme ako $\boldsymbol{\Phi \sim 1/d^2}$. Preto sa dá pomer tokov dať do súvisu s prevráteným pomerom vzdialeností. Konkrétne

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\Phi}{\Phi_{10}} = \frac{d_{10}^2}{d^2} = \left(\frac{10\,\mathrm{pc}}{d}\right)^2}}\,. \tag{7.8}$$

Analogický vzťah platí pre celkový tok f, keďže ten takisto klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Matematicky zapísané $\boldsymbol{f \sim 1/d^2}$.

Dosadením (7.8) do (7.7) a úpravou dostávame[6]

$$m - M = -2{,}5\log\left(\left(\frac{10\,\mathrm{pc}}{d}\right)^2\right) = -5\log\left(\frac{10\,\mathrm{pc}}{d}\right).$$

Ak budeme vzdialenosť d rátať v parsekoch, tak v zlomku zmizne jednotka pc. Po rozdelení logaritmu na dva[7] a vypočítaní jedného z logaritmov dostávame

$$m - M = -5\big(\log(10) - \log(d)\big) = -5\cdot 1 - (-\log(d)) \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc}\,.$$

Finálny tvar medzi modulom vzdialenosti a vzdialenosťou je

$$\boxed{\boldsymbol{m - M = -5 + 5\log(d) \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc}}}\,. \tag{7.9}$$

[6] Využili sme vlastnosť logaritmu $\log(a^b) = b\cdot\log(a)$.
[7] Keďže $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$.

Tento vzťah je užitočný, keďže absolútnu magnitúdu vieme pri niektorých hviezdach, galaxiách či iných objektoch určiť trikom. Zároveň vieme jednoducho namerať ich magnitúdu m zo Zeme. Z toho dostávame modul vzdialenosti $(m-M)$. Na základe neho vieme následne zo vzťahu (7.9) určiť vzdialenosť objektov, ktoré sú príliš ďaleko na to aby sme odmerali ich paralaxu.

Vyjadrenie vzdialenosti d zo vzťahu (7.9) je nasledovné:

$$\begin{aligned} m - M &= -5 + 5\log(d) \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc} \\ m - M + 5 &= 5\log(d) \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc} \\ 0{,}2(m - M + 5) &= \log(d) \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc} \\ &\boxed{d = 10^{0{,}2(m-M+5)} \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc}} \end{aligned}$$

7.2 Extinkcia

Medzihviezdna extinkcia A je počet magnitúd ktoré sa „stratia“ vplyvom medzihviezdneho prostredia. Ku písmenu A pridávame index podľa časti spektra v ktorej pozorujeme. Zatiaľ sa zaoberáme iba vizuálnou časťou (ktorú vidí naše oko), takže pridáme index V $\Rightarrow A_\mathrm{V}$. Alternatívne dáme V do zátvorky $\Rightarrow A(V)$. Keď hovoríme o „strácaní“ magnitúd znamená to, že stúpa magnitúda m pozorovaná zo Zeme[8].

Koeficient medzihviezdnej extinkcie a $= A/d$ je medzihviezdna extinkcia[9] vztiahnutá na jednotku vzdialenosti. Zvykne sa používať jednotka **mag/kpc**, teda koľko magnitúd sa „stratí“ na tisíc parsekoch[10].

Po zarátaní medzihviezdnej extinkcie modul vzdialenosti $(m - M)$ stúpne (lebo stúpne m), preto musíme na pravú stranu rovnice (7.9) pripočítať absorpčný člen $+A_\mathrm{V} = +a_\mathrm{V}d$, ktorý predstavuje celkovú magnitúdu, ktorá sa „stratí“. Dostávame

$$\boxed{m - M = -5 + 5\log(d) + a_\mathrm{V}d \quad ; \quad [d] = \mathrm{pc}}. \tag{7.10}$$

Ak by ste sa pokúsili z tohto vzťahu vyjadriť d narazíte na problém, že vám to nepôjde. Totižto táto rovnica nie je analyticky riešiteľná, to znamená, že neexistuje jej všeobecné vyjadrenie, kde by sme mali $d =$ *(niečo neobsahujúce d)*. V takomto prípade musíme počítať vzdialenosť numericky čo si ukážeme v kapitole 26 o približných výpočtoch.

[8] Nezabúdajme, že čím väčšia magnitúda, tým slabší objekt!
[9] Slovenské zdroje namiesto označenia *koeficient extincie* používajú označenie *absorpcia*.
[10] V smere galaktického disku dosahuje až 1,8 mag/kpc, v kolmom smere je zanedbateľná

7.3 Príklady

7.3.1 Rovníková paralaxa z Mesiaca (ZAVP - 1)

Priemer Mesiaca je 0,27 priemeru Zeme. Určite rovníkovú paralaxu Slnka pre pozorovateľa na Mesiaci. Vzdialenosť Mesiaca od Zeme zanedbajte.

7.3.2 Slnko z Rigelu

Absolútna jasnosť Slnka je 4,82 mag. Aká bude jeho zdanlivá jasnosť pri pozorovaní z hviezdy Rigel? Vzdialenosť Slnko – Rigel je 863 ly? Uvažujte koeficient medzihviezdnej extinkcie (absorbcie) $a_{\mathrm{V}} = 0{,}8\,\mathrm{mag\,kpc^{-1}}$.

7.3.3 Pulzujúca premenná hviezda (AO 2008, ZŠ FI - 3)

Pulzujúce premenné hviezdy (Cefeidy) menia svoju jasnosť v dôsledku periodicky sa opakujúceho zväčšovania a zmenšovania svojej veľkosti, pričom z pozorovaní vieme, že existuje vzťah medzi periódou a absolútnou hviezdnou veľkosťou v maxime takejto hviezdy

$$M = -1{,}63 - 2{,}54 \log P\,.$$

Vypočítajte ročnú paralaxu pulzujúcej premennej hviezdy, ktorej zdanlivá hviezdna veľkosť je $m = 4{,}2\,\mathrm{mag}$ a perióda 40 dní.

7.3.4 Výsledky

Rovníková paralaxa z Mesiaca

Paralaxa Slnka bude $2{,}4''$.

Slnko z Rigelu

Slnko bude mať zdanlivú magnitúdu 12,13 mag.

Pulzujúca premenná hviezda

Paralaxa Cefeidy je približne $0{,}001''$.

Kapitola 8

Nebeské súradnice

https://youtu.be/dEg9uL6Hp4I

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 9

Ekliptika

https://youtu.be/bkUP3F9g0tw

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 10

Ďalekohľad

https://youtu.be/Pd4ElijaLnQ

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 11

Energia

https://youtu.be/S1lsZ41otYM

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 12

Úniková rýchlosť

https://youtu.be/k96ZUgW1bCU

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 13

Moment hybnosti

https://youtu.be/Y8nUyUYBt1U

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 14

Spektrálny tok

https://youtu.be/BJW1kmL3Lwc

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 15

Bolometrická magnitúda

https://youtu.be/ydwBFSlioLw

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 16

Premenné hviezdy

https://youtu.be/xYWhdM9P7ow

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 17

Farebný index

https://youtu.be/74w-Q3ulAOU

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 18

Sférická trigonometria

https://youtu.be/91cY59iPqEo

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 19

Astrofotografia

https://youtu.be/UyAEcln5VwM

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 20

Dopplerov efekt

https://youtu.be/xVTQuKGXYSY

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 21

Hubblov zákon

https://youtu.be/5ytnUOPyas0

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 22

Kozmologické modely

(video-zatial-neexistuje)

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 23

Gaussov zákon

https://youtu.be/tuNHjkZJJpU

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 24

Relativita

videozatianeexistuje

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 25

Sférické transformácie

videozatianeexistuje

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 26

Približné výpočty

videozatianeexistuje

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 27

Dátová analýza

videozatianeexistuje

Bude pridané čoskoro.