

AO 2023, SŠ, finále

1 Netradičné orbitálne dráhy

(autor: Samuel Amrich)

Prológ: Riešenie dráh v nebeskej mechanike môže niekedy viesť k zaujímavým výsledkom. V tejto úlohe sa pozrieme práve na jedno konkrétne riešenie.

Zadanie: Predstavte si hypotetickú slnečnú sústavu kde je iba Slnko, Zem a Mesiac obiehajúci okolo Zeme. Jednotlivé hmotnosti sú M_S pre Slnko, M_Z pre Zem a M_M pre Mesiac.

Koštanty a zákony:

Vzdialenosť Zem-Mesiac ku Slnko-Zem	$r_M = \frac{7}{45}r_Z$
Obežná perióda Mesiaca ku Zeme	$T_M = \frac{1}{3}T_Z$
Podmienka úlohy	$M_S \gg M_Z \gg M_M$
Binomická aproximácia	$(1 \pm x)^a \approx 1 \pm ax \quad ; \quad a \in \mathbb{Q}, x \ll 1$

Úlohy:

- Overte, že pre dané vstupné parametre stále platí podmienka úlohy (na hmotnosti).
Zamyslite sa, ako je potrebné overiť dvojitú nerovnicu $M_S \gg M_Z \gg M_M$. Hint: za \gg sa dá považovať ak je jedno číslo aspoň o rád väčšie ako druhé.
- Odvoďte vzťah pre polomer Hillovej sféry okolo zeme a overte či sa Mesiac v nej nachádza.
Pokúste sa umiestniť testovaciu časticu na hranu Hillovej sféry okolo Zeme.
- Nakreslite tvar orbity Mesiaca vo vzťažnej sústave Slnka.
Nemusí to byť presné grafovanie na milimetrový papier ale pokúste sa o čo najlepšie rysovanie. Minimálne 8 bodov dráhy je potrebné vyniesť. K akému tvaru sa daná dráha podobá?

2 JWST

(autor: Radovan Lascsák)

Ďalekohľad Jamesa Webba je najväčší vesmírny teleskop. Má hmotnosť $m = 6\,160$ kg a zrkadlo s priemerom $D = 6,5$ m. Špecializuje sa na pozorovanie v infračervenej oblasti spektra na vlnových dĺžkach od $\lambda_{\min} = 600$ nm do $\lambda_{\max} = 28\,300$ nm. Bol vypustený koncom roku 2021 a po mesiaci sa usadil na dráhu, ktorá sa pohybuje v blízkosti Lagrangeovho bodu L2. To znamená, že si voči Zemi zachováva relatívnu polohu.

Uvažujte, že Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe s veľkou polosou $a = 149,6 \cdot 10^9$ m a excentricitou $e = 0,0167$. Relatívna poloha bodu L2 voči Zemi je v perihéliu $d_P = 1,48 \cdot 10^9$ m a v aféliu $d_A = 1,53 \cdot 10^9$ m (pričom leží na priamke Slnko – Zem smerom od Slnka). Okolo

Zeme obieha Mesiac po eliptickej dráhe, ktorá je sklopená voči ekliptike o $i = 5,145^\circ$. Veľká polos je $a_\zeta = 384,4 \cdot 10^6$ m a excentricita $e_\zeta = 0,0549$.

Hmotnosť Slnka:	$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg
Hmotnosť Zeme:	$M_\oplus = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg
Gravitačná konštanta:	$G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Polomer Slnka:	$R_\odot = 695,5 \cdot 10^6$ m
Polomer Zeme:	$R_\oplus = 6,378 \cdot 10^6$ m
Polomer Mesiaca:	$R_\zeta = 1,738 \cdot 10^6$ m

Úlohy:

- Do akej vzdialenosti od Zeme siaha úplný tieň Zeme v perihéliu a aféliu? Môže JWST pozorovať úplne zatmenie Slnka (za predpokladu, že sa nachádza presne v L2)?
- JWST využíva solárnu energiu, preto by vadilo ak by vstúpil aj do polotieňa Zeme. Aká je pološírka polotieňa Zeme v bode L2? Inými slovami: ako ďaleko od priamky Slnko – Zem – L2 (v bode L2) siaha polotieň Zeme? Vypočítajte pre Zem v perihéliu aj aféliu.
Hint: JWST je v polotieni Zeme ak z jeho pohľadu pozoruje čiastočné zatmenie Slnka Zemou.
- V akej najmenšej vzdialenosti od bodu L2 (v smere kolmo na priamku Slnko – Zem – L2) musí JWST obiehať, aby sa vyhol aj polotieňu Mesiaca?
Hint: počítajte prípad pre Zem v perihéliu.
- Koľkokrát viacej fotónov zachytí za sekundu JWST oproti ľudskému oku pri pozorovaní vzdialeného bodového objektu vyžarujúceho monochromaticky na λ_{\min} ? Priemer ľudského oka (pupily) je $D_{\text{oko}} = 4$ mm a kvantová účinnosť (pre λ_{\min}) je $\eta_{\text{oko}} = 0,1$. Extinkcia atmosféry (pre daný objekt) je 0,3 mag. Kvantová účinnosť JWST (pre λ_{\min}) je $\eta = 0,7$.
- Aká je najmenšia vzdialenosť dvoch bodov na Mesiaci, ktoré vie JWST (niekedy) rozlíšiť? (Predpokladajte, že sa nachádza presne v L2)

Poznámka: Úlohy na seba nenadväzujú, nemusíte ich počítat' zaradom. Každá úloha (a,b,c,...) je hodnotená rovnako (za 20 bodov).

3 Kratšie úlohy

(autor: Jana Švrčková)

3.1 O medzihviezdnej absorbcii

Medzi hviezdou s farebným indexom $(B - V)_0 = 0$ a Zemou sa nachádza mrak medzihviezdneho prachu, ktorý absorbuje časť svetla hviezdy. Absorpcia závisí na vlnovej dĺžke: čím väčšia je vlnová dĺžka, tým menšia je absorpcia. Kvôli absorpcii na Zemi pozorujeme odlišnú hodnotu farebného indexu $(B - V)$. Je táto pozorovaná hodnota kladná alebo záporná? Stredná vlnová dĺžka vo filtri B je 442 nm a vo filtri V to je 540 nm.

5 Planetárny tranzit

(autor: Jozef Lipták)

Jedným zo zriedkavých javov v Slnčnej sústave sú prechody planét popred slnečný disk. Zo všetkých kombinácií planét, z ktorých jav pozorujeme, a planét, ktoré popred Slnko prechádzajú, je prechod Uránu popred slnečný disk pozorovaný z Neptúnu ten najzriedkavejší. Uvažujte, že dráhy Uránu a Neptúna sú kruhové a ich ostatné parametre sú dané údajmi v tabuľke. Ďalej uvažujme, že tento tranzit pozorujeme zo Zeme. Polomer Slnka je 695 700 km.

	veľká poloos	sklon dráhy	dĺžka výstupného uzla	polomer planéty
Urán	19,19 au	0,773°	74,0°	25 360 km
Neptún	30,07 au	1,770°	131,8°	24 620 km

Úlohy:

1. V akom súhvezdí sa budú planéty počas prechodu nachádzať?
2. O koľko magnitúd Neptún potemnie?
3. Ako najdlhšie môže trvať úplná fáza tranzitu? Ako najdlhšie môže trvať tranzit medzi 1. a 4. kontaktom?