

Úlohy celoslovenského finálového kola AO 2021

1./ Merkúr (autor: Radovan Lascsák)

Merkúr je najbližšia planéta k Slnku zaujímavá pomalou rotáciou a tým, že jeho rotačná os je kolmá na rovinu obehu. Predstavme si, že bývame na rovníku Merkúra, potom:

- Ako najvyššie nad obzor sa môže dostať Slnko?
- Ako dlho je stred Slnka nad obzorom?
- Ako dlho vychádza Slnko nad obzor?

Uvažujte že Merkúr obieha okolo Slnka po kruhovej dráhe s periódou obehu $P = 88$ dní a okolo vlastnej osi sa otočí (prográdne) za $t = 59$ dní.

Polomer Slnka je $R_{\odot} = 696\,000$ km.

V skutočnosti však Merkúr obieha po eliptickej dráhe s pomerne veľkou excentricitou $e = 0,2$.

- Ako dlho vychádza Slnko nad obzor v aféliu? Môžete použiť informáciu, že v perihéliu sa Merkúr pohybuje rýchlosťou $v_p = 59$ km/s (vzhľadom na Slnko).
- V istom momente sa Slnko na oblohe zastaví a začne sa hýbať opačným smerom. V akej vzdialenosti od Slnka sa vtedy nachádza Merkúr?
Pomôcka: Finálnu rovnicu môžete riešiť numericky (napríklad iteračnou metódou).

Hmotnosť Slnka: $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg

Gravitačná konštanta: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²

2./ Rádiateleskop Arecibo (autor: Jana Švrčková)

Rádiateleskop Arecibo bol až do roku 2016 najväčším rádiateleskopom na svete. Počas 57 rokov svojej existencie bolo vďaka nemu uskutočnených množstvo objavov v blízkom i ďalekom vesmíre. Po tom, čo bol teleskop poškodený hurikánom a viacerými zemetraseniami, bolo definitívne rozhodnuté, že je potrebné ho rozobrať a ukončiť jeho prevádzku. Predtým, než sa s tým vôbec začalo, ale praskli zvyšné upevňovacie laná držiace plošinu zavesenú nad ohniskom teleskopu a jej pád ho už definitívne zničil.

a) Rádiateleskop Arecibo pozoroval vo frekvenciách 300 MHz až 10 GHz. Akú najlepšiu rozlišovaciu schopnosť mohol teoreticky dosiahnuť, ak jeho priemer bol 305 m?

Jedným z jeho prvých objavov bola nová hodnota rotačnej periódy Merkúra. Predtým si vedci mysleli, že rotačná doba Merkúra je zhodná s jeho obežnou dobou okolo Slnka, ktorá je 88 dní. Prístroj dokázal okrem prijímania rádiových vln aj vysielateľ. Pri meraní rotačnej doby Merkúra vyslal k planéte signál s frekvenciou 430 MHz a zachytil ho po odraze od Merkúra.

b) Okrem toho sa časť signálu odrazená od stredu disku Merkúra vrátila o 4 ms skôr ako časť signálu odrazená od okraja disku Merkúra. Odrazený signál už nemal len jednu frekvenciu, ale kvôli rotácii Merkúra sa jeho frekvencia pohybovala v rozsahu $430 \text{ MHz} \pm 4,3 \text{ Hz}$. Najnižšia a najvyššia odrazená frekvencia zodpovedajú odrazu od okraja disku planéty, teda miest, kde je rotačná rýchlosť v smere/proti smeru spojnice Zem – Merkúr. Na základe týchto údajov určite rotačnú periódu Merkúra. Vplyv pohybu Merkúra a Zeme okolo Slnka je už z údajov odstránený, netreba ho teda uvažovať.

Ďalším významným objaveným objektom bol prvý známy binárny pulzar PSR B1913+16. Systém sa nachádza v súhvezdí Orol približne 21000 svetelných rokov od Zeme. Perióda obehu oboch neutrónových hviezd je 7,75 hodín, počas obehu je ich najmenšia vzájomná vzdialenosť $1,1 R_{\odot}$ a najväčšia vzájomná vzdialenosť je $4,8 R_{\odot}$.

c) Ukázalo sa, že v dôsledku vyžarovania gravitačných vln a teda strát energie sa perióda obehu systému skraca o $76,5 \mu\text{s}$ za rok. O koľko sa za rok skrátí veľká polos systému? Pri výpočte môžu byť užitočné vzťahy

$$(1 - x/y)^2 \approx 1 - 2x/y$$

$$(1 - x/y)^3 \approx 1 - 3x/y$$

platiace pre $x \ll y$.

V roku 1974 bola z Areciba smerom k hviezdokope M13 ($\alpha_{M13} = 16^h 41^m 42^s$, $\delta_{M13} = 36^\circ 27' 41''$) vyslaná jednoduchá správa popisujúca život na Zemi. Signál bol vysielaný na frekvencii 2380 MHz s výkonom 450 kW. Predpokladajte, že šírka frekvenčného pásma signálu bola 10 Hz.

d) Vlastný pohyb hviezdokopy M13 v rektascenzii je $\mu_\alpha = 3,18 \cdot 10^{-3}$ "/rok a v deklinácii $\mu_\delta = 2,56 \cdot 10^{-3}$ "/rok, uhlový priemer hviezdokopy je 33'. Signálu potrvá približne 22000 rokov, kým sa k nej dostane. Zasiadne vtedy signál ešte nejakú časť hviezdokopy? Predpokladajte, že signál je vysielaný do veľmi malého priestorového uhla zanedbateľného voči uhlového priemeru hviezdokopy a bol namierený do stredu hviezdokopy.

e) Dokázali by prípadní mimozemšťania žijúci v hviezdokope zachytiť tento signál, ak ich prístroje sú schopné detegovať žiarenie so spektrálnou intenzitou minimálne 1 mJy? Signál je zo Zeme vysielaný do priestorového uhla $2,4 \cdot 10^{-9}$ sterad.

Pri výpočtoch môžu byť užitočné nasledujúce konštanty:

$$R_\odot = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$$

3./ Zrkadlová Zem (autor: Radovan Lascsák)

Predstavme si nasledovný scenár:

Celú Zem (uvažujme že je dokonale guľatá) obložime zrkadlami s odrazivosťou $k = 98\%$. Teda nimi prejde iba 2% energie, ktorá potom dopadne na Zem. Zrkadlá sú umiestnené zanedbateľne nízko nad povrchom Zeme, teda vo vzdialenosti R_{\oplus} od jej stredu. Všetka atmosféra je uzavretá pod nimi, čo znamená, že nad zrkadlami už rovno začína vesmír. Určte:

- Koľko energie zo Slnka dopadá na 1 m^2 povrchu zrkadla za sekundu?
- Koľko energie zo Slnka získa celá Zem pod zrkadlom za sekundu?

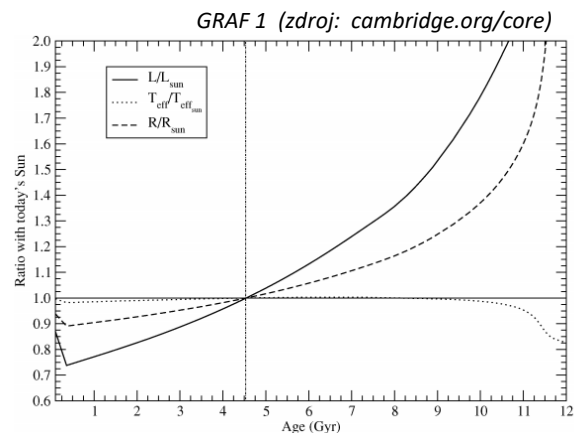
Uvažujte že Zem obieha okolo Slnka po kruhovej dráhe vo vzdialenosti $r_{\oplus} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, polomer Zeme je $R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$ a svietivosť Slnka (množstvo energie ktoré sa z neho uvoľní za 1s) je $L_{\odot} = 3,827 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

Zrkadlá sú konštruované tak, že zvnútra vedia prepúšťať všetku energiu von. Zanedbajte albedo a efekty atmosféry (je veľmi tenká). Uvažujte, že Zem pod zrkadlami rotuje dostatočne rýchlo na to aby sa zahrievala rovnomerne a je absolútne čierne teleso (všetku energiu čo získa následne vyžiari, ako napr. Slnko), potom:

- Aká bude teplota na povrchu Zeme, pod zrkadlom?

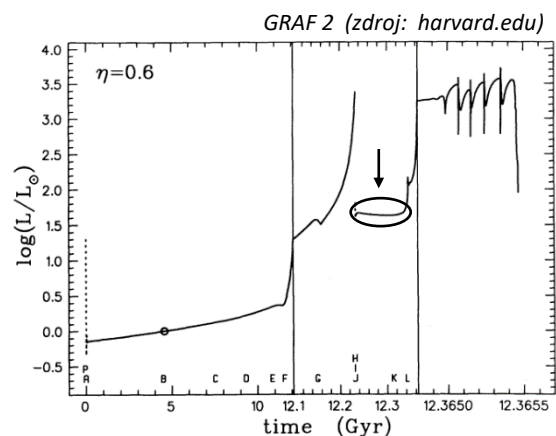
Graf 1 ukazuje, ako sa bude v nasledujúcich miliardách rokov zväčšovať svietivosť Slnka.

- O koľko Kelvinov vzrastie teplota na Zrkadlovej Zemi:
 - za miliardu rokov?
 - za 3 miliardy rokov?
 - za 5 miliárd rokov?



Toto je však nič v porovnaní s tým čo sa bude diať za 7,5 miliardy rokov. Slnko začne spaľovať hélium a premení sa na červeného obra. Závislosť jeho svietivosti v tomto období vykresľuje graf 2. Logaritmus na osi y je dekadický (so základom 10).

- Bol by možný život pod zrkadlami počas stabilnej fázy zakrúžkovanej na obrázku?



Priemerná teplota Zeme je $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ v súčasnosti a bola $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ počas doby ľadovej ($0\text{ }^{\circ}\text{C} = 273\text{ K}$).

Môže sa vám hodiť hodnota Stefan-Boltzmannovej konštanty:
 $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}\text{ W m}^2\text{ K}^4$

4./ Gravitačný kolaps a čierne diery (autor: Martin Okánik)

V úlohách a) – c) uvažujte hviezdu podobnú Slnku:

polomer $R = R_{\text{slnka}} = 700\,000\text{ km}$ a hmotnosť $M = M_{\text{slnka}} = 2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$

gravitačná konštanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ s}^{-1}\text{ kg}^{-1}$

rýchlosť svetla $c = 300\,000\text{ km/s}$

a) Akou rýchlosťou musí letieť vesmírna loď na stabilnej kruhovej dráhe okolo hviezdy vo vzdialenosti $a = 50 \cdot 10^6\text{ km}$ od jej stredu? Aký veľký impulz (zmena hybnosti) a v ktorom smere treba udeliť loďi s hmotnosťou $m = 100\text{ ton}$, aby sme docielili jej radiálny pád na povrch hviezdy?

b) Odvodte trvanie takéhoto pádu. Najskôr odvodte výsledok bez bezrozmerného faktora pomocou rozmerovej analýzy. Potom začnite uvažovať fyziku a odvodte celý výsledok. Pre účely tohto výpočtu považujte hviezdu za hmotný bod v strede. Z pohybovej rovnice a Newtonových zákonov by si takýto výpočet vyžadoval zložitú matematiku. Skúste teda radšej porozmýšľať nad rôznymi limitnými prípadmi kužeľosečiek.

c) Na základe vyššie uvedeného rádovo odhadnite tzv. dynamickú časovú škálu (čas gravitačného kolapsu) Slnku podobnej hviezdy. Predstavujme si, že toto je zhruba čas, za aký skolabuje hviezda na čiernu diery. Skúste vymenovať čo najviac aproximácií / nie celkom správnych predpokladov pri takomto odhade založenom na výsledku z b) .

d) Loď s astronautom je na orbite okolo čiernej diery so Schwarzschildovým polomerom $R_s = 1\text{ m}$. Polomer dráhy je 10^9 metrov . Aká je obežná doba a taktiež gravitačný červený posun (meraný pozorovateľom v nekonečne)? Načrtnite závislosť červeného posunu na polomere dráhy a okomentujte jeho limitné prípady. Dáva to zmysel?

Úloha 5. Dátová analýza (viď ďalší súbor)

(autor: Jozef Lipták)